

# Метод Ньютона (метод касательных)

Подготовила Лябина Ольга  
Студент 146 группы

# Метод Ньютона

- Метод Ньютона (также известный как метод касательных) — это итерационный численный метод нахождения корня (нуля) заданной функции. Метод был впервые предложен английским физиком, математиком и астрономом Исааком Ньютоном (1643—1727). Поиск решения осуществляется путём построения последовательных приближений и основан на принципах простой итерации. Метод обладает квадратичной сходимостью. Улучшением метода является метод хорд и касательных.
- В случае решения задач оптимизации, в которых требуется определить нуль первой производной либо градиента в случае многомерного пространства. предполагается, что функция дважды непрерывно дифференцируема. Отыскание минимума функции производится при помощи отыскания стационарной точки, т.е. точки, удовлетворяющей уравнению, которое решается методом Ньютона.

# Историческая справка

- Метод был описан Исааком Ньютоном в рукописи «Об анализе уравнениями бесконечных рядов» (лат. «De analysi per aequationes numero terminorum infinitas»), адресованной в 1669 году Барроу, и в работе «Метод флюксий и бесконечные ряды» (лат. «De methodis fluxionum et serierum infinitarum») или «Аналитическая геометрия» (лат. «Geometria analytica») в собраниях трудов Ньютона, которая была написана в 1671 году. В своих работах Ньютон вводит такие понятия, как разложение функции в ряд, бесконечно малые и флюксии (производные в нынешнем понимании). Указанные работы были изданы значительно позднее: первая вышла в свет в 1711 году благодаря Уильяму Джонсону, вторая была издана Джоном Кользоном в 1736 году уже после смерти создателя. Однако описание метода существенно отличалось от его нынешнего изложения: Ньютон применял свой метод исключительно к полиномам. Он вычислял не последовательные приближения, а последовательность полиномов и в результате получал приближённое решение.

# Историческая справка

- Впервые метод был опубликован в трактате «Алгебра» Джона Валлиса в 1685 году, по просьбе которого он был кратко описан самим Ньютоном. В 1690 году Джозеф Рафсон опубликовал упрощённое описание в работе «Общий анализ уравнений» (лат. «Analysis aequationum universalis»). Рафсон рассматривал метод Ньютона как чисто алгебраический и ограничил его применение полиномами, однако при этом он описал метод на основе последовательных приближений вместо более трудной для понимания последовательности полиномов, использованной Ньютоном. Наконец, в 1740 году метод Ньютона был описан Томасом Симпсоном как итеративный метод первого порядка решения нелинейных уравнений с использованием производной в том виде, в котором он излагается здесь. В той же публикации Симпсон обобщил метод на случай системы из двух уравнений и отметил, что метод Ньютона также может быть применён для решения задач оптимизации путём нахождения нуля производной или градиента.

# Суть метода

- Поиск решения осуществляется путём построения последовательных приближений и основан на принципах простой итерации. Метод обладает квадратичной сходимостью. В случае решения задач оптимизации предполагается, что функция дважды непрерывно дифференцируема. Отыскание минимума функции  $f(x)$  производится при помощи отыскания стационарной точки  $x^*$ , т.е. точки, удовлетворяющей уравнению  $f'(x)=0$ , которое решается методом Ньютона.

- Если  $x^k$  – точка, полученная на  $k$ -м шаге, то функция аппроксимируется своим уравнением касательной:

$$y=f'(x^k)+(x-x^k)f''(x^k),$$

а точка  $x^{k+1}$  выбирается как пересечение этой прямой с осью  $Ox$ , т.е.

$$x^{k+1} = x^k - f'(x^k)/f''(x^k).$$

# Неудобство метода

- Неудобство этого метода состоит в необходимости вычисления в каждой точке первой и второй производных. Значит, он применим лишь тогда, когда функция имеет достаточно простую аналитическую форму, чтобы производные могли быть вычислены в явном виде вручную. Действительно, всякий раз, когда решается новая задача, необходимо выбрать две специфические подпрограммы (функции) вычисления производных  $f'$  и  $f''$ , что не позволяет построить общие алгоритмы, т. е. применимые к функции любого типа.

- Когда начальная точка итераций достаточно близка к искомому минимуму, скорость сходимости метода Ньютона в общем случае квадратическая. Однако, глобальная сходимость метода Ньютона, вообще говоря, не гарантируется.
- Хороший способ гарантировать глобальную сходимость этого метода состоит в комбинировании его с другим методом для быстрого получения хорошей аппроксимации искомого оптимума. Тогда несколько итераций метода Ньютона, с этой точкой в качестве исходной, достаточны для получения превосходной точности.

# Ограничения

Ограничения на исходную функцию будут выглядеть так:

- функция должна быть ограничена;
- функция должна быть гладкой, дважды дифференцируемой;
- её первая производная равномерно отделена от нуля;
- её вторая производная должна быть равномерно ограничена.

В случае решения задачи оптимизации под функцией понимаем ее производную.

# Пример

- Рассмотрим задачу о нахождении положительных  $x$ , для которых  $\cos x = x^3$ . Эта задача может быть представлена как задача нахождения нуля функции  $f(x) = \cos x - x^3$ . Имеем выражение для производной  $f'(x) = -\sin x - 3x^2$ . Так как для всех  $\cos x \leq 0$  и для  $x \leq 1$   $x^3 > 1$  и для  $x > 1$ , очевидно, что решение лежит между 0 и 1. Возьмём в качестве начального приближения значение  $x_0 = 0,5$ , тогда:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1,112\ 141\ 637\ 097, \\
 x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \underline{0,909\ 672\ 693\ 736}, \\
 x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \underline{0,867\ 263\ 818\ 209}, \\
 x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = \underline{0,865\ 477\ 135\ 298}, \\
 x_5 &= x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = \underline{0,865\ 474\ 033\ 111}, \\
 x_6 &= x_5 - \frac{f(x_5)}{f'(x_5)} = \underline{0,865\ 474\ 033\ 102}.
 \end{aligned}$$

- Подчёркиванием отмечены верные значащие цифры. Видно, что их количество от шага к шагу растёт (приблизительно удваиваясь с каждым шагом): от 1 к 2, от 2 к 5, от 5 к 10, иллюстрируя квадратичную скорость

# Иллюстрация

Иллюстрация применения метода Ньютона к функции  $f(x) = \cos x - x^3$  с начальным приближением в точке  $x_0 = 0,5$ .

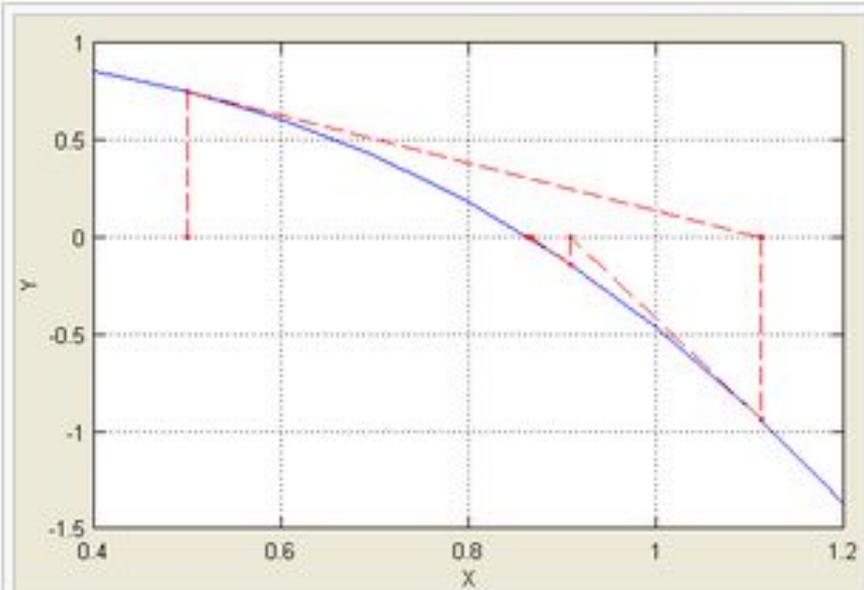


График последовательных приближений.

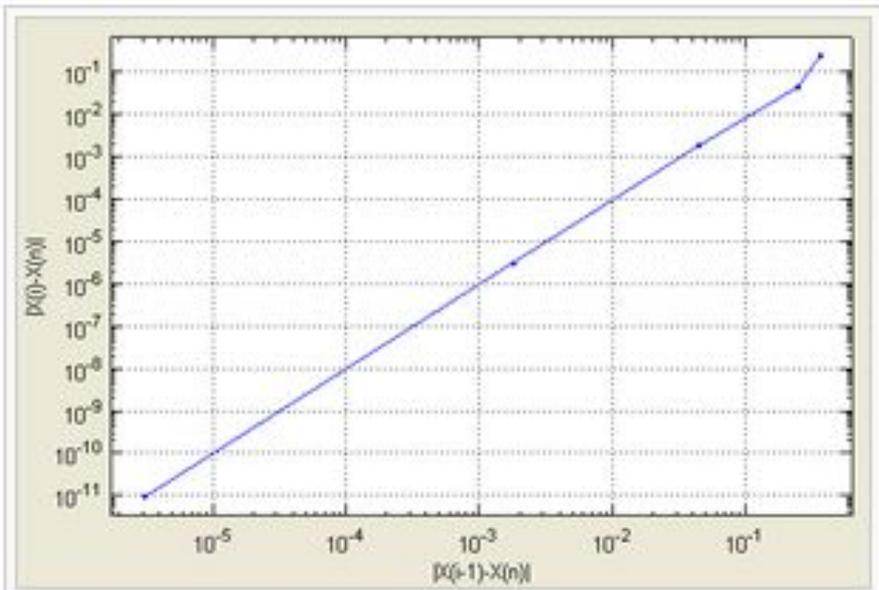


График сходимости.



Согласно способу практического определения скорость сходимости может быть оценена как тангенс угла наклона графика сходимости, то есть в данном случае равна двум.

# Основные понятия

- Градиент - вектор, своим направлением указывающий направление наискорейшего возрастания некоторой величины, значение которой меняется от одной точки пространства к другой, а по величине (модулю) равный скорости роста этой величины в  $\varepsilon$   $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$  едини. Координаты
- Аппроксимация – проведение приближенной линии.
- Итерация – повторение какого-либо действия. Итерация в программировании – организация обработки данных, при которой действия повторяются многократно, не приводя при этом к вызовам самих себя.