



Метод математической индукции

Элементы математической логики

Теория множеств

Индукция

- **Inductio** (лат) - наведение

Вид умозаключений, при котором на основании анализа частных суждений о принадлежности признака некоторым отдельным элементам множества делается вывод о принадлежности этого признака всему множеству

Аксиомы Пеано

- 1. Для каждого натурального числа a существует одно и только одно следующее за ним число a'
- 2. Единица является натуральным числом, причём она не следует ни за каким натуральным числом

Аксиомы Пеано

- 3. Ни одно натуральное число не следует за двумя различными натуральными числами.
- 4. Если множество A содержит единицу и вместе с каждым числом a содержит следующее за ним число a' , то A содержит все натуральные числа.

Метод математической индукции

I. База индукции

Утверждение проверяется для некоторого начального элемента, например $n=1$

Даёт возможность определить нижнюю границу применения формулы или действия неравенства.

Метод математической индукции

2. Гипотеза индукции

Формулируется гипотеза о том, что утверждение справедливо для некоторого $k \in \mathbb{N}$

Шаг к обобщению, который формулируется в виде гипотезы. Это индуктивная фаза: от одного частного случая перешли к обобщению.

Метод математической индукции

3. Шаг индукции

Доказывается, что

если из справедливости утверждения для произвольного $n=k \in \mathbf{N}$ следует, что оно справедливо для $n=k+1$,

то данное утверждение справедливо и для любого натурального числа n

Фаза доказательства. Устанавливаем, насколько сильны индуктивные выводы.

Пример

- Доказать, что $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$$

I. База индукции

- Проверим равенство при $n=1$

$$1 = \frac{1 \cdot (3 \cdot 1 - 1)}{2}$$

$$1 = 1$$

Следовательно, формула верна

2. Гипотеза индукции

- Допустим, что равенство верно при некотором $n=k \in \mathbf{N}$

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2) = \frac{k(3k - 1)}{2}$$

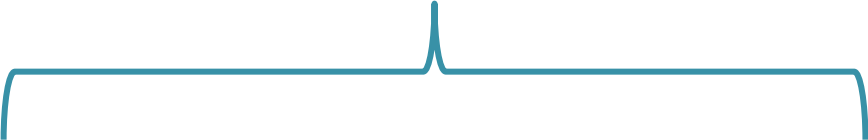
3. Шаг индукции

- Докажем, что если гипотеза верна, то равенство верно при некотором $n=k+1$, то есть

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2) + (3(k + 1) - 2) = \\ = \frac{(k + 1)(3(k + 1) - 1)}{2}$$

3. Шаг индукции

Гипотеза


$$1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2) + (3(k + 1) - 2) =$$
$$= \frac{(k + 1)(3(k + 1) - 1)}{2}$$

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2) = \frac{k(3k - 1)}{2}$$

3. Шаг индукции

$$\frac{k(3k-1)}{2} + (3k+3-2) = \frac{(k+1)(3k+3-1)}{2}$$

$$\frac{k(3k-1)}{2} + (3k+1) = \frac{(k+1)(3k+2)}{2}$$

$$\frac{k(3k-1) + 2(3k+1)}{2} = \frac{(k+1)(3k+2)}{2}$$

3. Шаг индукции

$$\frac{3k^2 - k + 6k + 2}{2} = \frac{3k^2 + 2k + 3k + 2}{2}$$

$$\frac{3k^2 + 5k + 2}{2} = \frac{3k^2 + 5k + 2}{2}$$

Получили верное равенство.

Формула справедлива для $n=k+1$ при условии её выполнимости при $n=k$.

\Rightarrow она справедлива $\forall n \in \mathbb{N}$

Пример

- Доказать, что $\forall n \in \mathbb{N}$

$6^{2n} - 1$ кратно 35

I. База индукции

Проверим справедливость утверждения при $n=1$

$$6^2 - 1 = 36 - 1 = 35$$

35 делится без остатка на 35

Следовательно, утверждение верно.

2. Гипотеза индукции

Пусть при $n=k$ утверждение справедливо

$6^{2k} - 1$ делится без остатка на 35

3. Шаг индукции

Докажем справедливость
утверждения при $n=k+1$

$6^{2(k+1)} - 1$ делится без остатка на 35

$$\begin{aligned}6^{2(k+1)} - 1 &= 6^{2k+2} - 1 = \\ &= 6^{2k} \times 6^2 - 1 = 36 \times 6^{2k} - 1\end{aligned}$$

3. Шаг индукции

$$36 \times 6^{2k} - 1 =$$

$$= 36 \times 6^{2k} - 1 + 36 - 36 =$$

$$= 36 \times 6^{2k} - 36 + 35 =$$

$$= 36 (6^{2k} - 1) + 35$$

3. Шаг индукции

Гипотеза

$$36(6^{2k} - 1) + 35$$

The diagram illustrates the inductive step with the expression $36(6^{2k} - 1) + 35$. A blue bracket above the expression groups the terms $36(6^{2k} - 1)$ and 35 . Below the expression, two blue brackets indicate divisibility: one under $36(6^{2k} - 1)$ and another under 35 . A larger blue bracket at the bottom encompasses the entire expression. Red text labels are placed below each bracket: "Делится на 35" under the first bracket, "Делится на 35" under the second bracket, and "Делится на 35" under the largest bottom bracket.

Делится на 35

Делится на 35

Делится на 35