Метод математической индукции

Элементы математической логики

Теория множеств

Индукция

- **Inductio** (лат) - наведение

Вид умозаключений, при котором на основании анализа частных суждений о принадлежности признака некоторым отдельным элементам множества делается вывод о принадлежности этого признака всему множеству

Аксиомы Пеано

- 1. Для каждого натурального числа ***a*** существует одно и только одно следующее за ним число ***a'***
- 2. Единица является натуральным числом, причём она не следует ни за каким натуральным числом

Аксиомы Пеано

- 3. Ни одно натуральное число не следует за двумя различными натуральными числами.
- 4. Если множество А содержит единицу и вместе с каждым числом ***a*** содержит следующее за ним число ***a'***, то А содержит все натуральные числа.

Метод математической индукции

1.База индукции

Утверждение проверяется для некоторого начального элемента, например $n=1$

Даёт возможность определить нижнюю границу применения формулы или действия неравенства.

Метод математической индукции

2. Гипотеза индукции

Формулируется гипотеза о том, что утверждение справедливо для некоторого $k \in N$

Шаг к обобщению, который формулируется в виде гипотезы. Это индуктивная фаза: от одного частного случая перешли к обобщению.

Метод математической индукции

3. Шаг индукции

Доказывается, что

если из справедливости утверждения для произвольного $n=k\in N$ следует, что оно справедливо для $n=k+1$,

то данное утверждение справедливо и для любого натурального числа n

Фаза доказательства. Устанавливаем, насколько сильны индуктивные выводы.

Пример

- Доказать, что $\forall n \in N$ справедливо равенство

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

I. База индукции

- Проверим равенство при ***n=1***

$$1 = \frac{1 \cdot (3 \cdot 1 - 1)}{2}$$

$$1 = 1$$

Следовательно, формула верна

2. Гипотеза индукции

- Допустим, что равенство верно при некотором $n=k \in \boldsymbol{N}$

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3k-2) = \frac{k(3k-1)}{2}$$

3. Шаг индукции

- Докажем, что если гипотеза верна, то равенство верно при некотором *n=k+1*, то есть

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3k - 2) + (3(k + 1) - 2) =$$

$$= \frac{(k + 1)(3(k + 1) - 1)}{2}$$

3. Шаг индукции

$$\overbrace{1+4+7+\cdots+(3k-2)}^{\text{Гипотеза}}+(3(k+1)-2)=$$

$$=\frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}$$

$$1+4+7+\cdots+(3k-2)=\boxed{\frac{k(3k-1)}{2}}$$

3. Шаг индукции

$$\frac{k(3k-1)}{2}+(3k+3-2)=\frac{(k+1)(3k+3-1)}{2}$$

$$\frac{k(3k-1)}{2}+(3k+1)=\frac{(k+1)(3k+2)}{2}$$

$$\frac{k(3k-1)+2(3k+1)}{2}=\frac{(k+1)(3k+2)}{2}$$

3. Шаг индукции

$$\frac{3k^2 - k + 6k + 2}{2} = \frac{3k^2 + 2k + 3k + 2}{2}$$

$$\frac{3k^2 + 5k + 2}{2} = \frac{3k^2 + 5k + 2}{2}$$

Получили верное равенство.

Формула справедлива для $n=k+1$ при условии её выполнимости при $n=k$.

$\Rightarrow$ она справедлива $\forall\ n \in N$

Пример

- Доказать, что $\forall n \in N$

$$6^{2n}-1 \quad \text{кратно} \quad 35$$

1. База индукции

Проверим справедливость утверждения при *n=1*

$$6^2 - 1 = 36 - 1 = 35$$

35 делится без остатка на 35

Следовательно, утверждение верно.

2. Гипотеза индукции

Пусть при ***n=k*** утверждение справедливо

$6^{2k} - 1$ делится без остатка на 35

3. Шаг индукции

Докажем справедливость утверждения при ***n=k+1***

$6^{2(k+1)} - 1$ делится без остатка на 35

$$6^{2(k+1)} - 1 = 6^{2k+2} - 1 =$$

$$= 6^{2k} \times 6^{2} - 1 = 36 \times 6^{2k} - 1$$

3. Шаг индукции

$36 \times 6^{2k} - 1 =$

$= 36 \times 6^{2k} - 1 + 36 - 36 =$

$= 36 \times 6^{2k} - 36 + 35 =$

$= 36\,(6^{2k} - 1) + 35$

3. Шаг индукции

$$\underbrace{\underbrace{36\,\overbrace{(6^{2k}-1)}^{\text{Гипотеза}}}_{\text{Делится на 35}} + \underbrace{35}_{\text{Делится на 35}}}_{\text{Делится на 35}}$$