

Лекция №5

# **МЕТОД ГАУССА.**

Пусть задана система из  $m$  уравнений с  $n$  неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Составим для нее расширенную матрицу, отделив столбец правых частей вертикальной чертой:

$$P = (A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Каждая строка расширенной матрицы является образом одного уравнения :  
элементы  $a_{ij}$  изображают коэффициенты при неизвестных;

элемент  $b_i$  изображает правую часть

вертикальная черта изображает знак  
уравнения;  
равенства.

Вспомним элементарные преобразования, не изменяющие решение системы

Для расширенной матрицы системы  $P$

допустимы:

- перестановка любых двух строк;
- перестановка любых двух столбцов, КРОМЕ СТОЛБЦА ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ (СТОЛБЕЦ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ ПЕРЕСТАВЛЯТЬ НЕЛЬЗЯ);
- умножение элементов любой строки на число  $\alpha \neq 0$ ;
- сложение любых двух строк.

Метод Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных с помощью элементарных преобразований.

Вычисления проводятся в два этапа, называемых ПРЯМЫМ и ОБРАТНЫМ ХОДОМ

Преобразования коэффициентов при неизвестных и правых частей системы удобно выполнять в матричной форме.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** рекомендуется нумеровать столбцы или проставлять под столбцами соответствующие неизвестные:

$$P = (A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n$

# Прямой ход

Приведем расширенную матрицу системы Р к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований :

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & a_{2r} & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} \\ & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_m \end{array} \right)$$

$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_r \quad x_{r+1} \quad \dots \quad x_n$

Возможны  
две  
ситуации:

I) среди чисел  $b_{r+1}, \dots, b_m$  есть хотя бы одно, не равное нулю, например:  $b_{r+1} \neq 0$

II) все числа  $b_{r+1}, \dots, b_m$  равны нулю:  
 $b_{r+1} = 0; \dots, b_m = 0$

$$\left( \begin{array}{cccccc|c}
 1 & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
 0 & 1 & \cdots & a_{2r} & a_{2r+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
 & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} & b_r \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{r+1} \\
 & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m
 \end{array} \right)$$

$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_r \quad x_{r+1} \dots \quad x_n$

1) Если среди чисел  $b_{r+1}, \dots, b_m$  есть хотя бы одно, не равное нулю, например:  $b_{r+1} \neq 0$ , то это означает, что в системе есть уравнение:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b_{r+1} \neq 0,$$

**которое не имеет  
решений.**

Если сравнить ранги матриц, то  $\text{rang } A = r$ , а  $\text{rang } P = r + 1$ ; по теореме Кронекера-Капелли система

**несовместна.**

Решение закончено, обратный ход метода Гаусса не нужен.

Какой ответ следует дать

?

II) Если все числа  $b_{r+1}, \dots, b_m$  равны нулю:  $b_{r+1} = 0; \dots, b_m = 0$ ,

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & a_{2r} & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_r \quad x_{r+1} \quad \dots \quad x_n$

это значит, что  $\text{rang } A = \text{rang } P = r$ , и система уравнений

Выделим базисный минор и отбросим нулевые строки: совместна

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & a_{2r} & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} & b_r \end{array} \right)$$

$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_r \quad x_{r+1} \quad \dots \quad x_n$

Останется укороченная система из  $r$  уравнений.

# Обратный ход

$$\left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & a_{2r} & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} & b_r \end{array} \right)$$

$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_r \quad x_{r+1} \quad \dots \quad x_n$

В укороченной системе из  $r$  уравнений  
ВОЗМОЖНЫ два  
случая:

Случай

Случай

Число <sup>1</sup> неизвестных

Число <sup>2</sup> неизвестных

$n$  равно рангу системы  $r$ :

$n$  больше ранга системы  $r$ :

$$n = r$$

$$n > r$$

Почему **невозможен**  
случай

$$n < r ?$$



# Случай 2

Число неизвестных  $n$  **больше** ранга системы  $r$  :  $n > r$

$$\left( \begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & a_{2r} & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} & b_r \end{array} \right)$$

$\begin{array}{cccc|ccc} | x_1 & x_2 & \dots & x_r | & x_{r+1} & \dots & x_n \end{array}$

БАЗИСН  
ЫЕ

СВОБОДН  
ЫЕ

В базисный минор вошли коэффициенты при неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_r$ ;

назовем их **БАЗИСНЫМИ**.

Неизвестные  $x_{r+1}, \dots, x_n$ , не вошедшие в базисный минор, назовем **СВОБОДНЫМИ**

**ВОПРОС:** сколько свободных  
неизвестных?

**ОТВЕТ:** свободных неизвестных  $k = n - r$

Перейдем от матричной формы записи к уравнениям:

$$\left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & a_{2r} & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} & b_r \end{array} \right)$$

$\begin{array}{cccc} | & x_1 & x_2 & \dots & x_r & | \\ & & & & & & x_{r+1} & \dots & x_n \end{array}$

БАЗИСН

СВОБОДН

ЫЕ

ЫЕ

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2r}x_r + a_{2r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = b_r \end{array} \right.$$

$\begin{array}{c} | \\ | \\ \cdot \end{array}$

БАЗИСН

СВОБОДН

ЫЕ

ЫЕ

Придадим свободным переменным любые значения и подставим их в уравнения:

$$x_{r+1} = C_1$$

$$x_{r+2} = C_2$$

...

$$x_n = C_{n-r}$$

$$\begin{cases}
 x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}C_1 + \dots + a_{1n}C_{n-r} = b_1 \\
 x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2r}x_r + a_{2r+1}C_1 + \dots + a_{2n}C_{n-r} = b_2 \\
 \vdots \\
 x_r + a_{rr+1}C_1 + \dots + a_{rn}C_{n-r} = b_r
 \end{cases}$$

|
|
|

!
!
!

·
·
·

БАЗИСН
СВОБОДН

ЫЕ
ЫЕ

Выразим базисные переменные через свободные. Для этого перенесем в правую часть уравнений слагаемые со свободными переменными (изменив знак на противоположный!!!):

$$\begin{cases}
 x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}C_1 - \dots - a_{1n}C_{n-r} \\
 x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}C_1 - \dots - a_{2n}C_{n-r} \\
 \vdots \\
 x_r = b_r - a_{rr+1}C_1 - \dots - a_{rn}C_{n-r}
 \end{cases}$$

Вычислим базисные переменные (как в случае 1), решая последовательно уравнения системы снизу вверх.

Придавая свободным переменным другие значения, получим другие значения базисных. Система будет иметь **БЕСКОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО** решений.

(называется

пространством)

# Пример 1

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Решить систему уравнений методом

Гаусса:

**РЕШЕНИ** *Прямой*

Е: **ход**

$$P = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \times (-2) \\ \times (-1) \end{array}$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$                        $x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 \cdot (-2) + 2 & 2 \cdot (-2) - 1 & 3 \cdot (-2) + 1 & (-1) \cdot (-2) - 2 \\ 1 \cdot (-1) + 1 & 2 \cdot (-1) - 3 & 3 \cdot (-1) - 2 & (-1) \cdot (-1) + 3 \end{array} \right) =$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$$= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \end{array} \right) : (-5) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \end{array} \right) \times 5 \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

1)  $b_3 = \neq 0$ ; система **несовместна** **ОТВЕТ** : нет решений

# Пример 2

$$n < r$$

Решить систему уравнений методом

Гаусса:

РЕШЕНИ **Прямой**

Е: **ход**

Входной системе из уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 4 \\ 0 & 3 & -2 & | & 8 \\ 1 & 1 & -1 & | & 4 \end{pmatrix} \times (-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 4 \\ 0 & 3 & -2 & | & 8 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \times (-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 4 \\ 0 & 3 & -2 & | & 8 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 3 & -2 & | & 8 \end{pmatrix} \times (-3) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -8 & | & 8 \end{pmatrix} : (-8) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$$\text{rang } A = 3;$$

$$\text{rang } P = 3;$$

$$n = 3;$$

Система **совместна**,

**случай 1.**

## Обратный ход

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$$x_2 + 2 \cdot (-1) = 0; \quad x_2 = 2;$$

$$x_1 + 2 \cdot 2 - 1 = 4; \quad x_1 = 1;$$

**ОТВЕ**  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

**Т:**

Дома сделать  
проверку

# Пример 3

Решить систему уравнений методом

Гаусса:

РЕШЕНИ **Прямой**

Е: **ход**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ -x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 12 \end{cases}$$

$$P = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 8 \\ -1 & 4 & -5 & 12 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & 6 & -4 & 16 \end{array} \right) : 3 \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 6 & -4 & 16 \end{array} \right) \times (-6)$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{rang } A = 2;$$

$$\text{rang } P = 2;$$

$$n = 3;$$

Система **совместна**,  
случай 2.

## Обратный ход

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{8}{3} \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{8}{3} \end{array} \right)$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

БАЗИСН  
ЫЕ

СВОБОДН  
АЯ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 - \frac{2}{3}x_3 = \frac{8}{3} \end{cases}$$

$$x_3 = C;$$

$$x_2 - \frac{2}{3}C = \frac{8}{3}; \quad x_2 = \frac{8}{3} + \frac{2}{3}C;$$

$$x_1 + 2\left(\frac{8}{3} + \frac{2}{3}C\right) + C = 4; \quad x_1 = -\frac{4}{3} - \frac{7}{3}C;$$

**ОТВЕ  
Т:**  $X = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} - \frac{7}{3}C \\ \frac{8}{3} + \frac{2}{3}C \\ C \end{pmatrix}$ , где  $C$  – любое число.

Дома сделать