# Метод Ньютона
# (метод касательных)

Подготовила Лябина Ольга
Студент 146 группы

# Метод Ньютона

- Метод Ньютона (также известный как метод касательных) — это итерационный численный метод нахождения корня (нуля) заданной функции. Метод был впервые предложен английским физиком, математиком и астрономом Исааком Ньютоном (1643—1727). Поиск решения осуществляется путём построения последовательных приближений и основан на принципах простой итерации. Метод обладает квадратичной сходимостью. Улучшением метода является метод хорд и касательных.
- В случае решения задач оптимизации, в которых требуется определить нуль первой производной либо градиента в случае многомерного пространства. предполагается, что функция дважды непрерывно дифференцируема. Отыскание минимума функции  производится при помощи отыскания стационарной точки, т.е. точки , удовлетворяющей уравнению, которое решается методом Ньютона.

# Историческая справка

- Метод был описан Исааком Ньютоном в рукописи «Об анализе уравнениями бесконечных рядов» (лат. «De analysi per aequationes numero terminorum infinitas»), адресованной в 1669 году Барроу, и в работе «Метод флюксий и бесконечные ряды» (лат. «De metodis fluxionum et serierum infinitarum») или «Аналитическая геометрия» (лат. «Geometria analytica») в собраниях трудов Ньютона, которая была написана в 1671 году. В своих работах Ньютон вводит такие понятия, как разложение функции в ряд, бесконечно малые и флюксии (производные в нынешнем понимании). Указанные работы были изданы значительно позднее: первая вышла в свет в 1711 году благодаря Уильяму Джонсону, вторая была издана Джоном Кользоном в 1736 году уже после смерти создателя. Однако описание метода существенно отличалось от его нынешнего изложения: Ньютон применял свой метод исключительно к полиномам. Он вычислял не последовательные приближения , а последовательность полиномов и в результате получал приближённое решение.

# Историческая справка

- Впервые метод был опубликован в трактате «Алгебра» Джона Валлиса в 1685 году, по просьбе которого он был кратко описан самим Ньютоном. В 1690 году Джозеф Рафсон опубликовал упрощённое описание в работе «Общий анализ уравнений» (лат. «Analysis aequationum universalis»). Рафсон рассматривал метод Ньютона как чисто алгебраический и ограничил его применение полиномами, однако при этом он описал метод на основе последовательных приближений  вместо более трудной для понимания последовательности полиномов, использованной Ньютоном. Наконец, в 1740 году метод Ньютона был описан Томасом Симпсоном как итеративный метод первого порядка решения нелинейных уравнений с использованием производной в том виде, в котором он излагается здесь. В той же публикации Симпсон обобщил метод на случай системы из двух уравнений и отметил, что метод Ньютона также может быть применён для решения задач оптимизации путём нахождения нуля производной или градиента.

# Суть метода

- Поиск решения осуществляется путём построения последовательных приближений и основан на принципах простой итерации. Метод обладает квадратичной сходимостью. В случае решения задач оптимизации предполагается, что функция  дважды непрерывно дифференцируема. Отыскание минимума функции f(x) производится при помощи отыскания стационарной точки x*, т.е. точки , удовлетворяющей уравнению f'(x)=0, которое решается методом Ньютона.

- Если  $x^k$– точка, полученная на k-м шаге, то функция аппроксимируется своим уравнением касательной:

$$y=f'(x^k)+(x- x^k)f''(x^k),$$

а точка $x^{k+1}$ выбирается как пересечение этой прямой с осью Ox, т.е. $x^{k+1} = x^k – f'(x^k)/f''(x^k)$.

# Неудобство метода

- Неудобство этого метода состоит в необходимости вычисления в каждой точке первой и второй производных. Значит, он применим лишь тогда, когда функция  имеет достаточно простую аналитическую форму, чтобы производные могли быть вычислены в явном виде вручную. Действительно, всякий раз, когда решается новая задача, необходимо выбрать две специфические подпрограммы (функции) вычисления производных  и , что не позволяет построить общие алгоритмы, т. е. применимые к функции любого типа.

- Когда начальная точка итераций  достаточно близка к искомому минимуму, скорость сходимости метода Ньютона в общем случае квадратическая. Однако, глобальная сходимость метода Ньютона, вообще говоря, не гарантируется.

- Хороший способ гарантировать глобальную сходимость этого метода состоит в комбинировании его с другим методом для быстрого получения хорошей аппроксимации искомого оптимума. Тогда несколько итераций метода Ньютона, с этой точкой в качестве исходной, достаточны для получения превосходной точности.

# Ограничения

Ограничения на исходную функцию будут выглядеть так:

- функция должна быть ограничена;
- функция должна быть гладкой, дважды дифференцируемой;
- её первая производная равномерно отделена от нуля;
- её вторая производная должна быть равномерно ограничена.

В случае решения задачи оптимизации под функцией понимаем ее производную.

# Пример

- Рассмотрим задачу о нахождении положительных x, для которых cosx=x^3. Эта задача может быть представлена как задача нахождения нуля функции f(x)=cosx – x^3. Имеем выражение для производной f'(x)= - sinx – 3x^2. Так как для всех cosx<=0 и для x b x^3>1 и для x>1, очевидно, что решение лежит между 0 и 1. Возьмём в качестве начального приближения значение $x_0$=0,5 , тогда:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} &= 1{,}112\,141\,637\,097, \\
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} &= \underline{0{,}9}09\,672\,693\,736, \\
x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} &= \underline{0{,}86}7\,263\,818\,209, \\
x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} &= \underline{0{,}865\,47}7\,135\,298, \\
x_5 &= x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} &= \underline{0{,}865\,474\,033\,1}11, \\
x_6 &= x_5 - \frac{f(x_5)}{f'(x_5)} &= \underline{0{,}865\,474\,033\,10}2.
\end{aligned}
$$

- Подчёркиванием отмечены верные значащие цифры. Видно, что их количество от шага к шагу растёт (приблизительно удваиваясь с каждым шагом): от 1 к 2, от 2 к 5, от 5 к 10, иллюстрируя квадратичную скорость

# Иллюстрация

**Иллюстрация применения метода Ньютона к функции** $f(x) = \cos x - x^3$ **с начальным приближением в точке** $x_0 = 0{,}5$.

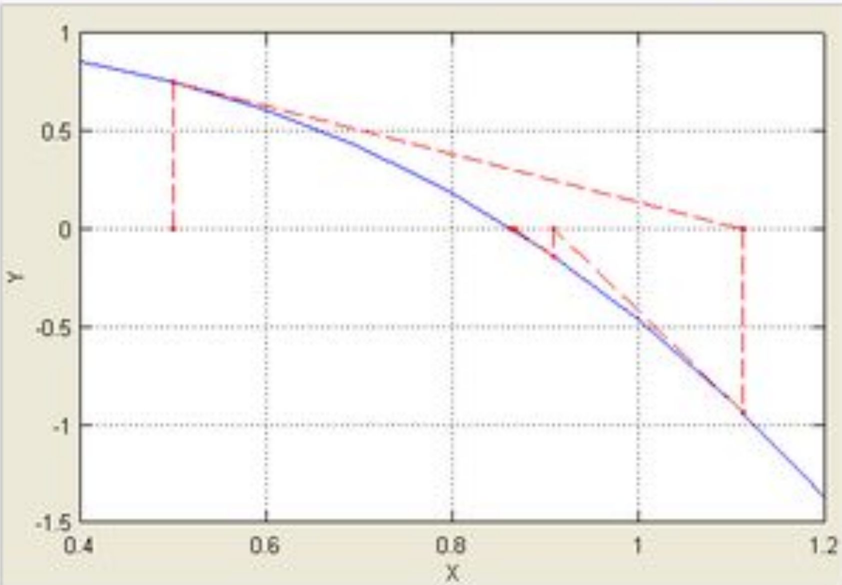


График последовательных приближений.

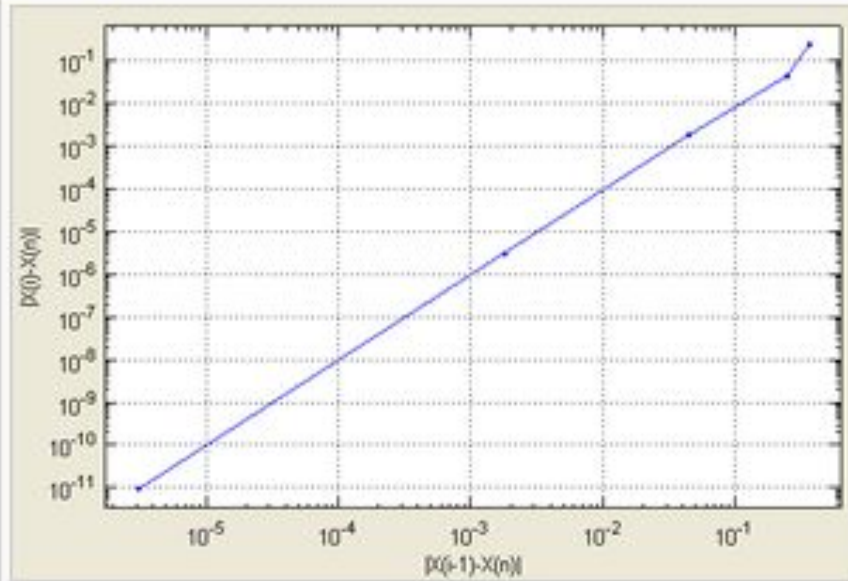


График сходимости.

Согласно способу практического определения скорость сходимости может быть оценена как тангенс угла наклона графика сходимости, то есть в данном случае равна двум.

# Основные понятия

- Градиент - вектор, своим направлением указывающий направление наискорейшего возрастания некоторой величины , значение которой меняется от одной точки пространства к другой, а по величине (модулю) равный быстроте роста этой величины в з… ении. Координаты

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

- Аппроксимация – проведение приближенной линии.
- Итерация— повторение какого-либо действия. Итерация в программировании — организация обработки данных, при которой действия повторяются многократно, не приводя при этом к вызовам самих себя.