

Методы анализа КС на РС

Задачи.

Основные методы.

Многозначная логика.

Введение

Анализ логических схем можно рассматривать как процедуру выявления рисков сбоя из-за различного вида состязаний сигналов (процедуру **оценки функциональной устойчивости схем**). Сравним существующие методы анализа. Для этого **оценим** в самом общем случае **сложность анализа схем на риск сбоя**.

Если на вход комбинационной схемы подается n переменных, то на нем могут действовать 2^n наборов, от каждого из которых может осуществляться переход к $2^n - 1$ набору, то есть всего будет существовать $2^n(2^n - 1)$ переходов. При $n = 4$ число переходов приблизительно представляется как 2^{2n} .

Время анализа: количество переменных $n = 64$; ЭВМ способна проанализировать один переход между двумя наборами за 1 мкс. Время анализа в данном случае будет составлять $10^{-6} 2^{128}$ секунд или приблизительно 10^{25} лет.

Методы анализа КС на риски сбоя

Широкое распространение получили следующие методы:

- - использование **временных диаграмм**, в том числе асинхронное моделирование на их основе ;
- - графический **метод Хаффмена** ;
- - использование **многозначной логики**, для которой, как и для булевой алгебры, справедливы принципы ассоциативности и коммутативности;
- - использование **двоичной алгебры**;
- - получают развитие методы, основанные на аппарате **дифференциальных булевых уравнений**;
-

Методы анализа КС на риски сбоя

- **Временные диаграммы** являются эффективным средством анализа переходных процессов в цифровых схемах. Временные диаграммы являются основой при выполнении асинхронного моделирования, однако этот метод требует представления схемы по многоярусной структуре, поэтому не всегда выявляет риски сбоя.
- **Графический метод Хаффмена** разработан для анализа схем с небольшим числом переменных. Анализ проводится по картам Карно и графам переходов наборов. Однако с ростом числа переменных, от которых зависит функция алгебры логики, этот метод становится практически неприемлемым из-за графической громоздкости.

Методы анализа КС на риски сбоя

- Методы *многозначной логики* основаны на использовании кроме значений **0** и **1** булевой алгебры различных представлений событийных сигналов:
- - при *трехзначном моделировании* для представления значений величин сигналов берется множество $L = \{0, 1/2, 1\}$, где **0** и **1** интерпретируются так же, как и в булевой алгебре, а **1/2** используется для представления событийного (переходного) процесса. Значение **1/2** воспринимается логическим элементом либо как **0**, либо как **1**, то есть если некоторый сигнал изменяет свое значение, то в течение переходного процесса значение сигнала может восприниматься как **0** или как **1**, поэтому при моделировании оно обозначается как **1/2**, причем это обозначение надо рассматривать как единый символ;
- - *четырёхзначная модель* (алгебра Поста): **0**, переходы **01** и **10**, **1**;

Методы анализа КС на риски сбоя

- - **восьмизначная модель**: 0, 1, чисто алгоритмические переходы 01 и 10, которые обозначаются специальными символами “+” и “-” соответственно, статические риски сбоя S_0 и S_1 , динамические риски сбоя D_+ и D_- ;
- - **девятизначная модель**: к символам восьмизначной модели добавляется символ “неопределенное значение”, под которым понимают случайное значение выхода RS – триггера, когда на его входах совершается переход от запрещенного набора к набору, соответствующему режиму хранения. Этот метод применяется для анализа на риски сбоя схем с памятью или с обратными связями.
- Все методы многозначного моделирования достаточно сложны для ручного применения и рассчитаны в основном для проведения анализа схем на ЭВМ. Для **ручного применения** используют методы трехзначного и восьмизначного моделирования и только для сравнительно простых схем.

Методы анализа КС на риски сбоя

- Особенностью метода, использующего **двоичную алгебру**, является возможность определения не только факта наличия рисков сбоя в схеме на заданных входных переходах, но и *вычисления количества возможных ложных переходов на выходах схемы.*
- В методах, основанных на **аппарате дифференциальных булевых уравнений**, в булевы функции непосредственно вводится дискретная временная функция, а изменение булевых функций во времени оценивается с помощью *производной функции по времени.* Алгоритм выполнения анализа схем с помощью этого метода достаточно сложен, но позволяет выявлять соотношения задержек в состояющихся цепях, которые определяют наличие или отсутствие сбоя, то есть возможно получение рекомендаций для корректировки влияния соединений.

Метод трехзначного моделирования

- *Так как логическая функция задается для трехзначного моделирования в виде системы булевых уравнений, необходимо определить троичные функции выходов основных булевых элементов НЕ, И, ИЛИ и “сумма по модулю 2”*
- *Трехзначные функции определяются на множестве L так:*

$$\bar{x} = 1 - x; \quad x_1 x_0 = \min(x_1, x_0); \quad x_1 + x_0 = \max(x_1, x_0)$$

- *В табл. приведены выходные сигналы для основных логических элементов, на входах которых действуют трехзначные сигналы.*

Метод трехзначного моделирования

НЕ		у
х	0	1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	1	0

И		х₀		
		0	$\frac{1}{2}$	1
х₁	0	0	0	0
	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
		0	1	1

Метод трехзначного моделирования

ИЛИ		x_0		
		0	$1/2$	1
x_1	0	0	$1/2$	1
	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1
	1	1	1	1

m2		x_0		
		0	$1/2$	1
x_1	0	0	$1/2$	1
	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
	1	1	$1/2$	0

Метод трехзначного моделирования

- Пусть на схему, имеющую n входов, последовательно подаются два входных набора $X_1 = a_{n-1}, \dots, a_i, \dots, a_0$ и $X_2 = b_{n-1}, \dots, b_i, \dots, b_0$. Тогда переходный вектор X_1/X_2 имеет следующий вид: $X_1/X_2 = c_{n-1}, \dots, c_i, \dots, c_0$, где $c_i = 1/2$, если $a_i \neq b_i$ и $c_i = a_i$, если $a_i = b_i$ при $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.
- Если при моделировании для некоторых последовательных наборов X_1 и X_2 зафиксировано, что $y(X_1) = y(X_2)$, а $y(X_1/X_2) = 1/2$, то схема содержит статический риск сбоя.
- Проанализируем работу схемы, которая реализует функцию:

$$y = x_3 \bar{x}_2 + x_3 \bar{x}_0 + \bar{x}_3 x_2 x_0 + \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0$$

- Для следующих переходов:

$$14 \rightarrow 8; 1 \rightarrow 10; 0 \rightarrow 13; 12 \rightarrow 1; 6 \rightarrow 8$$

Метод трехзначного моделирования

Наборы	Входные переменные				Импlicants				y
	x_3	x_2	x_1	x_0	$x_3 \bar{x}_2$	$x_3 \bar{x}_0$	$\bar{x}_3 x_2 x_0$	$\bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0$	
14	1	1	1	0	0	1	0	0	1
$14/8$	1	$1/2$	$1/2$	0	$1/2$	1	0	$1/2$	1
8	1	0	0	0	1	1	0	0	1

1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$1/10$	$1/2$	0	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	0	$1/2$	$1/2$
10	1	0	1	0	1	1	0	1	1

Метод трехзначного моделирования

Наборы	Входные переменные				Импликаныты				y
	x_3	x_2	x_1	x_0	$x_3 \bar{x}_2$	$x_3 \bar{x}_0$	$\bar{x}_3 x_2 x_0$	$\bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0$	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$0_{/13}$	$1/2$	$1/2$	0	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	0	$1/2$
13	1	1	0	1	0	0	0	0	0
12	1	1	0	0	0	1	0	0	1
$12_{/1}$	$1/2$	$1/2$	0	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	0	$1/2$
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Метод трехзначного моделирования

Наборы	Входные переменные				Импликаныты				у
	x_3	x_2	x_1	x_0	$x_3 \bar{x}_2$	$x_3 \bar{x}_0$	$\bar{x}_3 x_2 x_0$	$\bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0$	

6	0	1	1	0	0	0	0	0	0
$\frac{6}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
8	1	0	0	0	1	1	0	0	1

1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
10	1	0	1	0	1	1	0	1	1

Метод восьмизначного моделирования

- При восьмизначном моделировании для представления значений величин сигналов берется множ $L = \{1, 0, +, -, S_1, S_0, D_+, D_-\}$

HE		y
x	1	0
	0	1
	+	-
	-	+
	S ₁	S ₀
	S ₀	S ₁
	D ₊	D ₋
	D ₋	D ₊

И		x ₀							
		1	0	+	-	S ₁	S ₀	D ₊	D ₋
x ₁	1	1	0	+	-	S ₁	S ₀	D ₊	D ₋
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	+	+	0	+	S ₀	D ₊	S ₀	D ₊	S ₀
	-	-	0	S ₀	-	D ₋	S ₀	S ₀	D ₋
	S ₁	S ₁	0	D ₊	D ₋	S ₁	S ₀	D ₊	D ₋
	S ₀	S ₀	0	S ₀	S ₀	S ₀	S ₀	S ₀	S ₀
	D ₊	D ₊	0	D ₊	S ₀	D ₊	S ₀	D ₊	S ₀
	D ₋	D ₋	0	S ₀	D ₋	D ₋	S ₀	S ₀	D ₋

Метод восьмизначного моделирования

- При восьмизначном моделировании для представления значений величин сигналов берется множество $L = \{1, 0, +, -, S_1, S_0, D_+, D_-\}$

ИЛИ		x_0							
		1	0	+	-	S_1	S_0	D_+	D_-
x_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	0	1	0	+	-	S_1	S_0	D_+	D_-
	+	1	+	+	S_1	S_1	D_+	D_+	S_1
	-	1	-	S_1	-	S_1	D_-	S_1	D_-
	S_1	1	S_1	S_1	S_1	S_1	S_1	S_1	S_1
	S_0	1	S_0	D_+	D_-	S_1	S_0	D_+	D_-
	D_+	1	D_+	D_+	S_1	S_1	D_+	D_+	S_1
	D_-	1	D_-	S_1	D_-	S_1	D_-	S_1	D_-

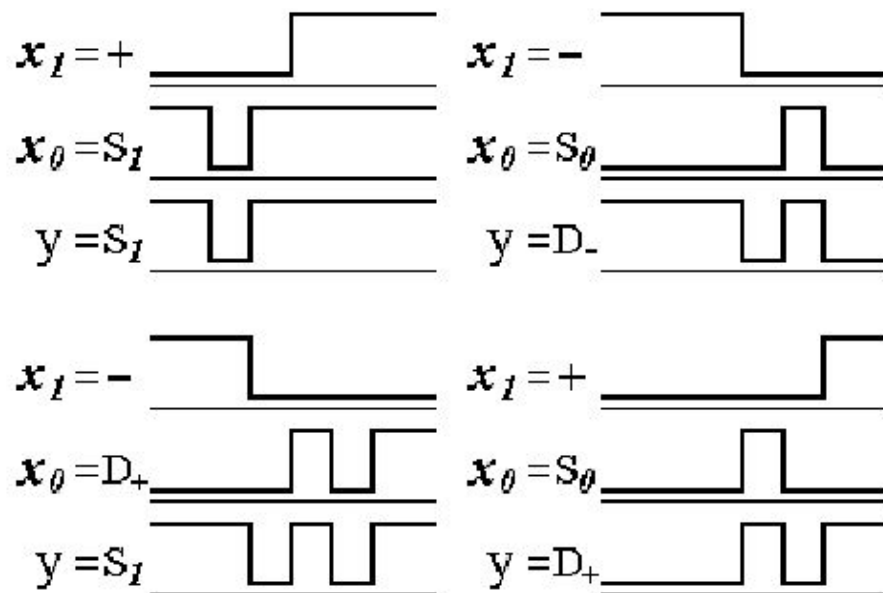
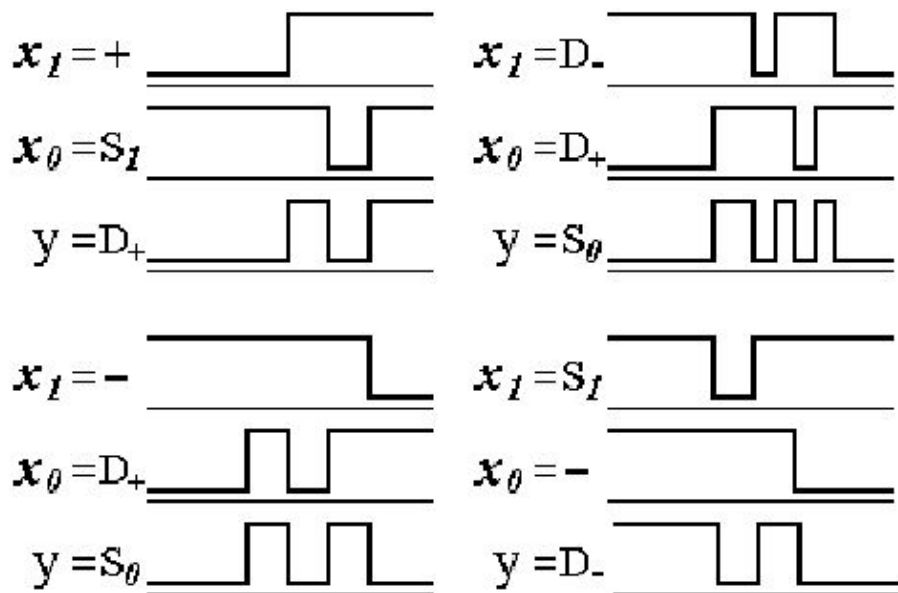
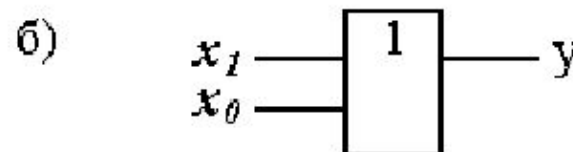
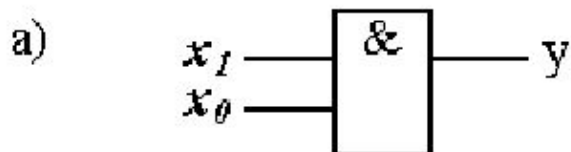
Метод восьмизначного моделирования

- При восьмизначном моделировании для представления значений величин сигналов берется множе $L = \{1, 0, +, -, S_1, S_0, D_+, D_-\}$

m2		x_0							
		1	0	+	-	S_1	S_0	D_+	D_-
x_1	1	0	1	-	+	S_0	S_1	D_-	D_+
	0	1	0	+	-	S_1	S_0	D_+	D_-
	+	-	+	S_0	S_1	D_-	D_+	S_0	S_1
	-	+	-	S_1	S_0	D_+	D_-	S_1	S_0
	S_1	S_0	S_1	D_-	D_+	S_0	S_1	D_-	D_+
	S_0	S_1	S_0	D_+	D_-	S_1	S_0	D_+	D_-
	D_+	D_-	D_+	S_0	S_1	D_-	D_+	S_0	S_1
	D_-	D_+	D_-	S_1	S_0	D_+	D_-	S_1	S_0

Метод восьмизначного моделирования

*Примеры: Несколько примеров реакции элементов **И** и **ИЛИ** на восьмизначные сигналы для наихудшего случая приведены на рис.*



Метод восьмизначного моделирования

- Снова проанализируем работу схемы, которая реализует функцию:

$$y = x_3 \bar{x}_2 + x_3 \bar{x}_0 + \bar{x}_3 x_2 x_0 + \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0$$

- Для следующих переходов:

14 → 8; 1 → 10; 0 → 13; 12 → 1; 6 → 8

Наборы	Входные переменные				Импlicants				y
	x_3	x_2	x_1	x_0	$x_3 \bar{x}_2$	$x_3 \bar{x}_0$	$\bar{x}_3 x_2 x_0$	$\bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0$	
14	1	1	1	0	0	1	0	0	1
$14/8$	1	-	-	0	+	1	0	S_0	1
8	1	0	0	0	1	1	0	0	1

Метод восьмизначного моделирования

Наборы	Входные переменные				Импликаны				y
	x_3	x_2	x_1	x_0	$x_3 \bar{x}_2$	$x_3 \bar{x}_0$	$\bar{x}_3 x_2 x_0$	$\bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0$	

1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$1/_{10}$	+	0	+	-	+	+	0	+	+
10	1	0	1	0	1	1	0	1	1

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$0/_{13}$	+	+	0	+	S_0	S_0	S_0	0	S_0
13	1	1	0	1	0	0	0	0	0

Метод восьмизначного моделирования

Наборы	Входные переменные				Импlicants				y
	x_3	x_2	x_1	x_0	$x_3 \bar{x}_2$	$x_3 \bar{x}_0$	$\bar{x}_3 x_2 x_0$	$\bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0$	
12	1	1	0	0	0	1	0	0	1
$12/1$	-	-	0	+	S ₀	-	S ₀	0	D ₋
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	0	1	1	0	0	0	0	0	0
$6/8$	+	-	-	0	+	+	0	S ₀	D ₊
8	1	0	0	0	1	1	0	0	1

Достоинства метода многозначной логики

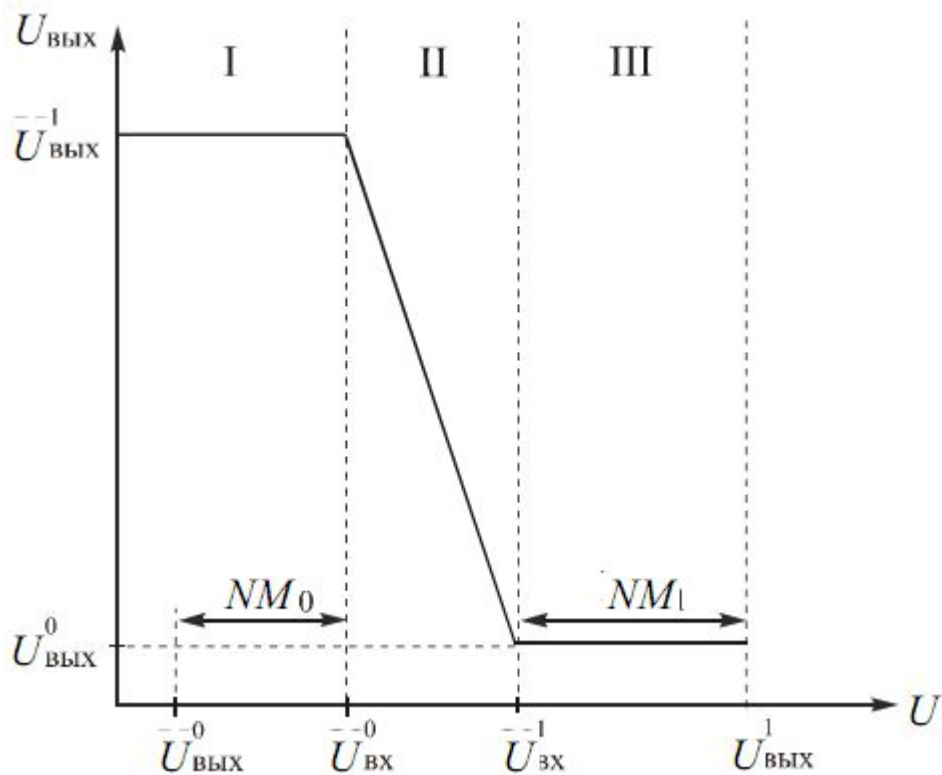
!!! Рассмотренный метод восьмизначной логики нагляден, удобен, применим и для ручного, и для машинного анализа.

Спасибо за внимание!!!

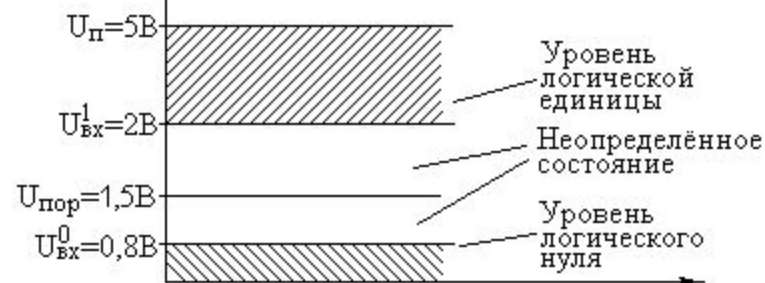


Реальные логические элементы

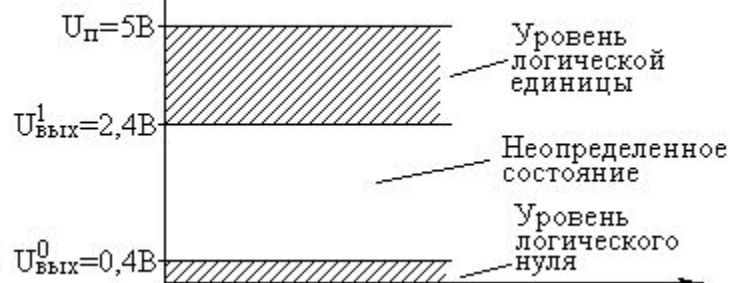
Передающая функция ЛЭ



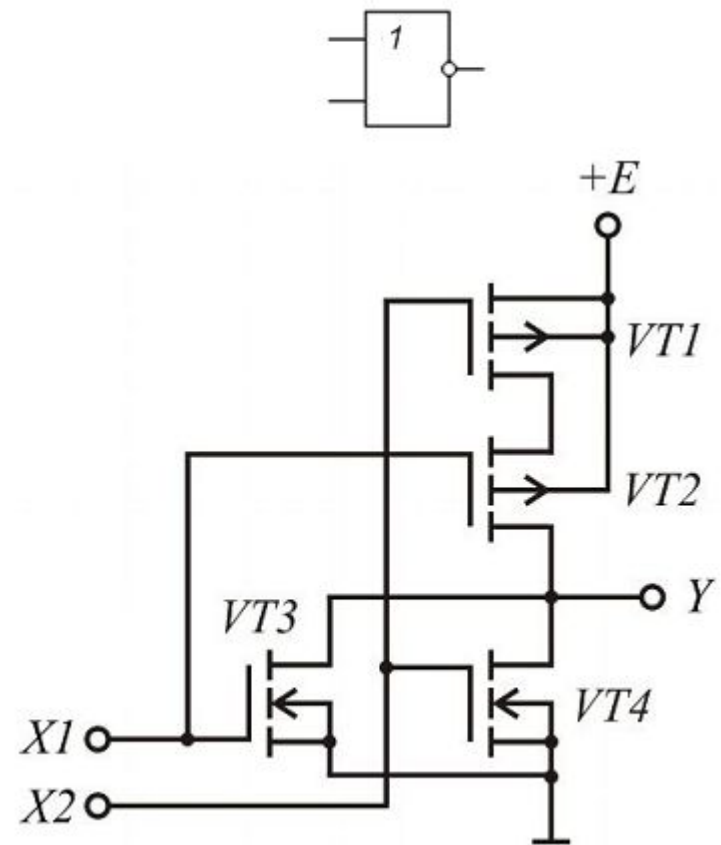
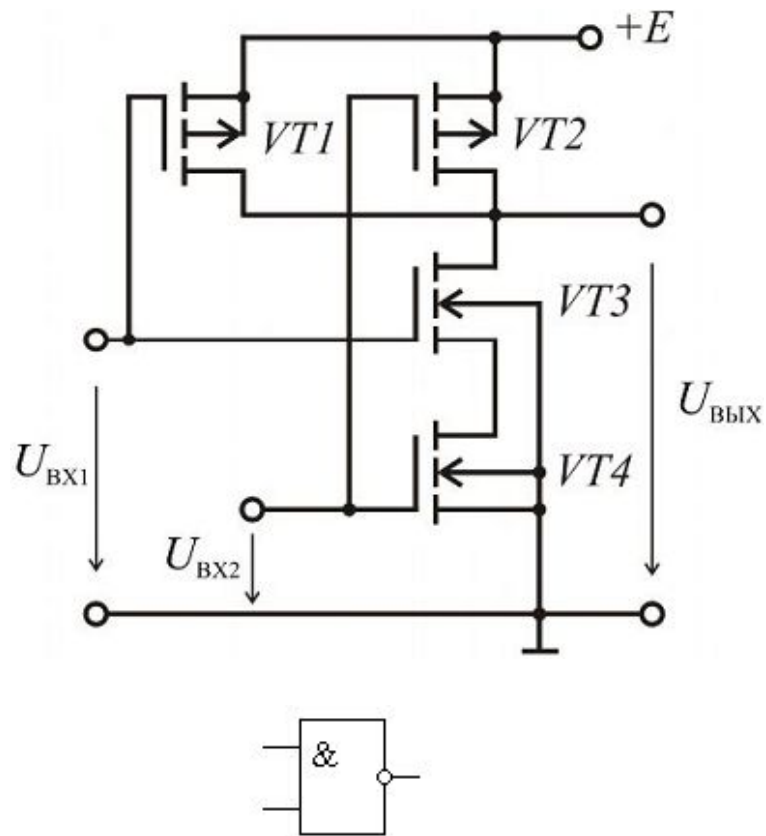
Уровни на входе ЛЭ



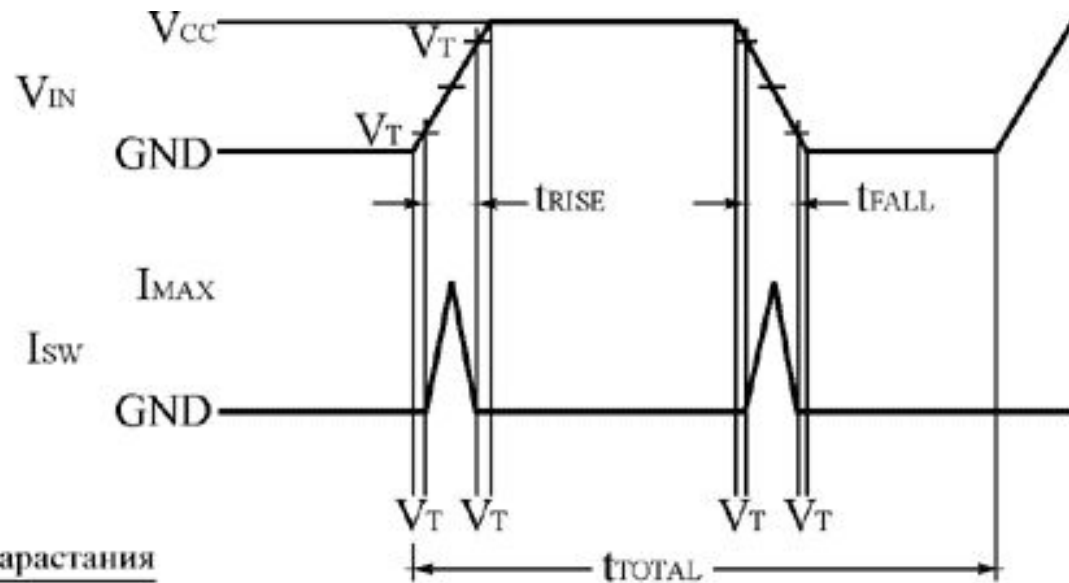
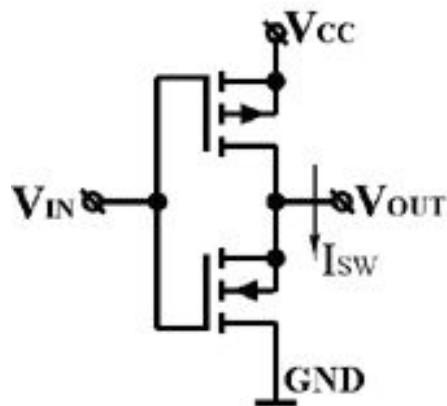
Уровни на выходе ЛЭ



Реальные логические элементы



Реальные логические элементы



Мощность VI определяется:

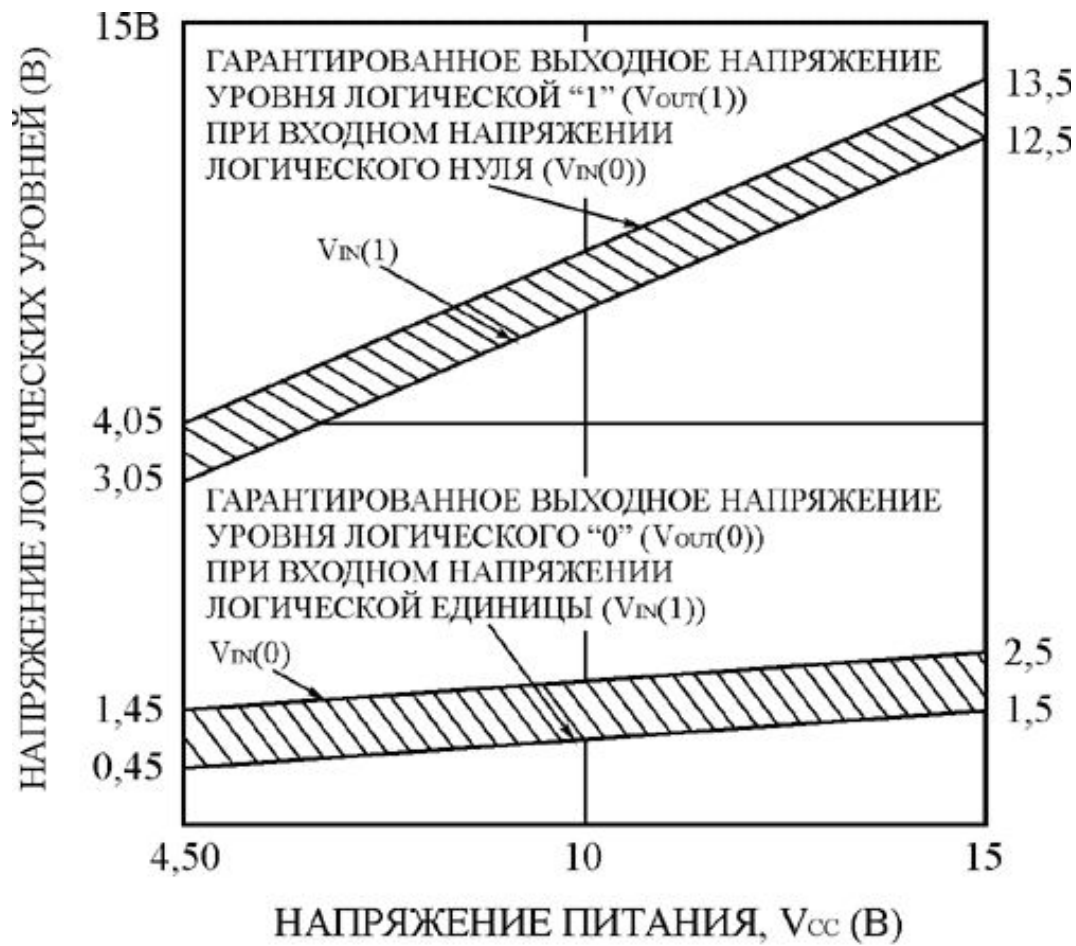
$$P_{VI} = V_{CC} \times \frac{1}{2} I_{MAX} \times \frac{\text{Время нарастания}}{\text{Период}}$$

$$\frac{\text{Время нарастания}}{\text{Период}} = \frac{V_{CC} - 2V_T}{V_{CC}} \times \frac{t_{RISE} + t_{FALL}}{t_{TOTAL}}, \text{ где } \frac{1}{t_{TOTAL}} = \text{ЧАСТОТА}$$

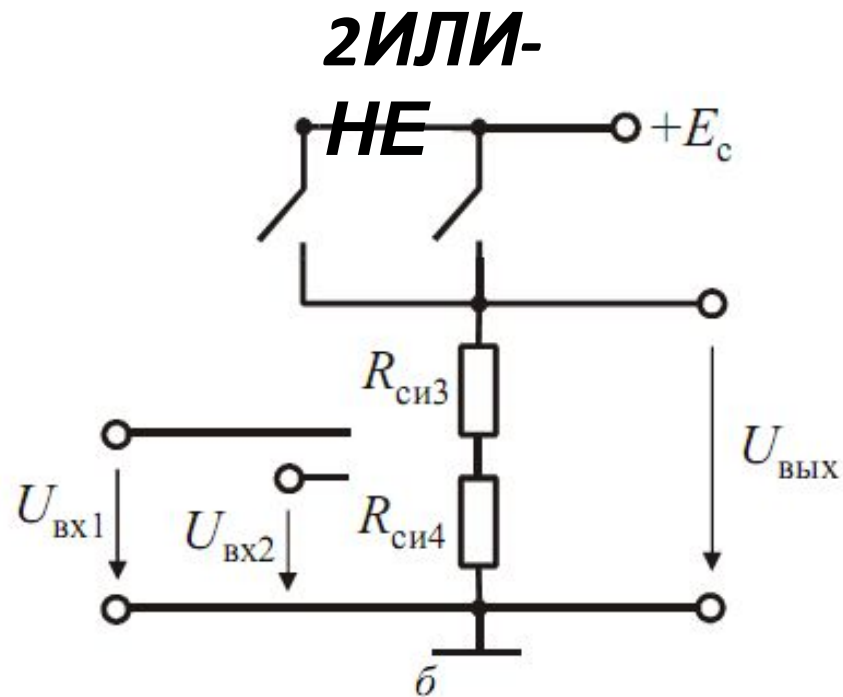
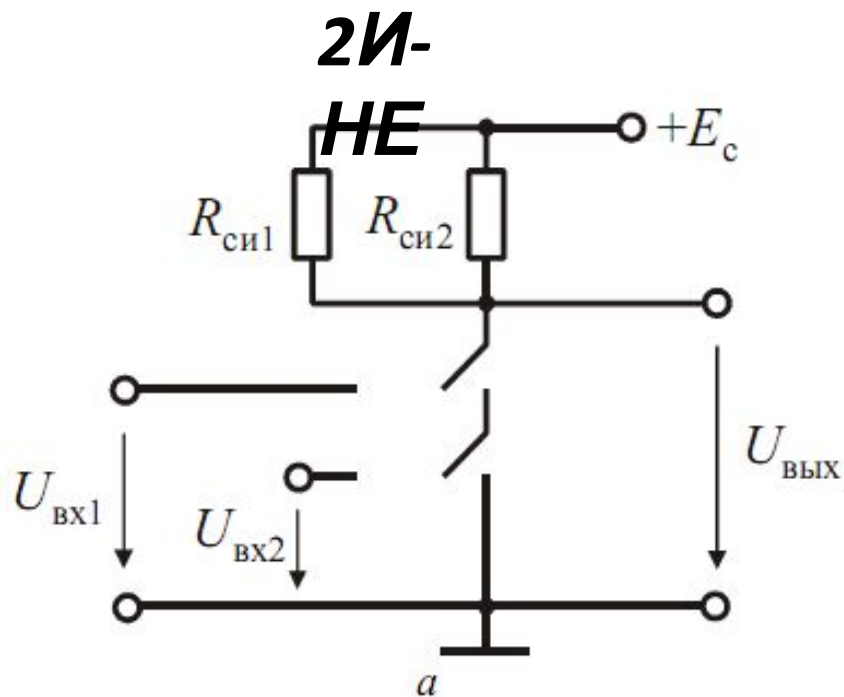
$$P_{VI} = \frac{1}{2} (V_{CC} - 2V_T) I_{CC \text{ MAX}} (t_{RISE} + t_{FALL}) \times \text{ЧАСТОТУ}$$

... Мощность, рассеиваемая в моменты переключения

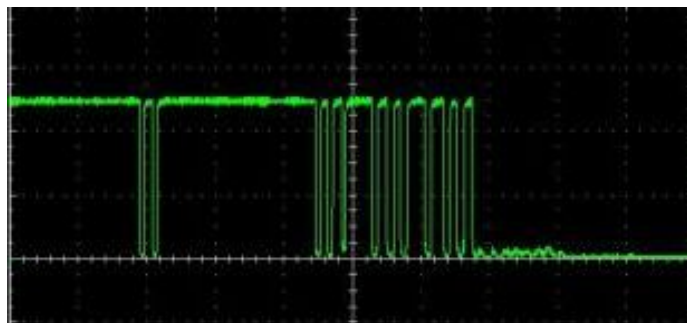
Реальные логические элементы



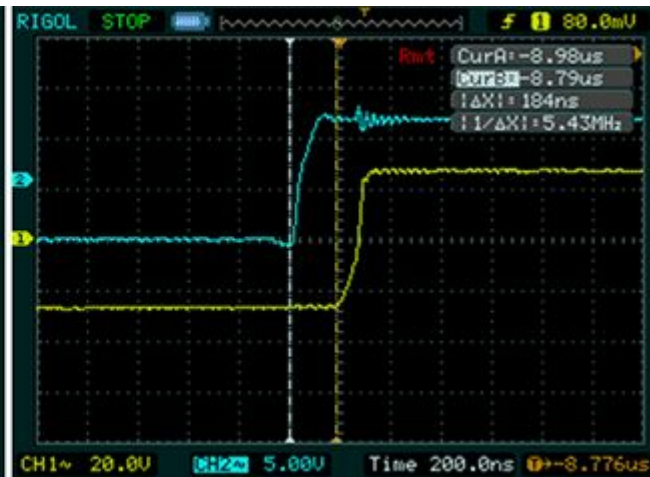
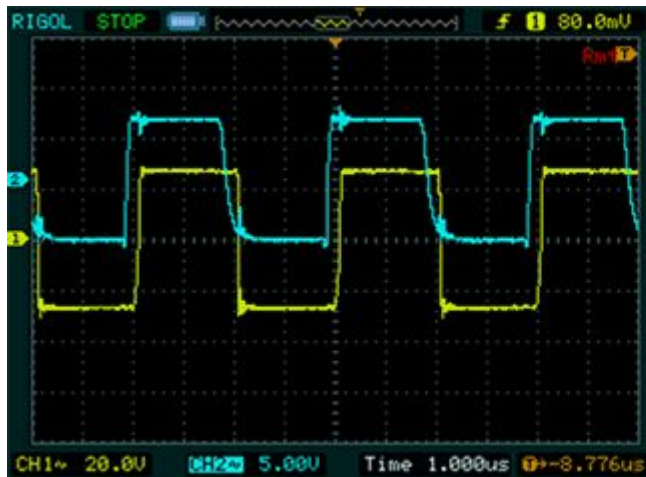
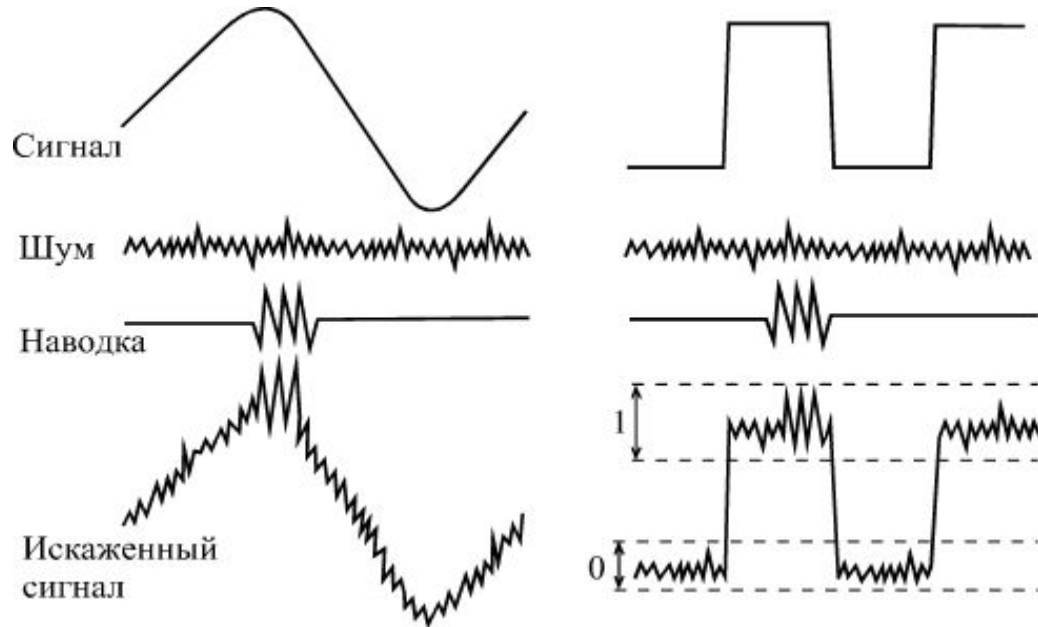
Логические элементы на ЭМ переключателях



«Дребезг»
контактов:
(D_)



Реальные логические элементы



Риски сбоя в комбинационных

схемах

Определения:

Риск сбоя - возможность появления на выходе цифрового устройства сигнала, не предусмотренного алгоритмом его работы и могущего привести к *ложному срабатыванию*.

РИСК СБОЯ □ ЭТО НАИХУДШИЙ СЛУЧАЙ!!

Функциональная устойчивость определяется *стабильностью реализации цифровым устройством заданного алгоритма работы* при наличии разброса задержек выполнения операций в логических элементах, задержек сигналов в линиях связи и эл электромагнитных наводок паразитных сигналов. Синоним “функциональной устойчивости” - ***алгоритмическая устойчивость***.

Риски сбоя в комбинационных

схемах

Определения:

Состязания (гонки) сигналов - процесс распространения сигналов в различных цепях цифрового устройства при существовании разбросов временных задержек этих цепей.

Цепь - совокупность логических и других элементов и линий связи между ними.

Алгоритмический переход - изменение сигнала на выходе какой-либо схемы, предусмотренное алгоритмом ее работы.

Неалгоритмический переход - изменение выходного сигнала, не предусмотренное алгоритмом ее работы.

Опасные состязания - которые могут привести в цифровой схеме к неалгоритмическому переходу при заданных условиях ее работы.

Риски сбоя в комбинационных схемах

Определения:

Неопасные состязания – которые не могут привести в схеме к неалгоритмическому переходу при заданных условиях ее работы.

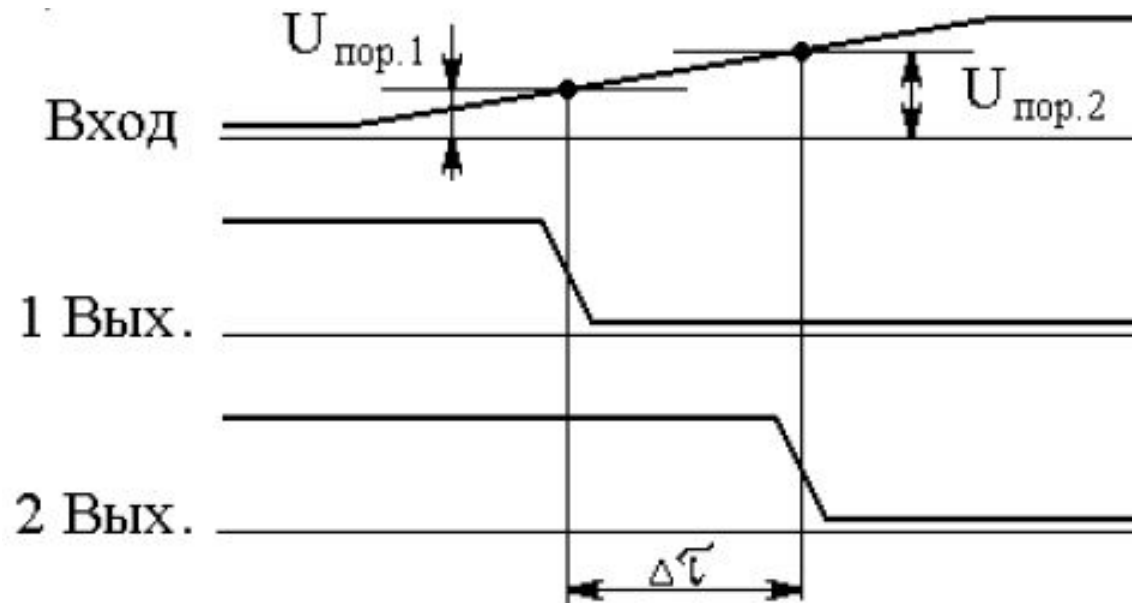
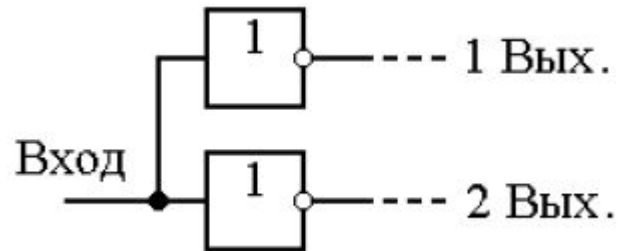
Схема, свободная от влияния опасных состязаний -

цифровая структура, в которой неалгоритмический переход, возникший в части схемы из-за опасных состязаний, не изменяет алгоритма работы схемы в целом при заданных условиях ее работы.

Опасными состязаниями (гонками) по входу – называют неодновременное переключение логических элементов, при одновременном изменении сигнала на их входах, связанное с тем, что логические элементы изготовленные в различных технологических циклах имеют различные параметры. При различных пороговых входных напряжениях получаем неодновременное срабатывание логических элементов.

Риски сбоя в комбинационных схемах

Гонки по входу.



Риски сбоя в комбинационных схемах

Определения:

Изменение сигнала на каждом выходе схемы реально происходит не мгновенно, а образует некоторый сложный динамический процесс.

*Нахождение этих процессов называется **динамическим анализом** комбинационной схемы.*

***Динамический анализ** учитывает обстоятельства:*

- 1) Изменение входного набора схемы состоит из неодновременных изменений различных входных переменных, образующих этот набор. (последовательность входных наборов можно рассматривать как набор входных нулей и единиц, действующих независимо друг от друга на разных входах.*
- 2) Помимо логических элементов в схеме могут иметься специальные вспомогательные элементы – **задержки***
- 3) Каждый инерционный логический элемент в большинстве случаев можно представить в виде модели, содержащей последовательное соединение безынерционного ЛЭ с элементом задержки (иногда фильтром) на 'т'*

Риски сбоя в комбинационных схемах

Определения:

Изменение сигнала на каждом выходе схемы реально происходит не мгновенно, а образует некоторый сложный динамический процесс.

*Нахождение этих процессов называется **динамическим анализом** комбинационной схемы.*

***Динамический анализ** учитывает обстоятельства:*

- 1) Изменение входного набора схемы состоит из неодновременных изменений различных входных переменных, образующих этот набор. (последовательность входных наборов можно рассматривать как набор входных нулей и единиц, действующих независимо друг от друга на разных входах.*
- 2) Помимо логических элементов в схеме могут иметься специальные вспомогательные элементы – **задержки***
- 3) Каждый инерционный логический элемент в большинстве случаев можно представить в виде модели, содержащей последовательное соединение безынерционного ЛЭ с элементом задержки (иногда фильтром) на 'т'*

Риски сбоя в комбинационных

схемах

Определения:

Переключательный процесс - последовательность уровней “1” и “0” (импульсов и пауз), которая на любом конечном наблюдаемом интервале времени содержит конечное число переходов 01 и 10.

Длиной переключательного процесса называется общее число изменений сигнала в нем. Например, для процесса x_4 на рис. 2 длина равна 3.

Переключательный процесс сложный - если его длина ≥ 2 , в случае если длина ≤ 2 - **простое переключение**.

Векторный переключательный процесс считается **простым переключением**, если все его компоненты - **простые переключения, совершаемые одновременно**. В противном случае векторный процесс считается **сложным**.

Риски сбоя в комбинационных

схемах

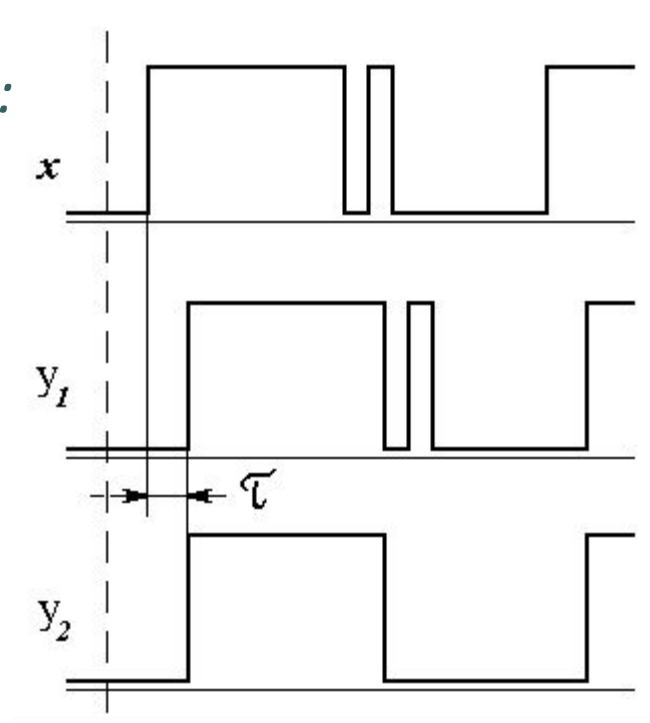
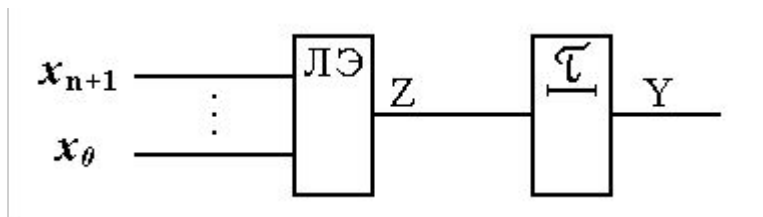
Событие - любое изменение логического сигнала, в том числе сложный переключательный процесс.

Различают два вида задержек:

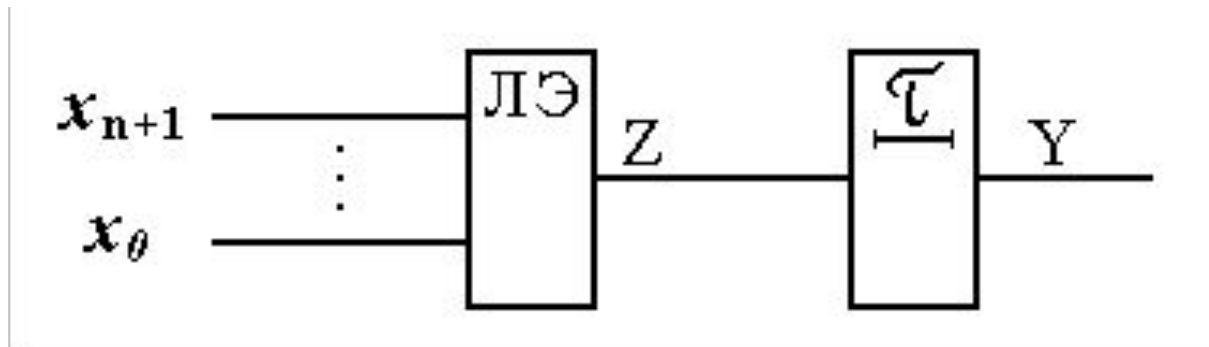
- 1) чистая задержка**, которая при подаче на вход сигнала $x(t)$ обуславливает на выходе сигнал $y(t-\tau)$, где τ – величина задержки
- 2) инерционная задержка или фильтр** - осуществляет ту же операцию, что и чистая задержка, но сверх того не пропускает на выход изменений входного сигнала, отстоящих одно от другого по времени менее чем на τ , благодаря чему процесс на выходе может изменить форму.

Риски сбоя в комбинационных схемах

Задержки, связанные с логическими элементами и линиями связи, обычно называют **паразитными задержками**. Справедливо утверждение, что **паразитные задержки** имеют компоненты как чистой, так и инерционной задержки. Различия двух видов задержек:



Риски сбоя в комбинационных схемах



Под τ подразумевается паразитная задержка. Величину τ , а также моменты изменений входных переменных схемы, называют **временными параметрами**. Очевидно, что в общем случае значение τ моделирующей задержки зависит от того, какое изменение сигнала **01** или **10** имеет место на выходе элемента, то есть $\tau = \tau_{01}$ и $\tau = \tau_{10}$. В простейшем случае $\tau_{01} = \tau_{10} = \tau$.

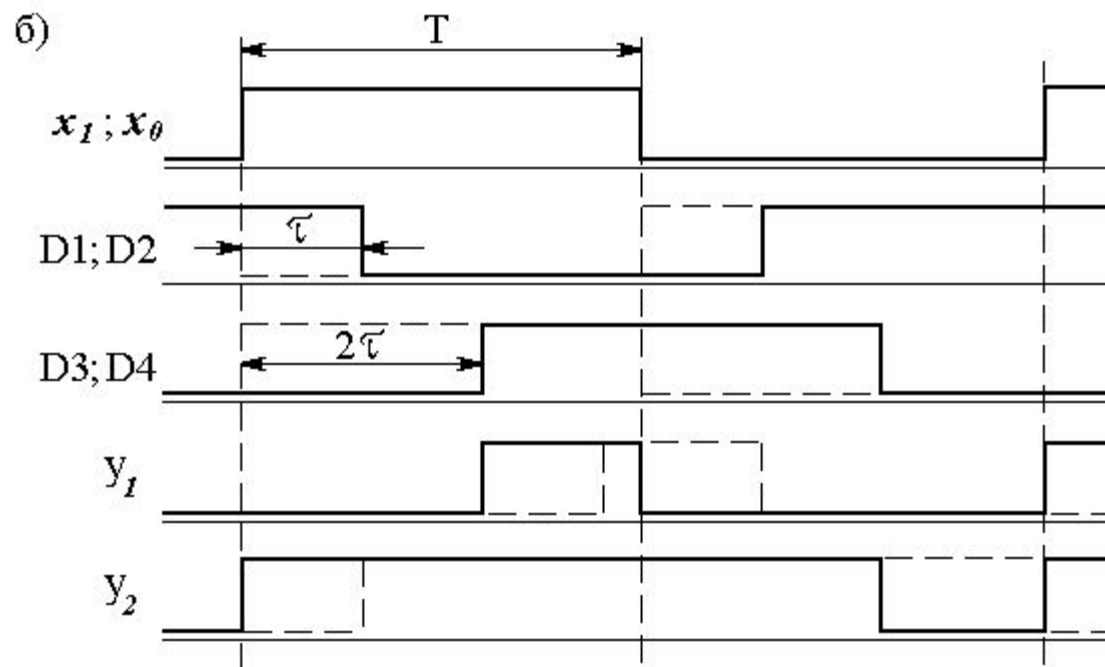
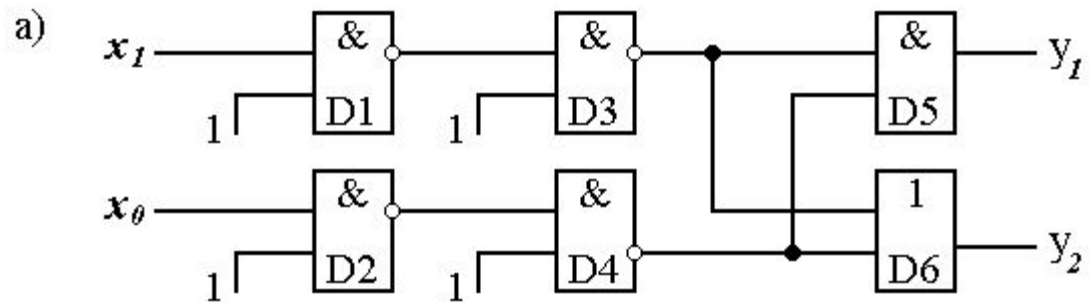
Деформирование выходных сигналов

*В различных частях комбинационной схемы в зависимости от числа последовательно включенных элементов переходный процесс после смены входного набора будет заканчиваться в разное время. Это приведет либо к **деформированию длительности выходных сигналов** либо к появлению **рисков сбоя**.*

*Если сигналы в схеме распространяются по цепочкам, задержки в которых различны, то это приводит к смещению сигналов относительно друг друга во времени. В свою очередь, это может вызвать уменьшение длительности сигнала "1" на выходе элемента **И** и увеличение - на выходе **ИЛИ**.*

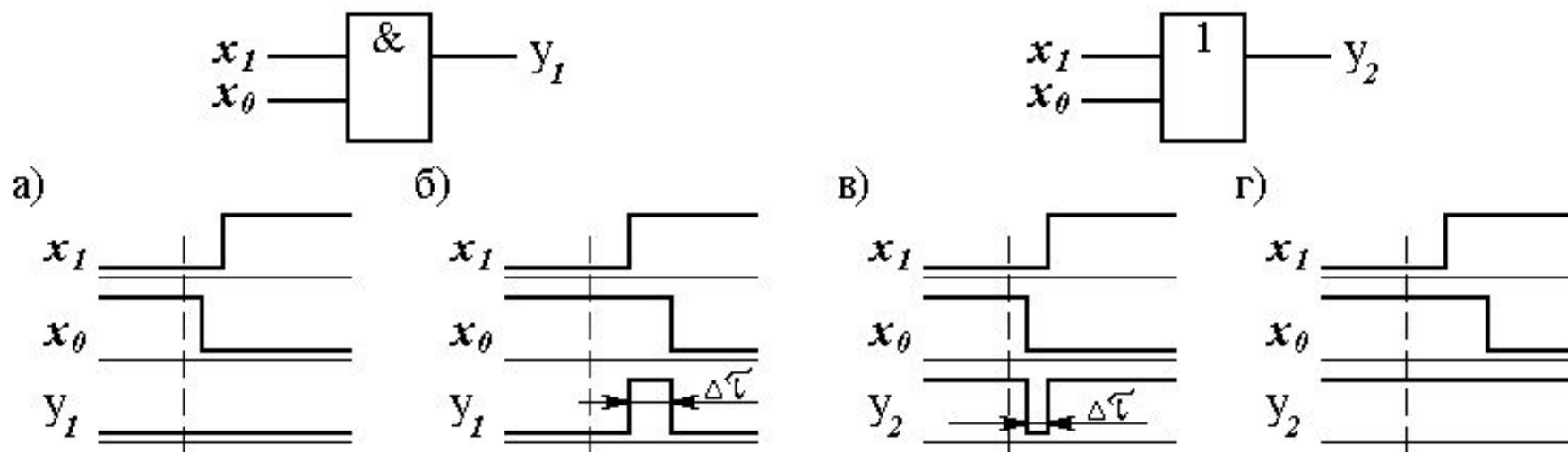
Деформирование выходного сигнала может привести к исчезновению алгоритмически верного

Деформирование выходных сигналов



Статические риски сбоя

На рис. показана работа элементов **И** и **ИЛИ** при подаче на их входы двух последовательных во времени наборов $X_1 = x_1 x_0 = 01$ и $X_2 = x_1 x_0 = 10$



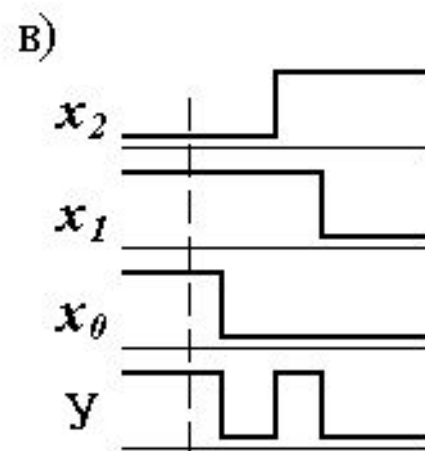
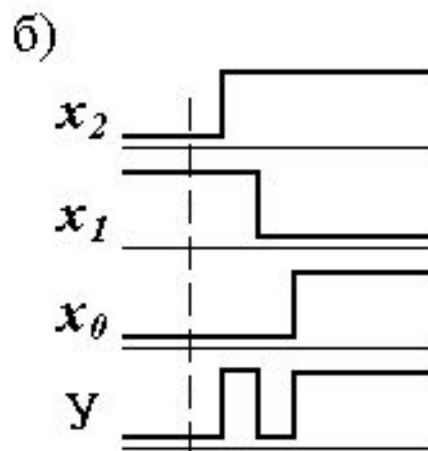
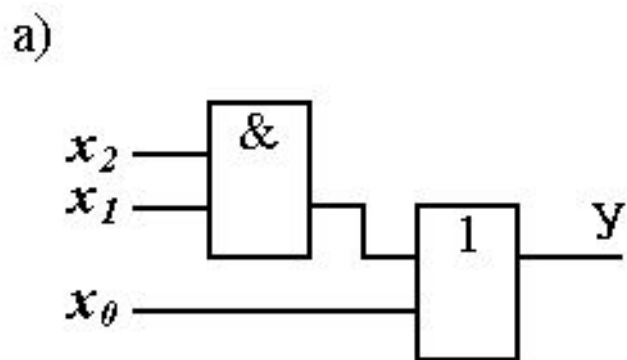
Ложные сигналы на выходе и являются **рисками сбоя**, причем видно, что они могут быть, а могут и отсутствовать.

Статические риски сбоя

*Риск сбоя называется **статическим**, если $y(X_1) = y(X_2)$, где y - булева функция. Риск сбоя называется **статическим в нуле S_0** , если $y(X_1) = y(X_2) = 0$. Риск сбоя называется **статическим в единице S_1** , если $y(X_1) = y(X_2) = 1$. На рис. б имеет место статический риск сбоя в нуле S_0 , а на рис. в - статический риск сбоя в единице S_1 .*

Динамические риски сбоя

На рис. а) приведена схема, реализующая функцию $y = x_2x_1 + x_0$. Пусть входной набор $X_1 = x_2x_1x_0 = 010$ изменится на входной набор $X_2 = x_2x_1x_0 = 101$



На рис. б) имеет место динамический риск сбоя D_+ , а на рис. в) - D_- . Наличие динамических рисков сбоя в цифровой схеме также может привести к нарушению закона ее функционирования.

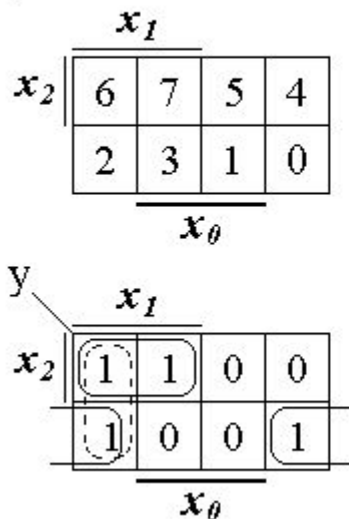
Динамические риски сбоя

*Риск сбоя называется **динамическим**, если $y(X_1) \neq y(X_2)$, где y - булева функция. Риск сбоя называется **динамическим** D_+ при переходе на выходе **01**, если $y(X_1) = 0$, а $y(X_2) = 1$. Риск сбоя называется **динамическим** D_- , если $y(X_1) = 1$, а $y(X_2) = 0$.*

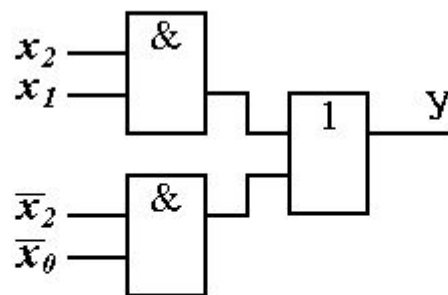
Логический риск сбоя

Рассмотрим переход от $X_1 = x_2 x_1 x_0 = 110$ к $X_2 = x_2 x_1 x_0 = 010$ для функции y , представленной картой Карно (рис. 8, а). Для нее можно записать $y = x_2 x_1 + \bar{x}_2 \bar{x}_0$.

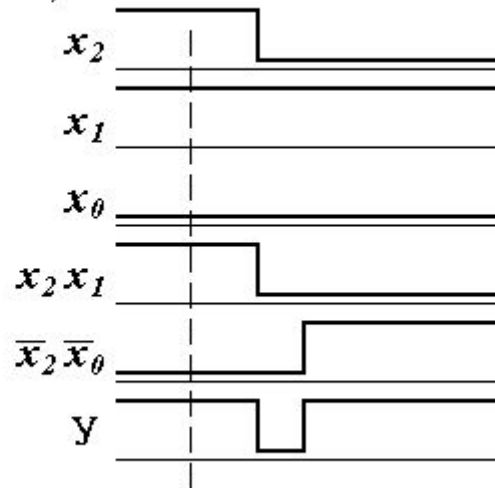
а)



б)



в)



Логический риск сбоя

Устраним риск сбоя, для этого введем дополнительный контур

$$y = x_2 x_1 + \bar{x}_2 \bar{x}_0$$

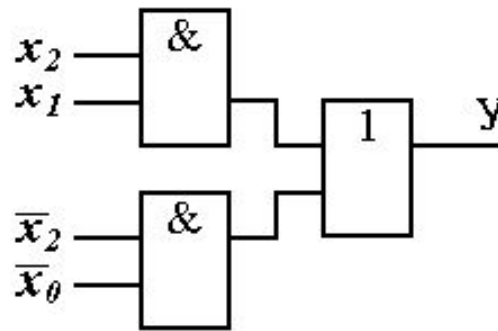
$$y = x_2 x_1 + \bar{x}_2 \bar{x}_0 + x_1 \bar{x}_0$$

а)

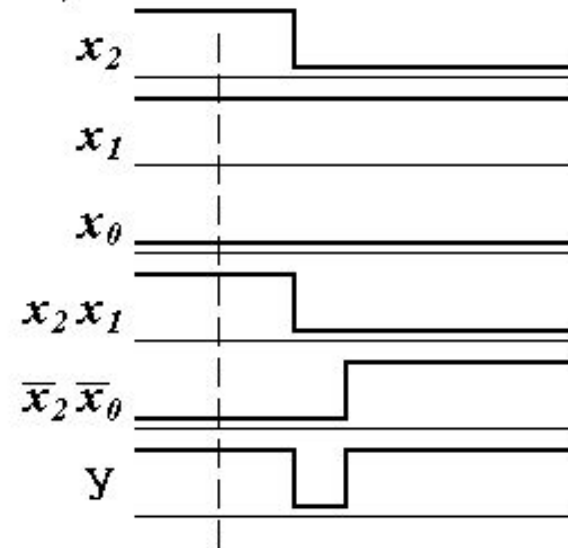
	x_1			
x_2	6	7	5	4
	2	3	1	0
	x_0			

	x_1			
x_2	1	1	0	0
	1	0	0	1
	x_0			

б)

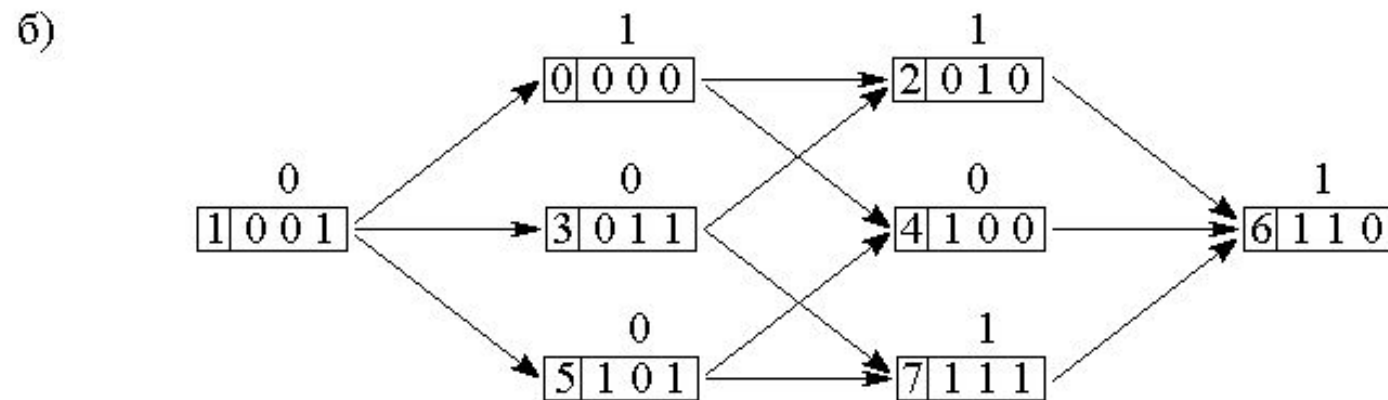
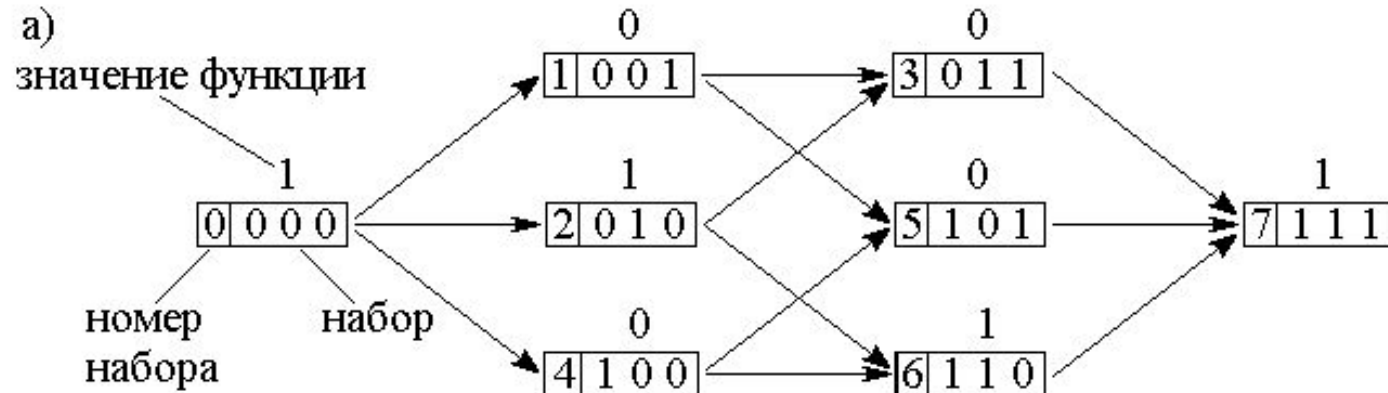


в)



Статический риск сбоя, проявляющийся при **соседней смене наборов**, называется **логическим**, так как может быть **устранен изменением логической структуры**,

Функциональный риск сбоя

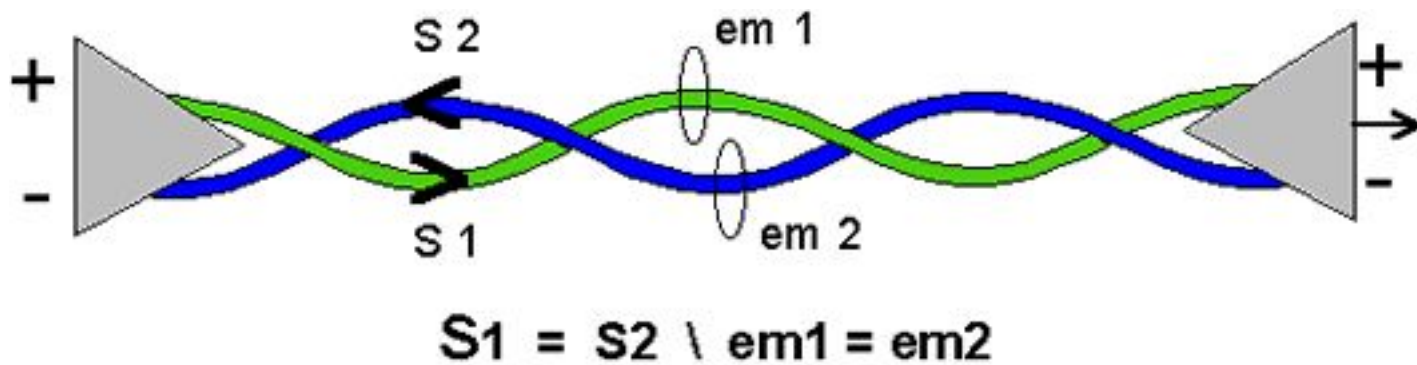


Функциональный риск сбоя

Есть единственный путь смены наборов: **0 2 6 7**, при котором не будет статического риска сбоя, так как $y(X_1 = 0) = y(X_2 = 7) = 1$. Во всех остальных случаях будет статический риск сбоя в единице S_1 , причем никакими аппаратными средствами устранить его нельзя, так как значения выхода на промежуточных наборах определяются **характером самой функции**. Аналогично для рис б) - имеет место динамический риск сбоя D_+ , который также определяется характером самой функции.

Риски сбоя, проявляющиеся при многоместной смене наборов и определяемые характером самой функции, называются **функциональными**. Такие риски сбоя не могут быть устранены изменением логической структуры, реализующей булеву функцию.

Спасибо за внимание!



Минимизация функций алгебры логики

На практике решается более простая задача представления ФАЛ в дизъюнктивной или конъюнктивной форме, содержащей наименьшее возможное число букв (например, для СДНФ -- как можно меньше слагаемых, являющихся элементарными произведениями, которые содержат как можно меньше сомножителей). *канонической задачей минимизации ФАЛ*

Задачу минимизации ФАЛ можно разложить на этапы:

- 1) *Переход от СДНФ к сокращенной ДНФ*
- 2) *Переход от сокращенной ДНФ к тупиковой ДНФ (ТДНФ), сокращением лишних импликант.*
- 3) *Переход от ТДНФ к минимальной форме.*

Методы минимизации ФАЛ

- 1) *Расчетный метод* – метод непосредственных преобразований;
- 2) *Метод Квайна*;
- 3) ***Расчетно-табличный метод (метод Квайна – Мак'Класски)***;
- 4) *Метод Петрика*;
- 5) ***Табличный метод (метод карт Карно)***;
- 6) ***Метод неопределенных коэффициентов***;
- 7) *Метод гиперкубов*;
- 8) *Метод факторизации*;
- 9) *Метод функциональной декомпозиции*;
- ...

Табличный метод

В данном методе применяются или *диаграммы Вейча* или *карты Карно*, которые отличаются друг от друга расположением столбцов и строк.

В картах **Карно** порядок следования : 00 01 11 10.

В диаграммах **Вейча** порядок следования : 00 01 10 11.

Позиции наборов располагаются в соответствии с циклическим кодом Грея. Наборы **соседние**, если различаются только в одном разряде.

Эталонная и рабочая карты Карно для функции $n=3$:

	x_1			
x_2	6	7	5	4
	2	3	1	0
	x_0			

	x_1			
x_2	1	0	1	1
	0	1	1	0
	x_0			

Правила минимизации для карт Карно

1. В карте Карно группы единиц (ДНФ) необходимо покрыть контурами. Внутри контура должны находиться только единицы. (соответствует операции *склеивания* - нахождения импликант данной функции).
2. Количество единиц контура должно быть степенью двойки (1, 2, 4, 8, ...).
3. Каждый контур должен включать максимально возможное количество клеток. В этом случае он будет соответствовать простой импликанте.
4. Все единицы в карте (даже одиночные) должны быть охвачены контурами. Любая единица может входить в контуры произвольное количество раз.
5. Множество контуров, покрывающих все единицы функции, образуют тупиковую ДНФ.
6. В элементарной конъюнкции, которая соответствует одному контуру, остаются только те переменные, значение которых не изменяется внутри контура.

Табличный метод

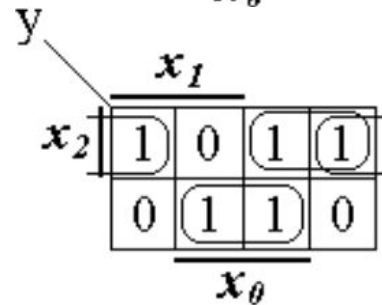
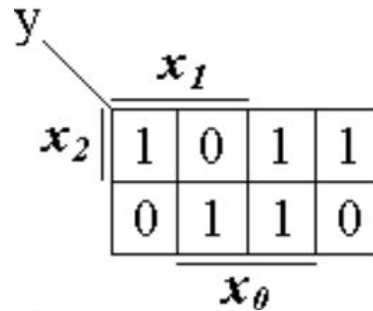
Пример. ФАЛ, заданную таблицей истинности (табл. 1), можно представить следующими

выражениями

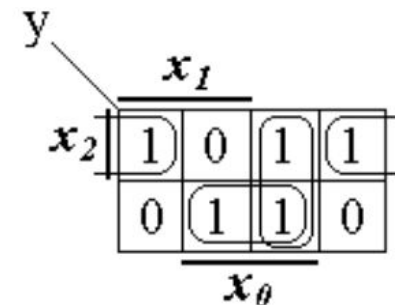
№ наб.	x_2	x_1	x_0	y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

$$y = x_2 x_1 \bar{x}_0 + x_2 \bar{x}_1 x_0 + x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 + \bar{x}_2 x_1 x_0 + \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_0 \quad (1)$$

$$y = x_2 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_0 + \bar{x}_2 x_0 \quad (2)$$



$$y = x_2 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_0 + \bar{x}_2 x_0$$



$$y = x_2 \bar{x}_0 + \bar{x}_2 x_0 + \bar{x}_1 x_0$$

Эталонные карты Карно для $n=4, 5$

а)

	x_1				
x_3	10	11	9	8	x_2
	14	15	13	12	
	6	7	5	4	
	2	3	1	0	
	x_0				

б)

	x_2				x_1				
x_4	20	21	23	22	18	19	17	16	x_3
	28	29	31	30	26	27	25	24	
	12	13	15	14	10	11	9	8	
	4	5	7	6	2	3	1	0	
	x_0				x_0				

Пример. $n=5$ Для клетки с набором 25 на рис. 4,б соседними являются клетки с номерами наборов 9, 27, 17, 24 и 29. Для клетки с набором 2 на рис. 4,б соседними являются клетки 3, 10, 0, 18 и 6. Для клетки с набором 43 на рис. 4,в соседними являются клетки с наборами 59, 42, 35, 41 и 47, 11. Для клетки с набором 22 на рис. 4, в соседними являются клетки с наборами 23, 30, 20, 6 и 54, 18.

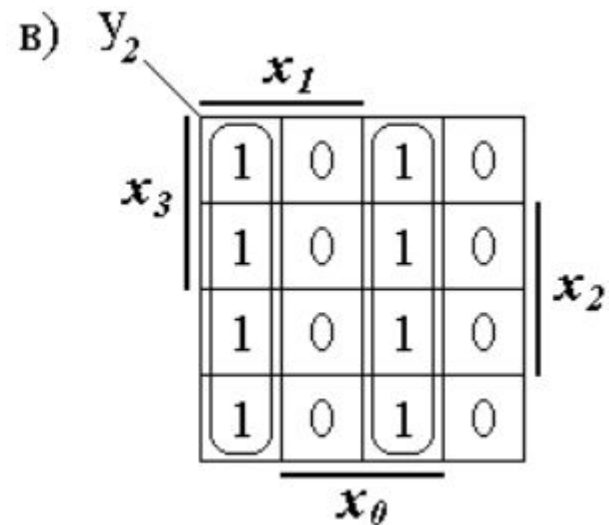
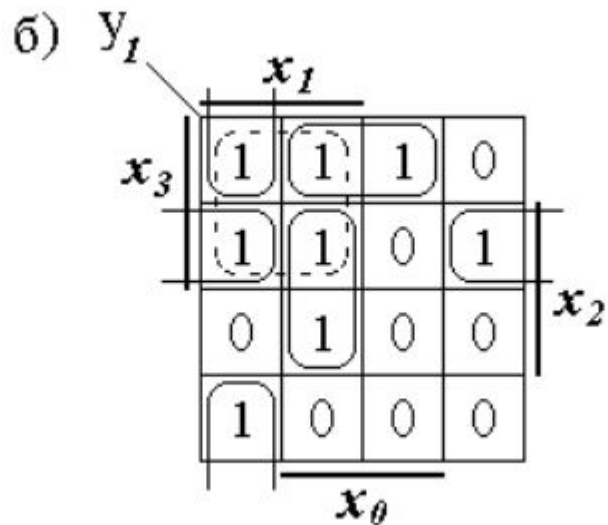
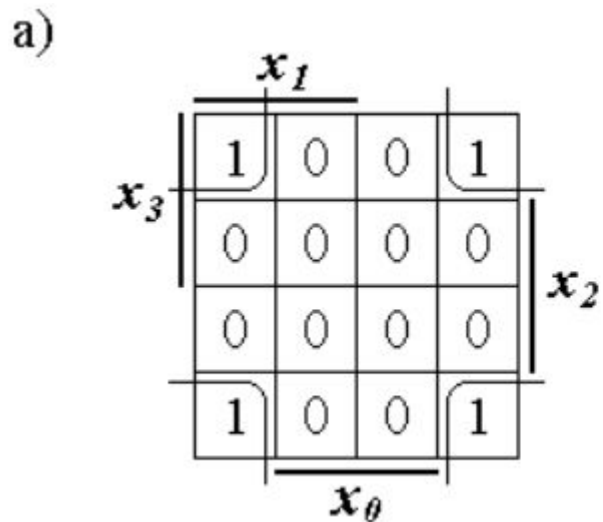
Эталонная карта Карно для $n=6$

В)

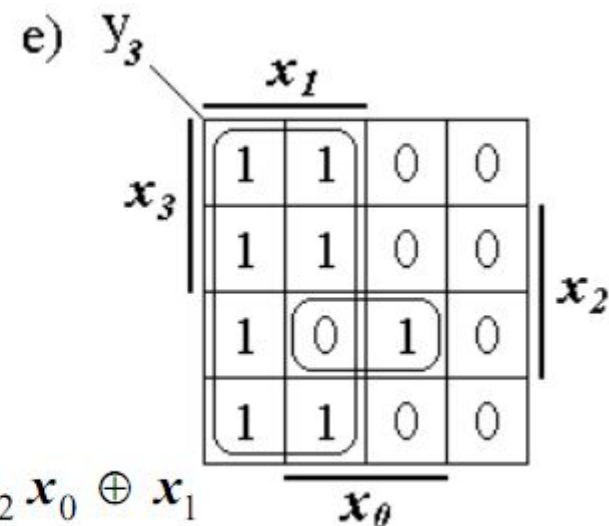
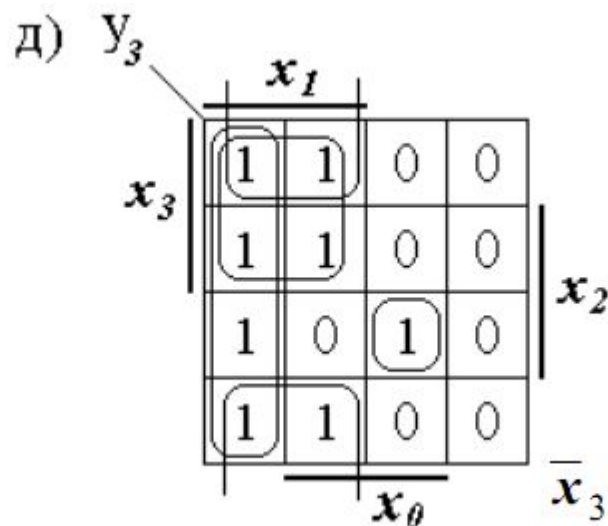
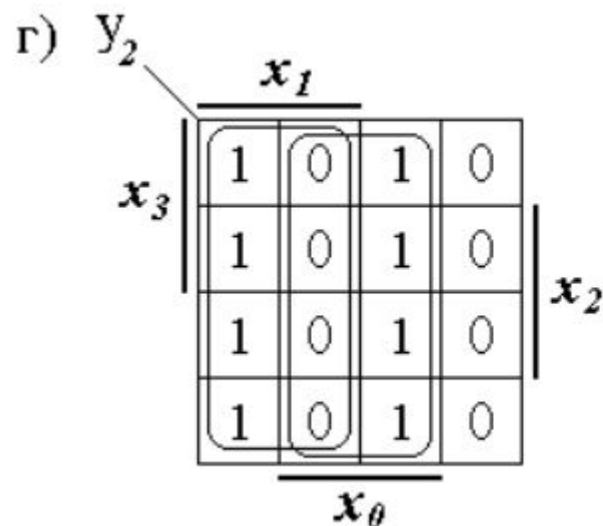
	x_2				x_1			
	36	37	39	38	34	35	33	32
	44	45	47	46	42	43	41	40
x_5	60	61	63	62	58	59	57	56
	52	53	55	54	50	51	49	48
x_4	20	21	23	22	18	19	17	16
	28	29	31	30	26	27	25	24
	12	13	15	14	10	11	9	8
	4	5	7	6	2	3	1	0
	x_0				x_0			

x_3 (right side, top two rows)
 x_3 (right side, bottom two rows)

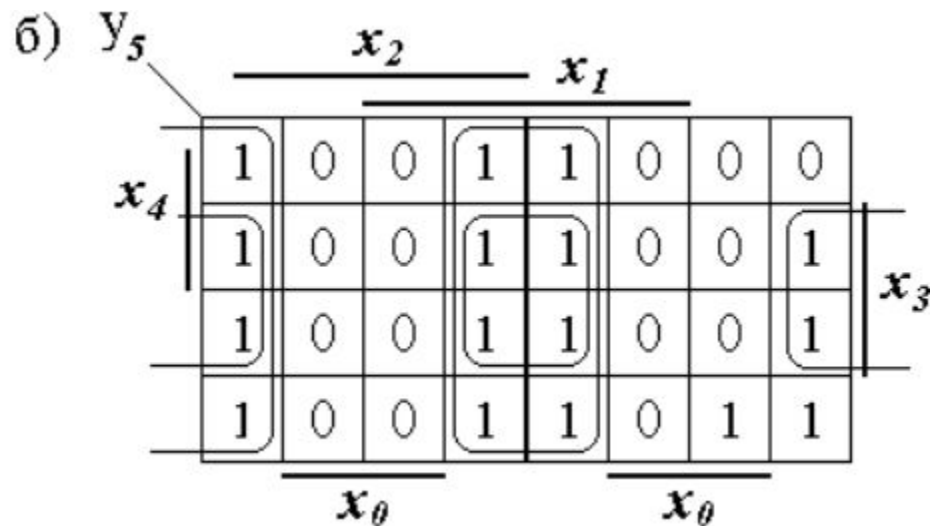
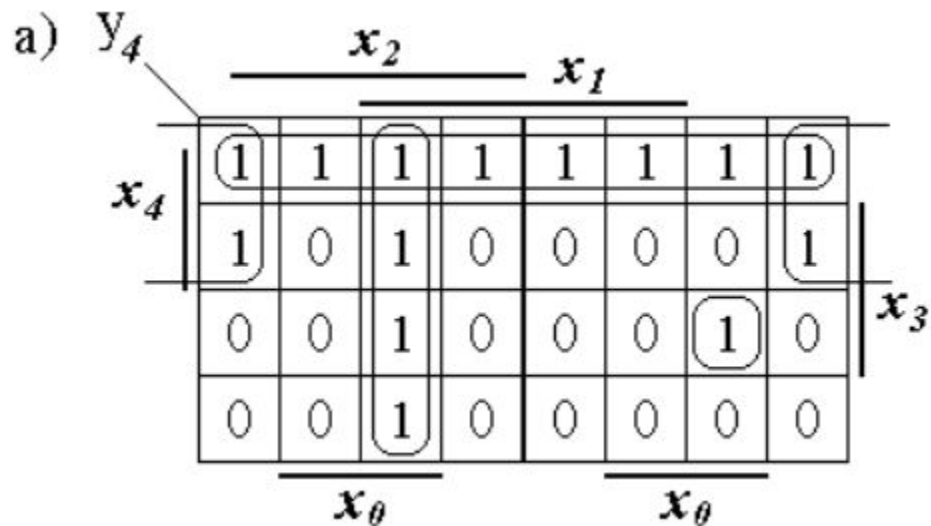
Минимизация на картах Карно для n=4



$$y_0 = \bar{x}_2 \bar{x}_0 \quad y_1 = x_3 x_2 \bar{x}_0 + x_3 \bar{x}_2 x_0 + x_2 x_1 x_0 + \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0 \quad y_2 = x_1 \bar{x}_0 + \bar{x}_1 x_0 = x_1 \oplus x_0$$



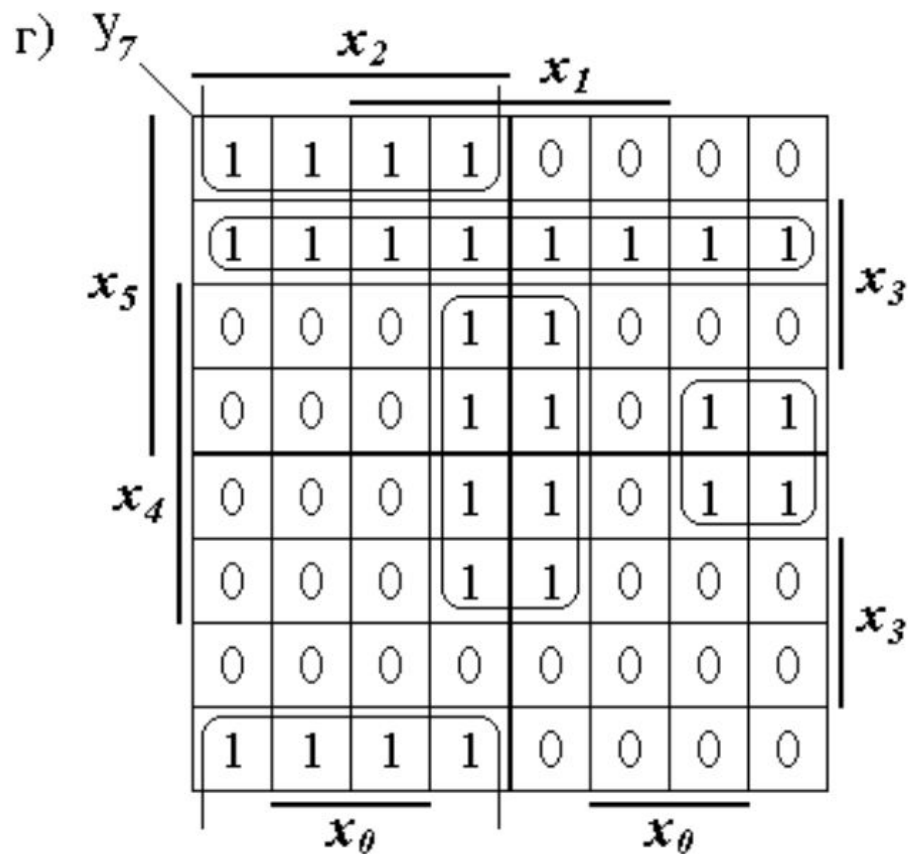
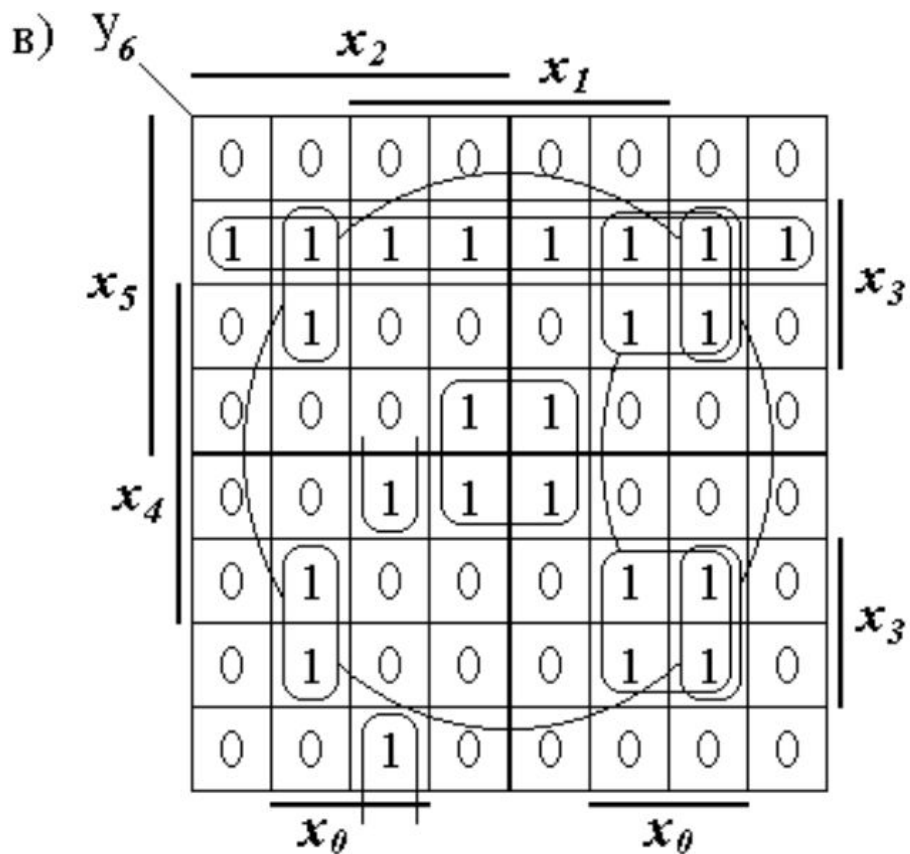
Минимизация на картах Карно для n=5



$$Y_4 = x_4 \bar{x}_3 + x_4 \bar{x}_1 \bar{x}_0 + x_2 x_1 x_0 + \bar{x}_4 x_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_0$$

$$Y_5 = x_3 \bar{x}_0 + x_2 \bar{x}_0 + x_1 \bar{x}_0 + \bar{x}_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1$$

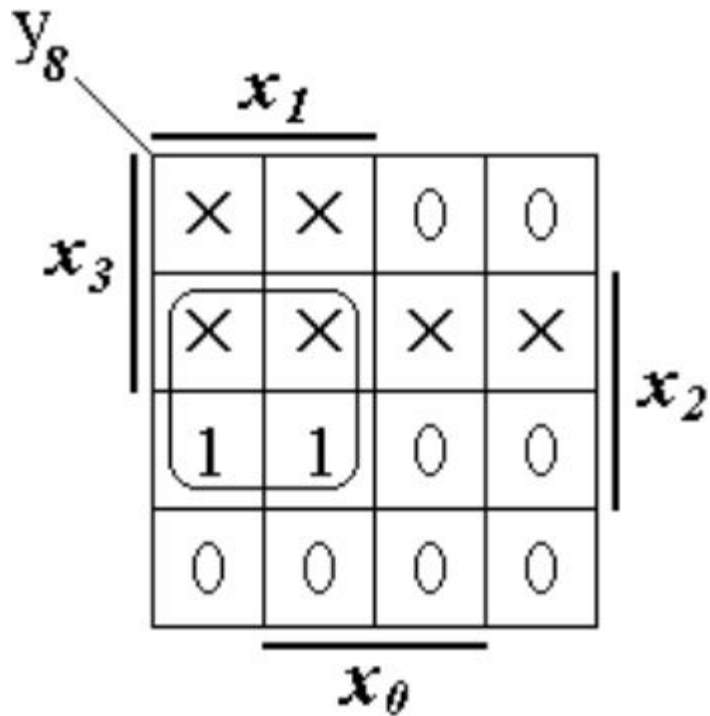
Минимизация на картах Карно для n=6



$$Y_6 = x_3 \bar{x}_2 x_0 + x_3 \bar{x}_1 x_0 + x_5 \bar{x}_4 x_3 + x_4 \bar{x}_3 x_1 \bar{x}_0 + \bar{x}_5 \bar{x}_3 x_2 x_1 x_0$$

$$Y_7 = x_5 \bar{x}_4 x_3 + x_4 x_1 \bar{x}_0 + \bar{x}_4 \bar{x}_3 x_2 + x_4 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1$$

Минимизация неполностью определённой ФАЛ



$$y_8 = x_2 x_1$$

Достоинства и недостатки табличного метода минимизации ФАЛ

Достоинства:

1. Основным достоинством применения карт Карно является компактность, простота и наглядность представления полностью и неполностью определенных функций.
2. Их применение оправдано для $n = 2 \div 6$, а при определенных навыках даже для $n = 7$ и 8 , что соответствует большинству реально встречающихся инженерных задач.
3. Карты Карно можно использовать для минимизации ФАЛ, заданных как в СДНФ, так и в СКНФ.
4. Удобно минимизировать системы булевых функций, так как на картах Карно легко выделять общие части реализуемой системы ФАЛ.
5. Легко находятся минимальные комбинации контуров по их виду на карте Карно.
6. Для построения карты Карно не обязательно задавать её в СДНФ или СКНФ (можно подставить значения наборов в любой вид ФАЛ и заносить значения ФАЛ на этом наборе в соответствующую клетку карты Карно).
7. Карты Карно сразу позволяют реализовать первые два этапа минимизации (склеивание и выявление лишних импликант).

Недостатки:

Метод Квайна-Мак'Класски

Метод состоит из последовательного выполнения этапов:

1. Нахождение первичных импликант;
2. Расстановка меток;
3. Нахождение существенных импликант;
4. Вычеркивание лишних столбцов;
5. Вычеркивание лишних первичных импликант;
6. Выбор минимального покрытия максимальными интервалами.

Метод Квайна-Мак'Класски

Пусть минимизируемая функция задана в СДНФ.
Элементарная конъюнкция ранга n = **минитерм** ранга n .

$$y = f(0011, 0100, 0101, 0111, 1101, 1110, 1111)$$

1. Нахождение первичных импликант;

Для всех минтермов функции определяют вес. Все минтермы функции, вес которых отличается на 1 попарно сравнивают. Записывают новый минитерм ранга $n-1$, на месте разряда с различными значениями записывают \sim . Полученные минтермы ранга $n-1$ сравнивают попарно с учетом \sim и получают минтермы ранга $n-2$ и т.д. до тех пор пока это возможно. Минтермы для которых произошло склеивание отмечают.

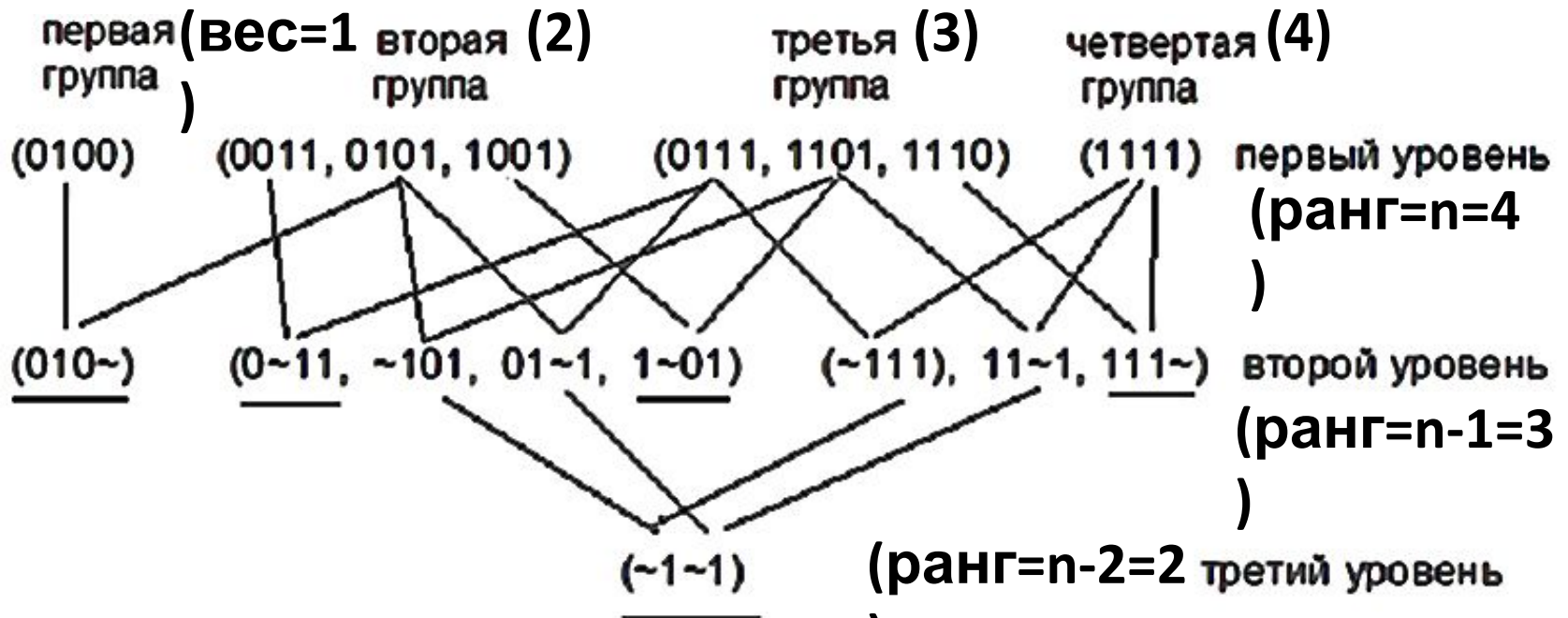
Все неотмеченные минтермы – первичные или простые импликанты.

Метод Квайна-Мак'Класки

Пусть минимизируемая функция задана в СДНФ.

$$y = v(0011, 0100, 0101, 0111, 1101, 1110, 1111)$$

1. Нахождение первичных импликант;



Первичные импликанты: $010\sim, 0\sim11, 1\sim01, 111\sim, \sim1\sim1$

Метод Квайна-Мак'Класски

Пусть минимизируемая функция задана в СДНФ.

$$y = v(0011, 0100, 0101, 0111, 1101, 1110, 1111)$$

2. Расстановка меток;

Для данной функции $f(x_1, x_2, x_3) = \vee M_i$,

где M_i – простые импликанты полученные на первом этапе.

Для нахождения МДНФ нужно найти минимальное подмножество M_i , покрывающее конъюнкции исходной СДНФ.

Составляется таблица, строки - первичные импликанты минимизируемой функции, столбцы - исходные минитермы.

На пересечении ставится отметка, если первичная

Метод Квайна-Мак'Класки

Пусть минимизируемая функция задана в СДНФ.

$$y = v(0011, 0100, 0101, 0111, 1101, 1110, 1111)$$

2. Расстановка меток;

	0011	0100	0101	0111	1001	1101	1110	1111
010~		v	v					
0~11	v			v				
1~01					v	v		
111~							v	v
~1~1			v	v		v		v

Метод Квайна-Мак'Класски

Пусть минимизируемая функция задана в СДНФ.

$$y = v(0011, 0100, 0101, 0111, 1101, 1110, 1111)$$

3. Нахождение существенных импликант;

*Если в столбце только одна метка, то первичная соответствующая импликанта – **существенная**.*

Существенная импликанта не может быть исключена из результата, т.к. без нее не будет полного покрытия исходных минитермов.

Поэтому для сокращения размерности таблицы впоследствии вычеркивают строки с существенными импликантами и вычеркивают столбцы, которые они покрывают.

Существенные импликанты: $0\sim 11, 010\sim, 1\sim 01, 111\sim$

Метод Квайна-Мак'Класски

Пусть минимизируемая функция задана в СДНФ.

$$y = v(0011, 0100, 0101, 0111, 1101, 1110, 1111)$$

3. Нахождение существенных импликант;

	0011	0100	0101	0111	1001	1101	1110	1111
010~		v	v					
0~11	v			v				
1~01					v	v		
111~							v	v
~1~1			v	v		v		v

Существенные импликанты: 0~11, 010~, 1~01, 111~

Метод Квайна-Мак'Класки

Пусть минимизируемая функция задана в СДНФ.

$$y = v(0011, 0100, 0101, 0111, 1101, 1110, 1111)$$

4. Вычеркивание лишних столбцов;

	0011 ^v	0100 ^v	0101 ^v	0111 ^v	1001 ^v	1101 ^v	1110 ^v	^v 1111
010~		v	v					
0~11	v			v				
1~01					v	v		
111~							v	v
~1~1			v	v		v		v

Метод Квайна-Мак'Класки

Пусть минимизируемая функция задана в СДНФ.

$$y = v(0011, 0100, 0101, 0111, 1101, 1110, 1111)$$

4. Вычеркивание лишних первичных импликант;

	0011	0100	0101	0111	1001	1101	1110	1111
010~		v	v					
0~11	v			v				
1~01					v	v		
111~							v	v
~1~1			v	v		v		v

Метод Квайна-Мак'Класски

Пусть минимизируемая функция задана в СДНФ.

$$y = v(0011, 0100, 0101, 0111, 1101, 1110, 1111)$$

5. Выбор минимального покрытия максимальными интервалами;

Выбирается такая совокупность первичных импликант, которая включает метки во всех столбцах (как минимум, по одной в каждом столбце).

При нескольких возможных вариантах, предпочтение отдается варианту с минимальным суммарным числом переменных в простых импликантах, образующих покрытие.

!!! В приведенном примере самая короткая конъюнкция (~1~1), покрывающая наибольшее число минитермов, в решение не вошла.

Метод Квайна-Мак'Класки

Пусть минимизируемая функция задана в СДНФ.

$$y = v(0011, 0100, 0101, 0111, 1101, 1110, 1111)$$

5. Выбор минимального покрытия максимальными интервалами;

	0011	0100	0101	0111	1001	1101	1110	1111
010~		v	v					
0~11	v			v				
1~01					v	v		
111~							v	v

Тогда МДНФ: $y = \underline{x}_3 x_2 \underline{x}_1 + \underline{x}_3 x_1 x_0 + x_3 \underline{x}_1 x_0 +$

$$x_3 x_2 x_1$$

Метод Неопределенных коэффициентов

Метод состоит из последовательного выполнения этапов:

1. Представляем функцию $f(x_1, x_2, x_3)$ в виде ДНФ с неопределенными коэффициентами;
2. Задаем все возможные значения аргументе $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ и приравниваем к полученному значению функции 0 или 1;
3. Составляем систему уравнений для коэффициентов и приравниваем, соответственно, к 0 или 1 значению функции;
4. Все коэффициенты в уравнениях с 0 значением функции также равны 0; $f(x_1, x_2, x_3)$
5. Вычеркиваем из уравнений с 1 значением функции все коэффициенты равные 0, из уравнений с 0 значениями ;
6. В полученных уравнениях оставляем коэффициенты с минимальным количеством индексов, которые присутствуют в максимальном количестве строк;

Метод Неопределенных коэффициентов

Представление функции в СДНФ с неопределенными коэффициентами:

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, x_3) = & K_1^1 x_1 \vee K_1^0 \bar{x}_1 \vee K_2^1 x_2 \vee K_2^0 \bar{x}_2 \vee K_3^1 x_3 \vee K_3^0 \bar{x}_3 \vee \\
 & \vee K_{12}^{11} x_1 x_2 \vee K_{12}^{10} x_1 \bar{x}_2 \vee K_{12}^{01} \bar{x}_1 x_2 \vee K_{12}^{00} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \\
 & \vee K_{13}^{11} x_1 x_3 \vee K_{13}^{10} x_1 \bar{x}_3 \vee K_{13}^{01} \bar{x}_1 x_3 \vee K_{13}^{00} \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \\
 & \vee K_{23}^{11} x_2 x_3 \vee K_{23}^{10} x_2 \bar{x}_3 \vee K_{23}^{01} \bar{x}_2 x_3 \vee K_{23}^{00} \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \\
 & \vee K_{123}^{111} x_1 x_2 x_3 \vee K_{123}^{110} x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee K_{123}^{101} x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \\
 & \vee K_{123}^{100} x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee K_{123}^{011} \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee K_{123}^{010} \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \\
 & \vee K_{123}^{001} \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee K_{123}^{000} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3
 \end{aligned}$$

Здесь представлены все возможные конъюнкции, которые могут входить в функцию $f(x_1, x_2, x_3)$

Метод Неопределенных коэффициентов

Система уравнений для определения значений
коэффициентов на различных наб $f(x_1, x_2, x_3)$:

$$\left. \begin{aligned}
 K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{111} &= f(1,1,1) \\
 K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{110} &= f(1,1,0) \\
 K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{101} &= f(1,0,1) \\
 K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{100} &= f(1,0,0) \\
 K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{011} &= f(0,1,1) \\
 K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{010} &= f(0,1,0) \\
 K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{001} &= f(0,0,1) \\
 K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{000} &= f(0,0,0)
 \end{aligned} \right\}$$

Метод Неопределенных коэффициентов

Пример: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$

Составляем систему:

$$\left. \begin{aligned} K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{111} &= 1 \\ K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{110} &= 1 \\ K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{101} &= 1 \\ K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{100} &= 1 \\ K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{011} &= 0 \\ K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{010} &= 0 \\ K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{001} &= 0 \\ K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{000} &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Метод Неопределенных коэффициентов

Из уравнений с 0 значения $f(x_1, x_2, x_3)$ получаем:

$$K_1^0 = K_2^0 = K_2^1 = K_3^0 = K_3^1 = K_{12}^{00} = K_{12}^{01} = K_{13}^{00} = K_{13}^{01} = K_{23}^{01} = K_{23}^{10} = K_{23}^{11} = K_{123}^{001} = K_{123}^{010} = K_{123}^{011} = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} K_1^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{11} \vee K_{123}^{111} &= 1 \\ K_1^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{10} \vee K_{123}^{110} &= 1 \\ K_1^1 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{11} \vee K_{123}^{101} &= 1 \\ K_1^1 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{100} &= 1 \\ K_{23}^{00} \vee K_{123}^{000} &= 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} K_1^1 &= 1 \\ K_1^1 &= 1 \\ K_1^1 &= 1 \\ K_1^1 \vee K_{23}^{00} &= 1 \\ K_{23}^{00} &= 1 \end{aligned} *$$

$$\circ K_{12}^{11} = K_{12}^{01} = K_{13}^{11} = K_{13}^{10} = K_{123}^{111} = K_{123}^{110} = K_{123}^{101} = K_{123}^{100} = K_{123}^{000} = 0$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

Достоинства и недостатки МКМК и МНК

Достоинства:

1. Основным достоинством применения указанных методов это возможность их использовать при большом числе переменных $n = 16$ и более в профессиональных разработках, они ориентированы на использование в САПР с применением ЭВМ для минимизации полностью и не полностью определенных функций.
2. Методы КМК и МНК можно использовать для минимизации ФАЛ, заданных как в СДНФ, так и в СКНФ.
4. Удобно минимизировать системы булевых функций, так как легко выделять общие части реализуемой системы ФАЛ.
5. Методы являются алгоритмически систематическим, легко формализуются и легко алгоритмизируются, не зависят от навыков разработчика.
6. Методы позволяют последовательно реализовать все этапы минимизации (склеивание и выявление лишних импликант, получение минимальных покрытий).

Недостатки:

1. Затруднительно использовать методы для числа переменных ≥ 6 для ручной минимизации.