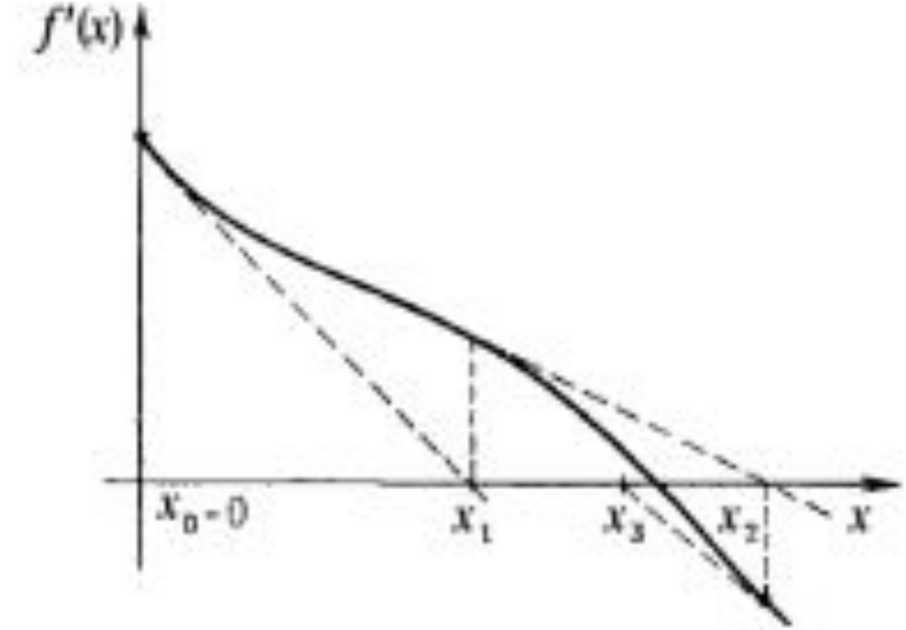
Метод Ньютона-Рафсона

Выполнила: Фертикова Елена,
гр. 53425/2

Цель: поиск решения уравнения $f'(x) = 0$



Алгоритм решения:

- Задаем x_0, проводи в этой точке касател к функции $f'(x)$.
- Находим точку пересечения касательной с осью O_x. Обозначаем эту точку x_1.
- Продолжаем процедуру до тех пор, пока не выполнится критерий остановки $f'(x_k) \leq \varepsilon$.

- Ордината точек касательной описывается выражением:

$$f'(x_k) + f''(x_k)(x-x_k),$$

поэтому приравняв это выражение к нулю, найдем x_{k+1}

$$x_{k+1} = x_k - (f'(x_k)/ f'(x_k))$$

Пример №1

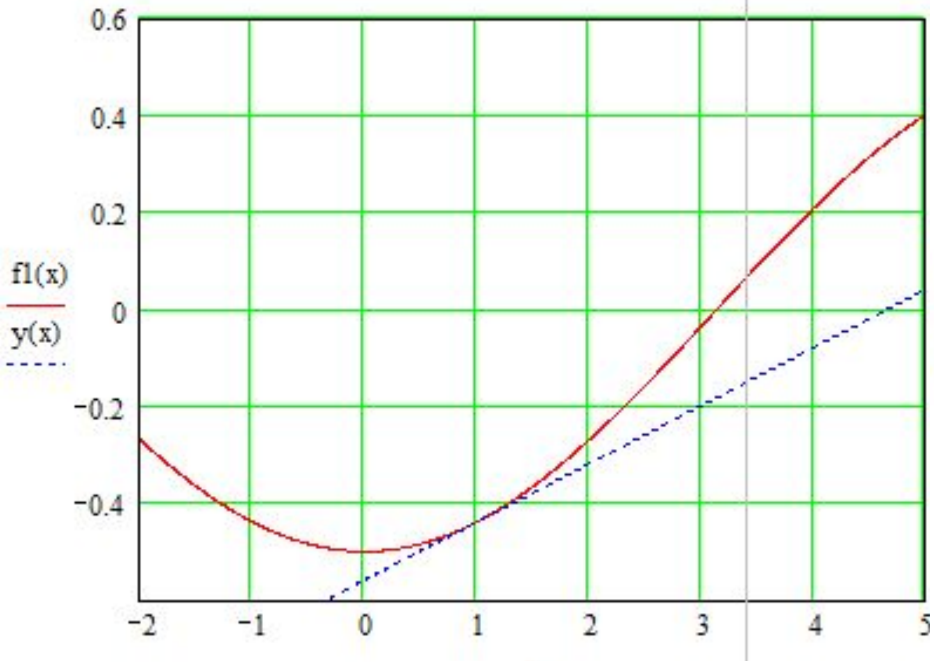
$$f = -sin\left(\frac{x}{2}\right) + 1$$

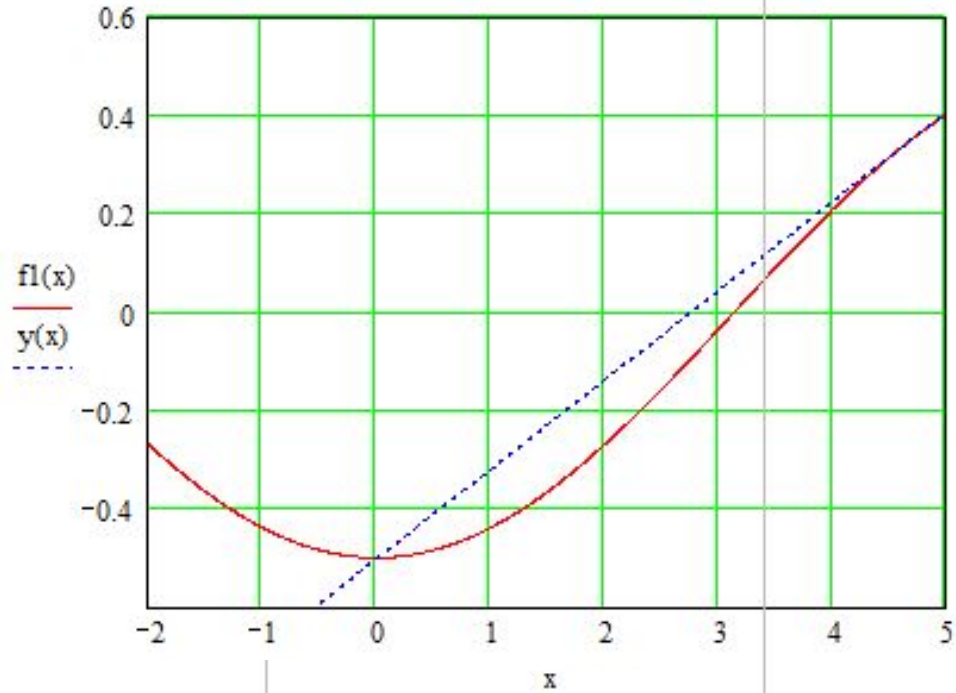
Выберем $x_0 = 1$ и найдем точку минимума для производной с погрешностью ε = $1{,}3 \cdot 10^{-2}$.

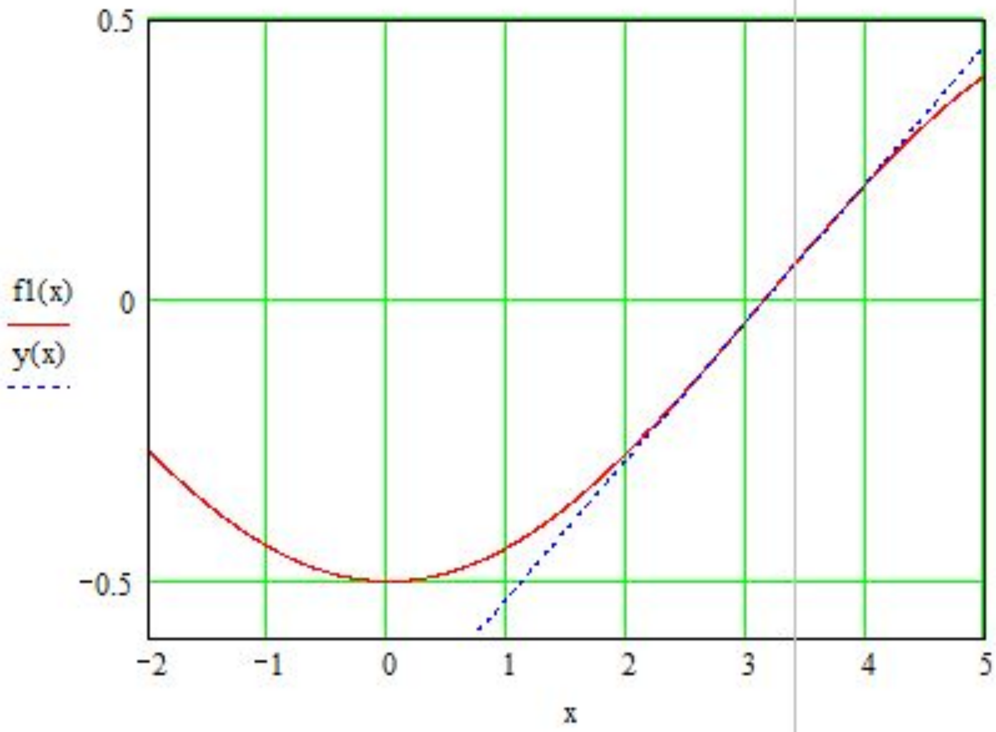
Имеем

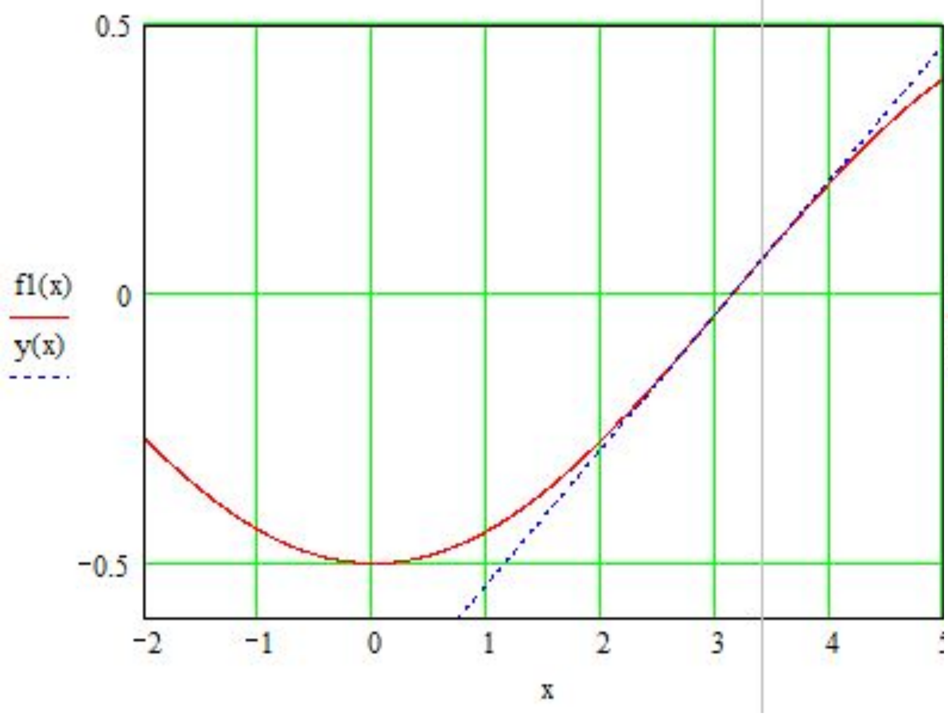
$$f' = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x\right), \qquad f'' = \frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{2}x\right).$$

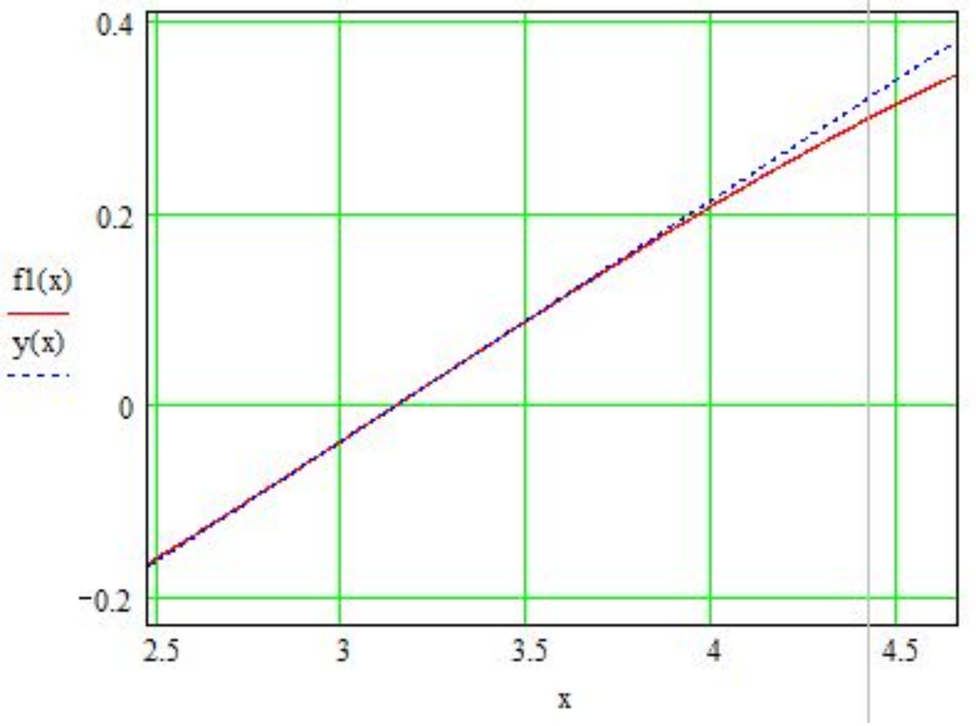
1. $f'(x_0) = -0{,}439$, $|f'| \geq \varepsilon$, поэтому продолжаем вычисления
   $f'' = 0{,}12$, $x_1 = 1 - (-0{,}439/0.12) = 4{,}658$.
2. $f'(x_1) = 0{,}344$, $|f'| \geq \varepsilon$, продолжаем вычисления
   $f'' = 0.182$, $x_2 = 2{,}786$.
3. $f'(x_2) = -0{,}093$, $|f'| \geq \varepsilon$, продолжаем вычисления
   $f'' = 0{,}246$, $x_3 = 2{,}786 - (-0{,}093/0.246) =$ **3,146.**
4. $\boldsymbol{f'(x_3) = 0{,}0011}$, $|f'| \leq \varepsilon$.


0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
f1(x)
y(x)
−2
−1
0
1
2
3
4
5


0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
f1(x)
y(x)
−2
−1
0
1
2
3
4
5
x


0.5
0
−0.5
f1(x)
y(x)
−2
−1
0
1
2
3
4
5
x





Точность	Кол-во вычислений f’
$1{,}3\cdot10^{-2}$	5
$1{,}3\cdot10^{-3}$	5
$1{,}3\cdot10^{-3}$	6

Пример №2

$$f = -\sin(x^5) + 1$$

Выберем x_0 = 1.2 и найдем точку минимума для производной с погрешностью ε=8,233·10^{-2}.

$$f' = -5x^4\cos(x^5), \quad f'' = 25x^8\sin(x^5) - 20x^3\cos(x^5)$$

1. $f'(1,2)$ = 8.233, l $f'(1,25)$l ≥ ε.

$f''(1,25)$ = 92,779

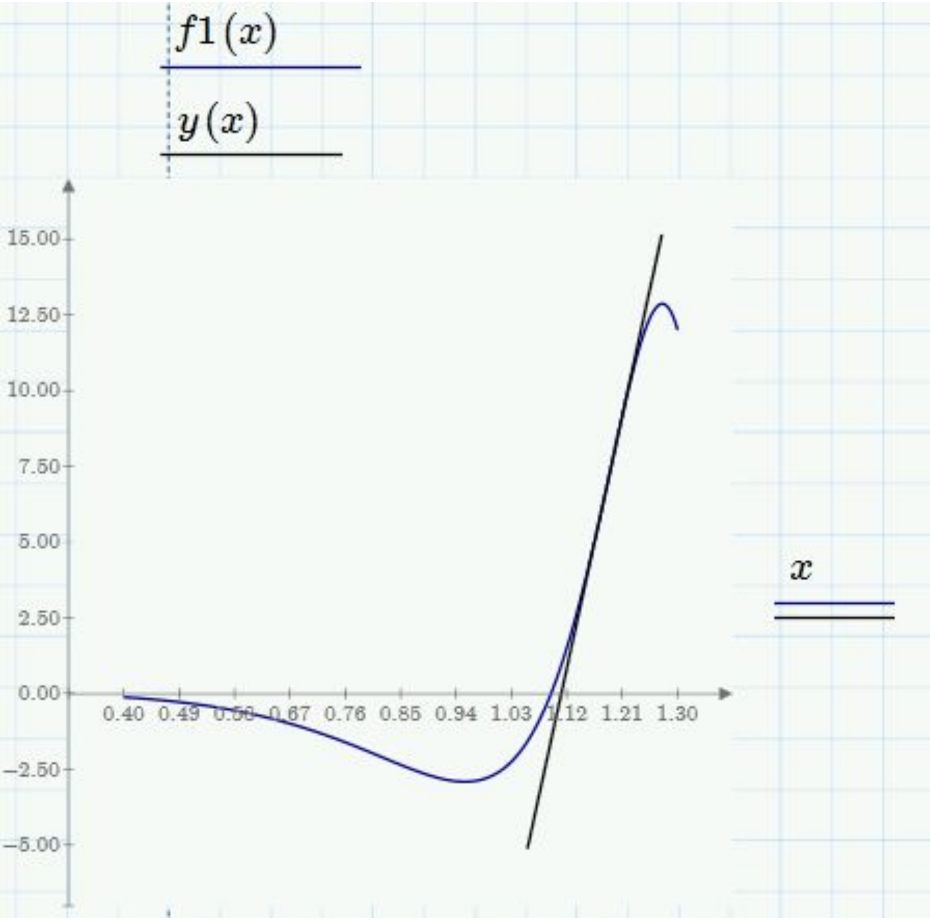
x_1 = 1,2 - (8,233)/(92,779) = 1,111

2. $f'(1,111)$ =0,926, l $f'(1,017)$l ≥ ε

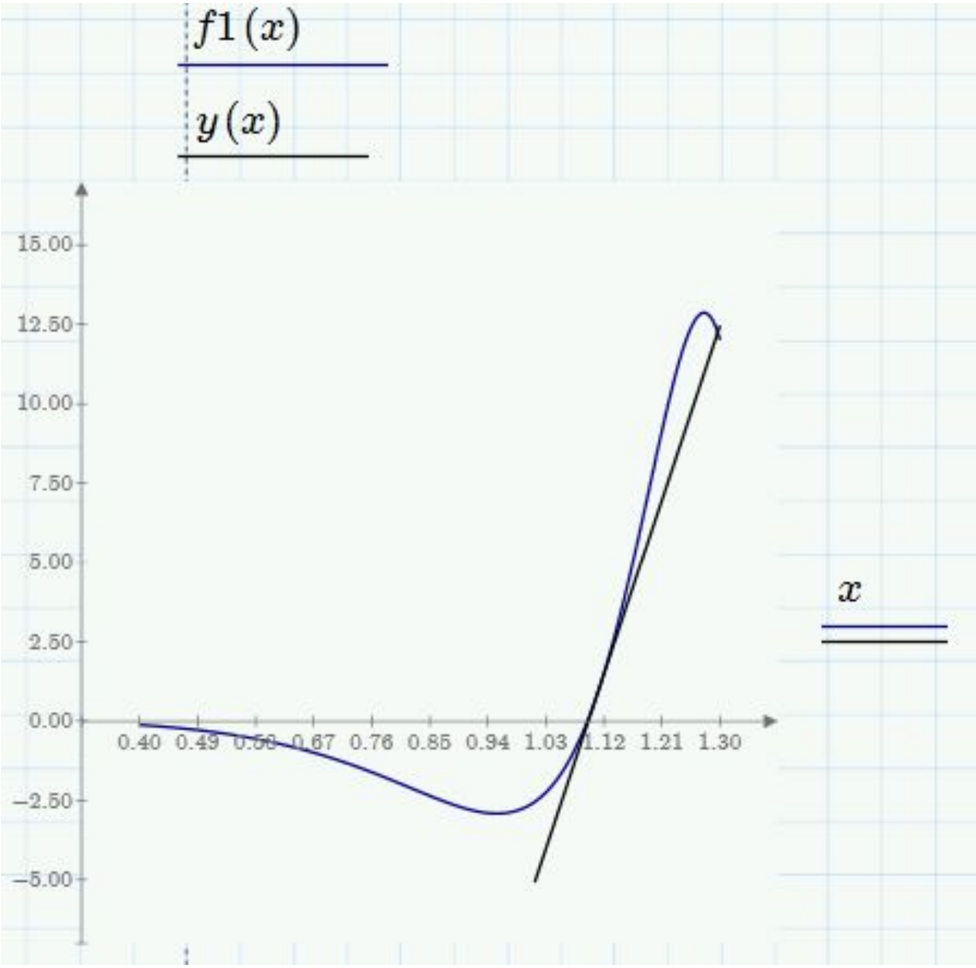
$f''(1,017)$ = 60,934

x_2 = **1,0958**

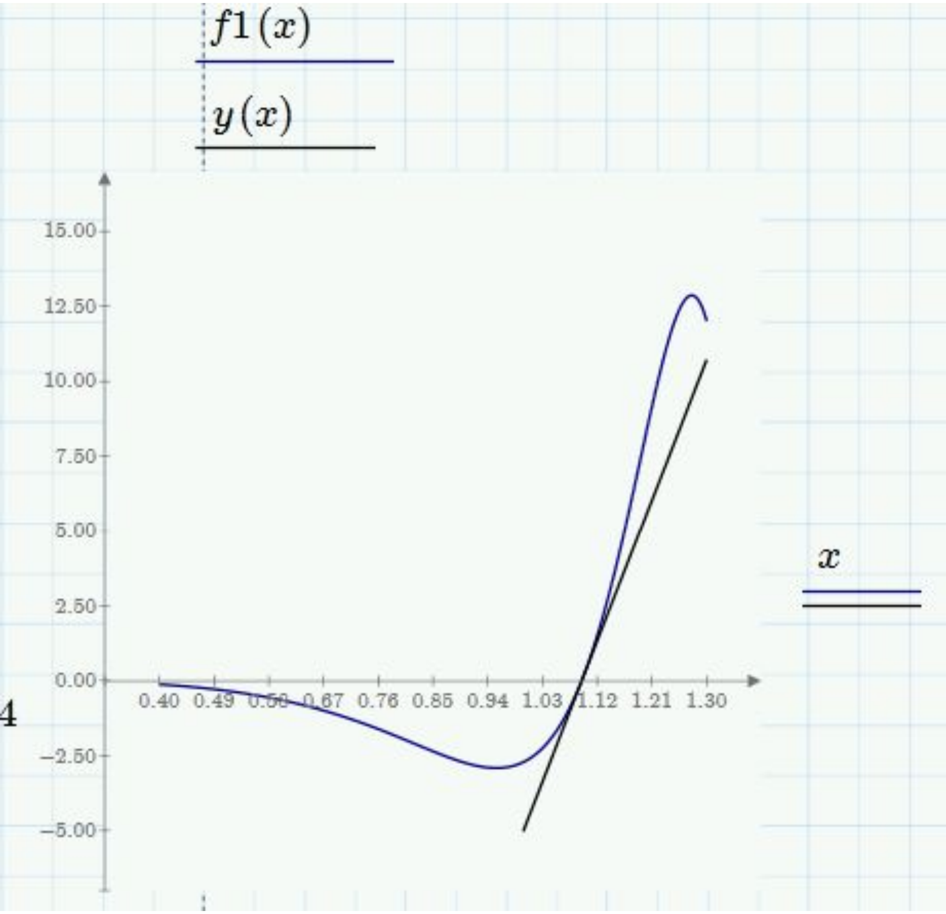
3. **$f'(1,0958)$ = 0,0664**, l $f'(1,176)$l ≤ ε



f1(x)
y(x)
15.00
12.50
10.00
7.50
5.00
2.50
0.00
−2.50
−5.00
0.40 0.49 0.58 0.67 0.76 0.85 0.94 1.03 1.12 1.21 1.30
x



f1(x)
y(x)
15.00
12.50
10.00
7.50
5.00
2.50
0.00
−2.50
−5.00
0.40 0.49 0.58 0.67 0.76 0.85 0.94 1.03 1.12 1.21 1.30
x

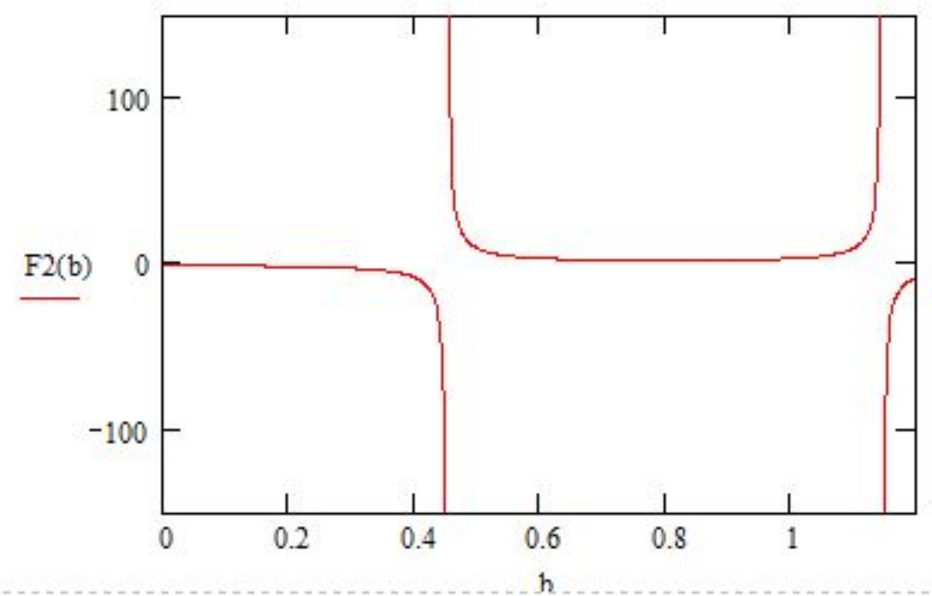


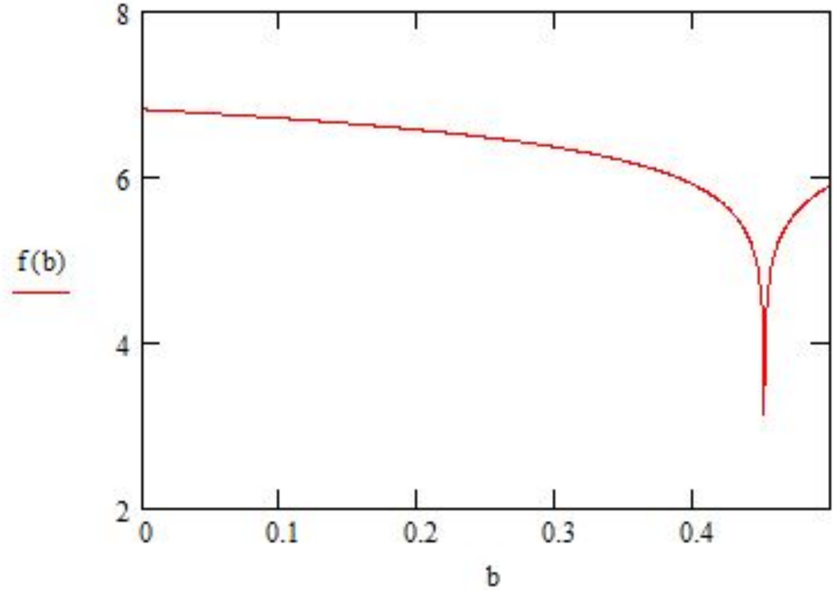
Точность	Кол-во вычислений f’
$8{,}233\cdot10^{-2}$	3
$8{,}233\cdot10^{-3}$	4
$8{,}233\cdot10^{-4}$	4

Пример №3

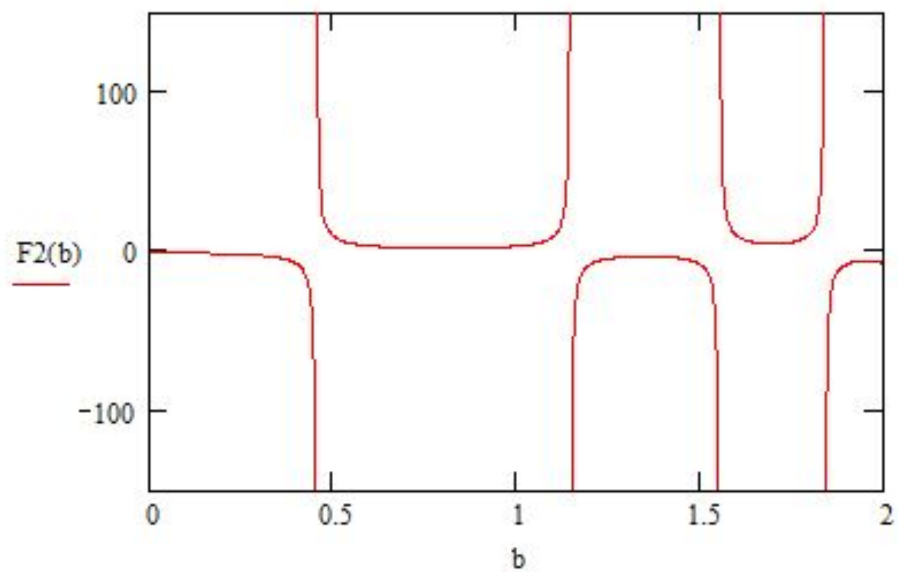
$$f = -log|\tan(e^x)| + 7$$

$$f' = \frac{-1}{\tan(\exp x)}[1 + (\tan(expx))^2]\frac{\exp(x)}{ln10}$$





8
6
4
2
f(b)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
b



100
0
-100
F2(b)
0
0.5
1
1.5
2
b

Пример №4

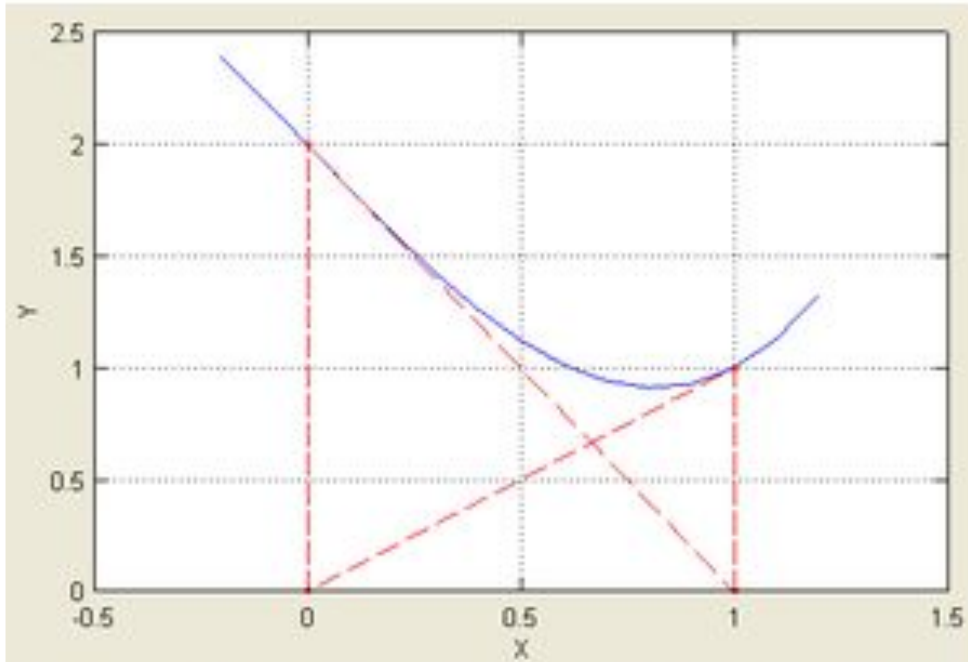


Иллюстрация расхождения метода Ньютона

Выводы:

1. Недостатки метода:
  - Малая область сходимости
  - Чувствителен к выбору начальной точки

2. Преимущества метода:
  - Быстрая сходимость