



УрФУ

Кафедра «Автоматизированные электрические системы»



Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина

Методы прогнозирования нагрузок и электропотребления



Обзор методов прогнозирования нагрузок и электропотребления



Характеристика методов прогнозирования нагрузок и электропотребления

Условия прогнозирования

- Сроки прогнозирования - от 1-2 до 20-30 лет
- Территориальность - от отдельных потребителей до ОЭС

Показатели прогнозирования

- Годовое электропотребление $WГ$
- Годовой максимум нагрузки $PГ \max$
- Графики нагрузок характерных суток
- Основные параметры графиков нагрузок
- Годовой график суточных максимумов



**Многообразии условий и показателей
прогнозирования определяют многообразие
методов прогнозирования**

Методы прогнозирования

Методы «прямого счета»

Нормативный метод

Технологический метод

Метод анализа заявок потребителей

Математические модели прогнозирования

Регрессионные модели

Факторно-регрессионные модели

Экономико-статистические

Эконометрические методы)



Нормативный метод

Основа - нормы расхода энергии по основным видам продукции и секторам экономики

Результат - прогноз максимальной нагрузки и электропотребления

Применение - крупные территориальные единицы (узлы сети и энергорайоны)



Технологический метод

Основа - нормы расхода энергии по видам продукции, учет: энергосбережения, эффективного использования энергии, обоснования режимов работы электроприемников и рациональных видов энергоносителей

Результат - прогноз максимальной нагрузки и электропотребления

Применение - отдельные предприятия



Метод обработки заявок потребителей

Основа – заявки потребителей на мощность, энергию

Результат - прогноз максимальной нагрузки и электропотребления

Применение - отдельные районы и узлы сети

Недостаток – снижение эффективности метода по мере увеличения количества потребителей и укрупнения территориального подразделения



Математические модели прогнозирования

Математические модели прогнозирования -
аналитические зависимости между **Y** и **X**

**Моделируемый
показатель Y**

(электропотребление, нагрузка,
показатель баланса и т.д.)

**Вектор независимых
параметров X**

(время, народно-хозяйственные
параметры и т.д.)

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$



Математические модели прогнозирования

Основа – статистические выборочные совокупности моделируемых показателей и независимых параметров

Результат - прогноз максимальной нагрузки и электропотребления

Применение – от отдельных энергоузлов до ОЭС



УрФУ
Кафедра «Автоматизированные электрические системы»



Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ !



Построение математических моделей прогнозирования нагрузок и электропотребления



Математические модели прогнозирования

Этапы построения математических моделей прогнозирования

- 1. Отбор информативных и независимых параметров**
- 2. Выдвижение гипотезы о виде модели**
- 3. Точечная оценка коэффициентов регрессионной модели**
- 4. Проверка состоятельности гипотезы о виде модели**
- 5. Интервальная оценка коэффициентов модели**
- 6. Прогнозирование по регрессионной модели**



Этапы формирования математических моделей прогнозирования

Отбор информативных и независимых параметров

Используемый метод - корреляционный анализ

Содержание – установление корреляционных связей между:

- показателем Y и вектором параметров \bar{X} ;
- параметрами $x_i, x_j; i, j = 1, \dots, n; i \neq j$.



Отбор информативных и независимых параметров

Исходная статистическая совокупность размера N

Вектор прогнозируемого показателя

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \square \\ y_k \\ \square \\ y_N \end{pmatrix}$$

Матрица независимых параметров

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1i} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2i} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{ki} & \dots & x_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{Ni} & \dots & x_{Nn}^{14} \end{pmatrix}$$



Отбор информативных и независимых параметров

Коэффициенты парной корреляции r_{yx_i} и $r_{x_i x_j}$

$$r_{y x_i} = \frac{\sum_{k=1}^N [x_{k i} - M(x_i)] \cdot [y_k - M(y)]}{N \cdot S_{x_i} \cdot S_y} = \frac{\sum_{k=1}^N z_{x_{k i}} \cdot z_{y_k}}{N}$$

Практическое условие значимости коэффициентов корреляции

$$r_{\text{кор}} \geq r \approx 0,8 \quad r_{\text{некор}_j} \geq r \approx 0,5$$



Отбор информативных и независимых параметров

Математические ожидания $M(x_i)$ и $M(y)$

$$M(x_i) = \frac{\sum_{k=1}^N x_{ki}}{N} \quad M(y) = \frac{\sum_{k=1}^N y_k}{N}$$

Несмещенные оценки дисперсий $S^2(x_i)$ и $S^2(y)$

$$S_{x_i}^2 = \frac{\sum_{k=1}^N [x_{ki} - M(x_i)]^2}{N-1} \quad S_y^2 = \frac{\sum_{k=1}^N [y_k - M(y)]^2}{N-1}$$



Отбор информативных и независимых параметров

Матрица коэффициентов парной корреляции R

$$R = \begin{bmatrix} r_{x_1x_1} & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_1x_i} & \dots & r_{x_1x_n} & r_{x_1y} \\ & r_{x_2x_2} & \dots & r_{x_2x_i} & \dots & r_{x_2x_n} & r_{x_2y} \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & r_{x_ix_i} & \dots & r_{x_ix_n} & r_{x_iy} \\ & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & r_{x_nx_n} & r_{x_ny} \\ & & & & & & r_{yy} \end{bmatrix}$$



Этапы формирования математических моделей прогнозирования

Выдвижение гипотезы о виде регрессионной модели

$$y = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

Используемый метод - анализ (графический, аналитический, привлечение экспертов) статистической совокупности

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$



Этапы формирования математических моделей прогнозирования

Точечная оценка коэффициентов регрессионной модели

Основа - метод наименьших квадратов

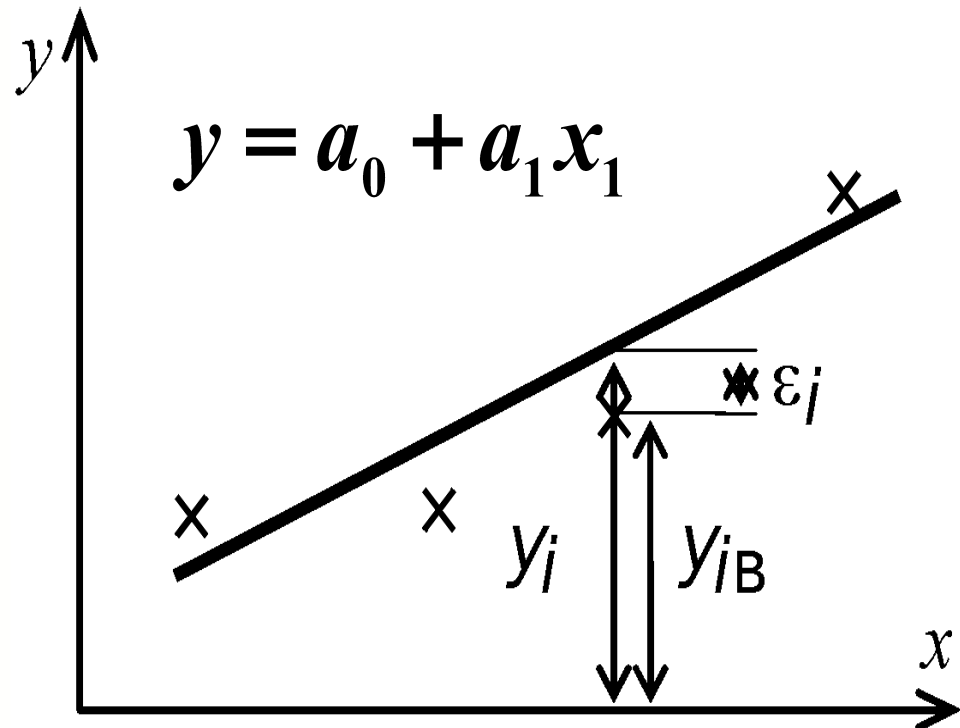
Обозначения переменных:

y_{iB} - выборочное значение прогнозируемого показателя;

y_i - оценка по модели прогнозируемого показателя;

ϵ_i - ошибка моделирования.

$$\epsilon_B = y_{iB} - y_i$$





Точечная оценка коэффициентов регрессионной модели

Сущность
метода
наименьших
квадратов



$$\Phi = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N (y_{i \text{ в}} - y_i)^2 \rightarrow \min$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_0} = 0$$



$$a_1 = \frac{\sum_{k=1}^N [x_k - M(x)][y_k - M(y)]}{\sum_{k=1}^N [x_k - M(x)]^2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0$$

$$a_0 = M(y) - a_1 M(X)$$



Точечная оценка коэффициентов регрессионной модели

Построение многомерных регрессионных моделей

$$\bar{Y}_B = X\bar{A} + \bar{E} \quad \Rightarrow \quad \bar{A} = (X^t X)^{-1} X^t \bar{Y}_B$$

$$\bar{Y}_B = \begin{vmatrix} y_{1B} \\ y_{2B} \\ \vdots \\ y_{NB} \end{vmatrix} \quad X = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{Nn} \end{vmatrix} \quad \bar{A} = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} \quad \bar{E} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{vmatrix}$$

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = E^t E = (Y_B - AX)^t (Y_B - AX) \rightarrow \min$$



Этапы формирования математических моделей прогнозирования

Проверка состоятельности гипотезы о виде модели

Анализ адекватности модели

Модель адекватна $\Rightarrow S_y^2 \gg S_{\text{ош}}^2$

$$S_{\text{ош}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2}{N - n} \quad S_y^2 = \frac{\sum_{k=1}^N [y_k - M(y)]^2}{N - 1}$$

Метод
сравнения



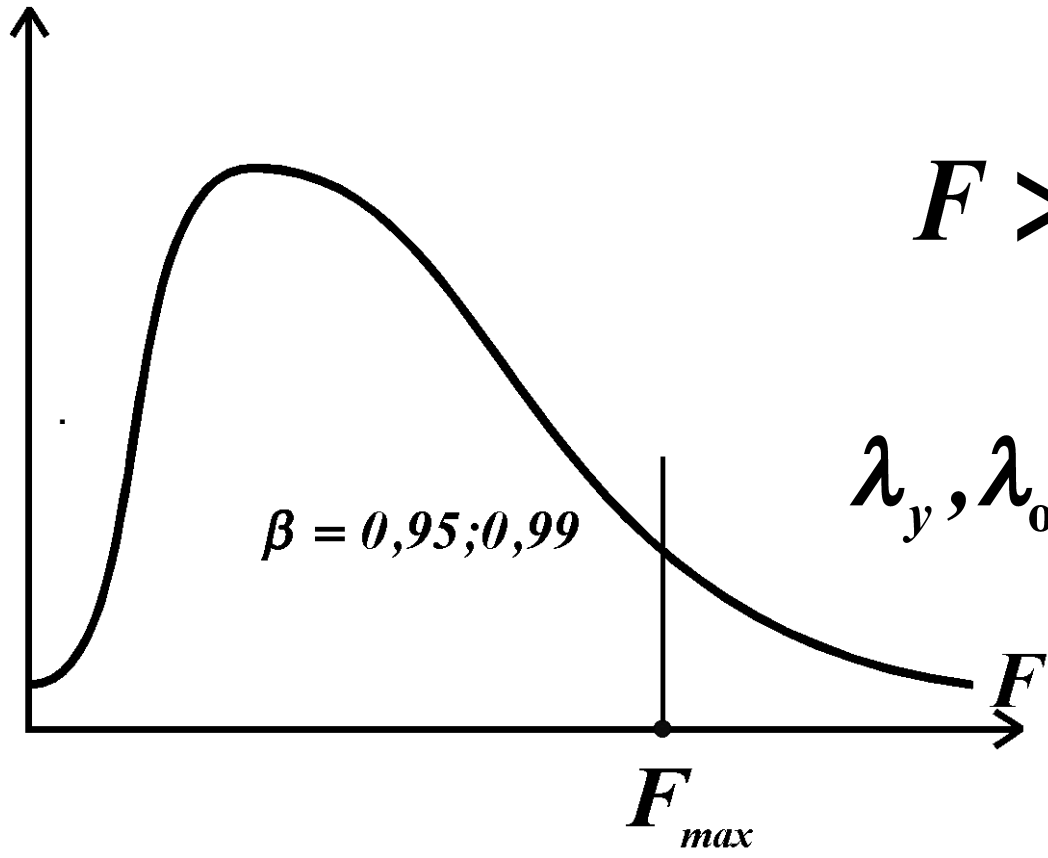
Оценка по статистическому критерию Фишера



Проверка адекватности модели

Распределение Фишера

Модель адекватна



$$F \gg F_{max}(\beta, \lambda_y, \lambda_{ош})$$


$\lambda_y, \lambda_{ош}$ — число степеней свободы дисперсий $S_y^2, S_{ош}^2$

$$F = \frac{S_y^2}{S_{ош}^2}$$



Проверка отсутствия авторегрессии

Авторегрессия – взаимозависимость ошибок соседних наблюдений

Метод проверки  Оценка по статистическому критерию Дарбина-Ватсона D

Авторегрессия
отсутствует



$$1,5 \leq D \leq 2,5$$

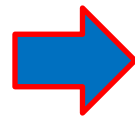
$$D = 2 \cdot \left(1 - \frac{\sum_{i=2}^N \varepsilon_i \cdot \varepsilon_{i-1}}{\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2} \right)$$



Этапы формирования математических моделей прогнозирования

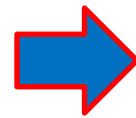
Интервальная оценка коэффициентов регрессионной модели

Ошибка
коэффициента a_i



$$S_{a_i} = S_{\text{ош}} \sqrt{\left(X^t X \right)^{-1}_{ii}}$$

Интервальная
оценка
Коэффициента a_i



$$\left| \pm \Delta a_i \right| \leq S_{a_i} \tau_{\text{max}}$$

$$Y = \sum_{i=1}^n (a_i \pm \Delta a_i) x_i$$

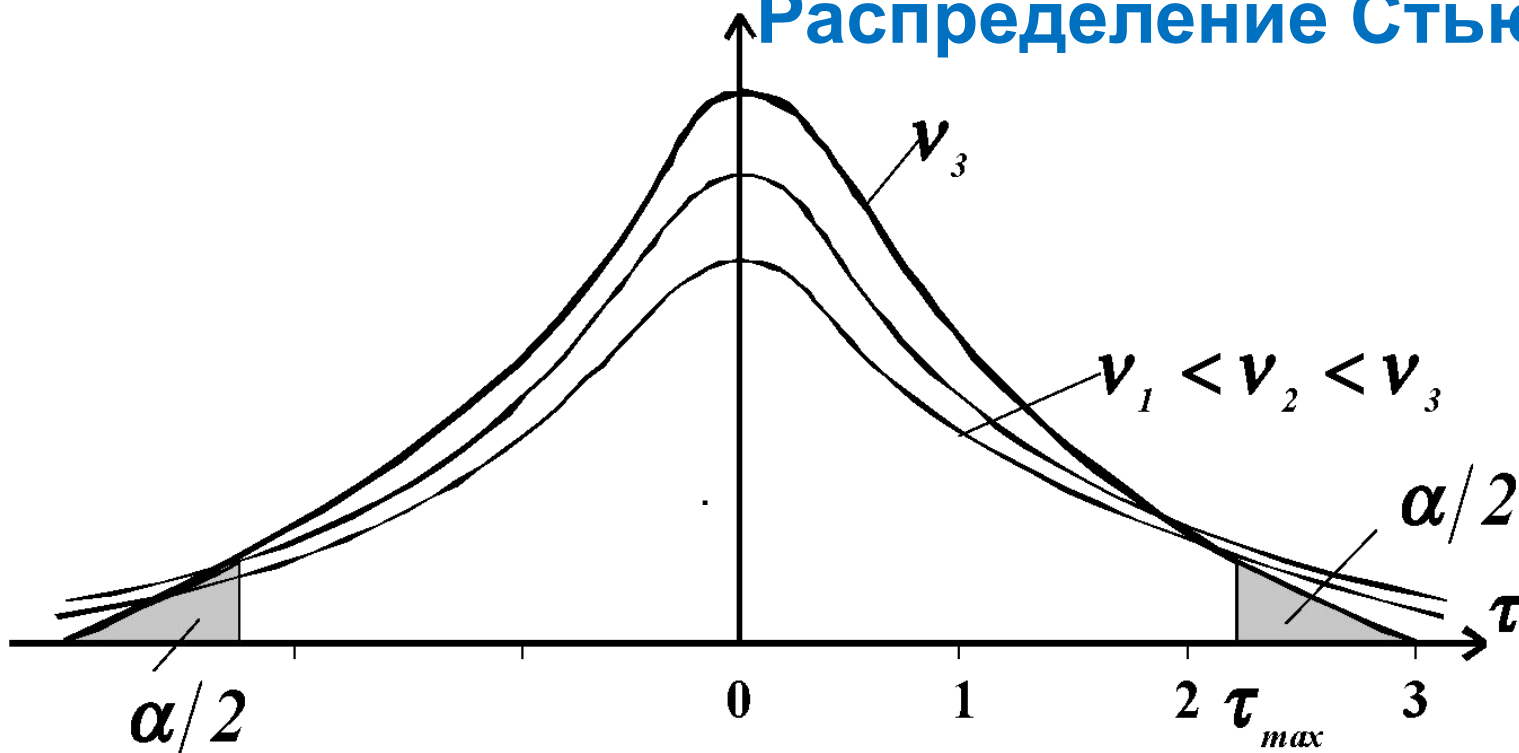
$$\tau = \frac{a_i}{S_{a_i}}$$



Этапы формирования математических моделей прогнозирования

Интервальная оценка коэффициентов регрессионной модели

Распределение Стьюдента





Этапы формирования математических моделей прогнозирования

Прогнозирование по регрессионной модели

□ Точечные оценки прогнозируемого показателя

$$Y_j = \sum_{i=1}^n a_i x_{ij} \quad j = N + 1, \dots, T$$

прогнозный период

x_{ij} - прогнозные значения параметра i
 $i = 1, 2, \dots, n$



□ Интервальные оценки прогнозируемого показателя

$$S_j = S_{\text{ош}} \sqrt{1 + \mathbf{X}_j (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}_j^t},$$

$$S_j = S_{\text{ош}} \sqrt{1 + \begin{bmatrix} x_{j1} & x_{j2} & \dots & x_{jn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{j1} \\ x_{j2} \\ \cdot \\ x_{jn} \end{bmatrix}}$$



Интервальная оценка

$$\left| Y_j \pm \Delta Y_j \right| \leq \tau_{max} S_j$$

Максимальное значение доверительного интервала прогнозируемого показателя **Y**

$$\Delta Y_j = S_j \tau_{max} \quad \beta = 0,95 \div 0,99$$

$$\nu = N - n$$



Авторегрессионные модели прогнозирования

$$D < 1,5 \text{ и } D > 2,5$$



Наличие
АВТОРЕГРЕССИИ



$$y_t = a_0 + a_1 y_{(t-1)} + a_2 y_{(t-2)} + \square + a_n y_{(t-n)}$$

$$t = n + 1, n + 2, \dots, N + n$$



Формирование модели

$$\mathbf{Y}_B = \begin{matrix} \left. \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \square \\ y_n \end{matrix} \right\} N \\ \hline y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ \square \\ y_N \\ \hline \left. \begin{matrix} \square \\ y_{N+n} \end{matrix} \right\} n \end{matrix} \quad \mathbf{X} = \begin{matrix} \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & \square & a_{n-1} & a_n \\ 1 & - & - & \square & - & - \\ 1 & y_1 & - & \square & - & - \\ 1 & y_2 & y_1 & \square & - & - \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ 1 & y_{n-1} & y_{n-2} & \square & y_1 & \\ \hline 1 & y_n & y_{n-1} & \square & y_2 & y_1 \\ 1 & y_{n+1} & y_n & \square & y_3 & y_2 \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ 1 & y_{N-1} & y_{N-2} & \square & y_{N-n-1} & y_{N-n} \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ 1 & y_{N+n-1} & y_{N+n-2} & \square & y_{N+1} & y_N \end{matrix} \end{matrix}$$



Пример

$$\mathbf{Y}_B = \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \end{matrix} = \mathbf{X} = \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 1 & - & - \\ 1 & y_1 & - \\ \hline 1 & y_2 & y_1 \\ 1 & y_3 & y_2 \\ 1 & y_4 & y_3 \\ 1 & y_5 & y_4 \\ 1 & y_6 & y_5 \\ 1 & y_7 & y_6 \\ 1 & y_8 & y_7 \\ 1 & y_9 & y_8 \end{matrix} \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} \begin{matrix} n = 2 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ N = 8 \end{matrix}$$

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2}$$



1-й шаг прогноза:

$$y_{t+1} = a_0 + a_1 y_t + a_2 y_{t-1} + \square + a_n y_{t-(n-1)}$$

2-й шаг прогноза:

$$y_{t+2} = a_0 + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t + \square + a_n y_{t-(n-2)}$$

□

m-й шаг прогноза:

$$y_{t+m} = a_0 + a_1 y_{t+m-1} + a_2 y_{t+m-2} + \square + a_n y_{(t+m)-n}$$



Учет изменения тенденций при прогнозировании

Учет изменения тенденций в регрессионных моделях

$$y_{B_j} = a_0 + a_1 x_{j1}, \quad j = 1, \dots, N$$

$$a_{0j} = b'_0 + b'_1 t_j;$$

$$a_{1j} = b''_0 + b''_1 t_j.$$



$$y_{B_j} = b'_0 + b'_1 t_j + b''_0 x_{j1} + b''_1 t_j x_{j1}$$



Вектор выборочных значений прогнозируемого показателя \mathbf{Y}_B ,
матрица \mathbf{X} , вектор коэффициентов модели \mathbf{A} :

$$\mathbf{Y}_B = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \square \\ y_j \\ \square \\ y_N \end{vmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \cdot t_1 & x_{11} & x_{12} \cdot t_1 \\ 1 & 1 \cdot t_2 & x_{21} & x_{21} \cdot t_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \cdot t_j & x_{j1} & x_{j1} \cdot t_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \cdot t_N & x_{N1} & x_{N1} \cdot t_N \end{vmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{vmatrix} b'_0 \\ b'_1 \\ b''_0 \\ b''_1 \end{vmatrix}$$



Многомерный случай

$$y_j = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_{ij}$$

$$j = 1, \dots, N$$

$$\mathbf{Y}_B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_j \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1n} & t_1 & x_{11}t_1 & \cdots & x_{1n}t_1 \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2n} & t_2 & x_{21}t_2 & \cdots & x_{2n}t_2 \\ 1 & x_{31} & \cdots & x_{3n} & t_3 & x_{31}t_3 & \cdots & x_{3n}t_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{N1} & \cdots & x_{Nn} & t_N & x_{N1}t_N & \cdots & x_{Nn}t_N \end{bmatrix}$$



Учет изменения тенденций в авторегрессионных моделях

$$y_t = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i y_{t-i} \quad t = n+1, \dots, N+n$$

$$a_0 = b_{00} + b_{10}t,$$

□

$$a_i = b_{0i} + b_{1i}t, \quad \text{где } i = 1, 2, \dots, n,$$



$$y_t = b_{00} + b_{10}t + \sum_{i=1}^n b_{0i} y_{t-i} + \sum_{i=1}^n b_{1i} y_{t-i} t$$



Вектор выборочных значений прогнозируемого показателя Y_B ,

матрица X , вектор коэффициентов модели A :

$$A^t = [b_{00} \quad b_{01} \quad b_{02} \quad \square \quad b_{0n} \quad b_{10} \quad b_{11} \quad b_{12} \quad \square \quad b_{1n}]$$

$$Y_B = \begin{bmatrix} y_1 \\ \square \\ y_n \\ y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ \square \\ y_N \\ \square \\ y_{N+n} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & - & - & \square & - & t_1 & - & \square & - \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ 1 & y_{n-1} & y_{n-2} & \square & - & t_n & y_{n-1}t_n & \square & - \\ 1 & y_n & y_{n-1} & \square & y_1 & t_{n+1} & y_n t_{n+1} & \square & y_1 t_{n+1} \\ 1 & y_{n+1} & y_n & \square & y_2 & t_{n+2} & y_{n+1} t_{n+2} & \square & y_2 t_{n+2} \\ \square & \square & \square & \square & y_{N-n} & \square & \square & \square & \square \\ 1 & y_{N-1} & y_{N-2} & \square & \square & t_N & y_{N-1} t_N & \square & y_{N-n} t_N \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ 1 & y_{N+n-1} & y_{N+n-2} & \square & y_N & t_{N+n} & y_{N+n-1} t_{N+n} & \square & y_N t_{N+n} \end{bmatrix}$$



Модели прогнозирования с дисконтированием

Система нормальных
уравнений

$$\mathbf{X}^t \mathbf{V}_D \mathbf{X} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{X}^t \mathbf{V}_D \bar{\mathbf{Y}}_B$$

$$\bar{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_t \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{V}_D = \begin{pmatrix} \beta_1 & & & & & \\ & \square & & & & \\ & & & & & \\ & & & \beta_t & & \\ & & & & \square & \\ & & & & & \beta_N \end{pmatrix}$$

β_t - коэффициент дисконтирования



Модели прогнозирования с дисконтированием

$$\mathbf{X}_{\beta}^t \mathbf{X}_{\beta} \mathbf{A} = \mathbf{X}_{\beta}^t \mathbf{Y}_{\beta}$$

$$\mathbf{Y}_{\beta} = \begin{pmatrix} y_{B1} \sqrt{\beta_1} \\ \square \\ y_{Bt} \sqrt{\beta_t} \\ \square \\ y_{BN} \sqrt{\beta_N} \end{pmatrix} \quad \mathbf{X}_{\beta} = \sqrt{\mathbf{B}_D} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} \sqrt{\beta_1} & x_{12} \sqrt{\beta_1} & \square & x_{1n} \sqrt{\beta_1} \\ \square & \square & \square & \square \\ x_{t1} \sqrt{\beta_t} & x_{t2} \sqrt{\beta_t} & \square & x_{tn} \sqrt{\beta_t} \\ \square & \square & \square & \square \\ x_{N1} \sqrt{\beta_N} & x_{N2} \sqrt{\beta_N} & \square & x_{Nn} \sqrt{\beta_N} \end{pmatrix}$$



Прогнозирование в иерархических системах

Условие согласования

$$\sum_{i=1}^m y_{i_t} = y_{\Sigma_t} \quad t = t_{N+1}, \dots, t_T$$

y_{Σ_t} - прогнозируемое значение показателя для объединенной энергосистемы

y_{i_t} - прогнозируемое значение показателя для i -той энергосистемы



Согласование прогнозов

$$M(y_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$M(y_{\Sigma}) = \sum_{j=1}^n a_{\Sigma j} x_j$$

Система ограничений

$$a_{\Sigma j} = \sum_{i=1}^m a_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, n$$



$$\mathbf{Y}_i = \begin{pmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ \square \\ y_{ik} \\ \square \\ y_{iN} \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y}_\Sigma = \begin{pmatrix} y_{\Sigma 1} \\ y_{\Sigma 2} \\ \square \\ y_{\Sigma k} \\ \square \\ y_{\Sigma N} \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_{i1} \\ \varepsilon_{i2} \\ \square \\ \varepsilon_{ik} \\ \square \\ \varepsilon_{iN} \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}_\Sigma = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\Sigma 1} \\ \varepsilon_{\Sigma 2} \\ \square \\ \varepsilon_{\Sigma k} \\ \square \\ \varepsilon_{\Sigma N} \end{pmatrix}$$

\mathbf{Y}_i \mathbf{Y}_Σ - векторы выборочных значений показателей для отдельных энергосистем и объединения ;

\mathbf{E}_i \mathbf{E}_Σ - векторы ошибок моделирования.



$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{11} & \mathbf{x}_{12} & \square & \mathbf{x}_{1j} & \square & \mathbf{x}_{1n} \\ \mathbf{x}_{21} & \mathbf{x}_{22} & \square & \mathbf{x}_{2j} & \square & \mathbf{x}_{2n} \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \mathbf{x}_{k1} & \mathbf{x}_{k2} & \square & \mathbf{x}_{kj} & \square & \mathbf{x}_{kn} \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \mathbf{x}_{N1} & \mathbf{x}_{N2} & \square & \mathbf{x}_{Nj} & \square & \mathbf{x}_{Nn} \end{pmatrix}$$

- матрица параметров
 \mathbf{X}



$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \square \\ a_{in} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_\Sigma = \begin{bmatrix} a_{\Sigma 1} \\ a_{\Sigma 2} \\ \square \\ a_{\Sigma n} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_\Sigma$ - векторы коэффициентов моделей для энергосистем i и их объединения.

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_i &= \mathbf{X}\mathbf{A}_i + \mathbf{E}_i, i = 1, 2, \dots, m; \\ \mathbf{Y}_\Sigma &= \mathbf{X}\mathbf{A}_\Sigma + \mathbf{E}_\Sigma, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= \mathbf{Y}_i - \mathbf{X}\mathbf{A}_i, i = 1, 2, \dots, m; \\ \mathbf{E}_\Sigma &= \mathbf{Y}_\Sigma - \mathbf{X}\mathbf{A}_\Sigma. \end{aligned}$$



Функция ошибок моделирования

$$\Phi = \sum_{i=0}^m \sum_{k=1}^N \varepsilon_{ik}^2 = \sum_{i=1}^m (Y_i - XA_i)^t (Y_i - XA_i) + (Y_{\Sigma} - XA_{\Sigma})^t (Y_{\Sigma} - XA_{\Sigma})$$

С учётом ограничений

$$\Phi = \sum_{i=1}^m (Y_i - XA_i)^t (Y_i - XA_i) + (Y_{\Sigma} - X \sum_{i=1}^m A_i)^t (Y_{\Sigma} - X \sum_{i=1}^m A_i) \rightarrow \min$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = 0; \quad \rightarrow \quad (X^t X) \left(A_i + \sum_{i=1}^m A_i \right) = X^t (Y_i + Y_{\Sigma})$$

$i = 1, 2, \dots, m$



Для системы $i = 1$ $\mathbf{M}\mathbf{A}_1 = \mathbf{X}^t \mathbf{Y}_1 - \mathbf{Z}_\Sigma$



$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{X} \end{pmatrix} = \mathbf{Y}^t \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_\Sigma \end{pmatrix}$$



$$(m+1)\mathbf{M}\mathbf{A}_1 = \sum_{i=2}^m \mathbf{X}^t (\mathbf{Y}_i + \mathbf{Y}_\Sigma - \Delta\mathbf{Y}_{i1}) \quad \Delta\mathbf{Y}_{i1} = \mathbf{Y}_i - \mathbf{Y}_1$$

Оценка вектора \mathbf{A}_1



$$(m+1)\mathbf{M}\mathbf{A}_1 = \mathbf{X}^t \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_\Sigma - \sum_{i=2}^m \Delta\mathbf{Y}_i \end{pmatrix}$$



УрФУ
Кафедра «Автоматизированные электрические системы»



Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ !



Факторно-регрессионные модели прогнозирования нагрузок и электропотребления

Экономико-статистические модели прогнозирования

Учет взаимосвязей *потребности* региона в электроэнергии с *показателями* развития производительных сил региона.

$$Y = (X_1, X_2, t)A \quad - \text{производственные функций.}$$



Макроэкономические

- валовой выпуск продукции (В);
- стоимость основных фондов (Ф);
- производительность труда (П);
- численность работающего персонала (Ч) и др.;

Отраслевые

- объемы производства D_i ведущих отраслей

Недостаток:

- ❑ невозможность одновременного учета большей части параметров вследствие их взаимозависимости

Следствие:

Исключение части параметров, потеря части информации.
Разделение статистических совокупностей переменных на две группы

$$Y = (X_1, t)A_1 \quad Y = (X_2, t)A_2$$



Факторно-регрессионные модели прогнозирования

факторный анализ

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \longrightarrow F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$$

$(f_1 \perp f_2 \perp \dots \perp f_m)$

$$Y = FB$$

B – вектор коэффициентов модели (аналог вектора **A** в обычных регрессионных моделях)

F – матрица выборочных значений экономико-статистических факторов (аналог матрицы **X**)

Достоинства:

- учет всех экономико-статистических показателей, независимо от их коррелированности между собой;
- улучшение прогностических свойств моделей.



Эконометрические модели прогнозирования

Особенности:

- учет ограничений, накладываемых на основные региональные показатели - располагаемые материальные и трудовые ресурсы;
- возможность формирования системы одновременных взаимозависимых моделей прогнозирования.

Показатели

Эндогенные
(зависимые)

$$\bar{Y} \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$$

Экзогенные
(независимые)

$$\bar{X} \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$



СТРУКТУРНАЯ ФОРМА ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

$$\bar{Y} = A\bar{X} + B\bar{Y}$$

КООРДИНАТНЫЙ ВИД

$$y_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \square + a_{1n}x_n + b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + \square + b_{1m}y_m;$$

$$y_2 = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \square + a_{2n}x_n + b_{21}y_1 + b_{23}y_3 + \square + b_{2m}y_m;$$

\square

$$y_m = a_{m0}x_0 + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \square + a_{mn}x_n + b_{m1}y_1 + b_{m2}y_2 + \square + b_{m,m-1}y_{m-1}.$$

$$A \{ \bar{A}_0, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n \} \quad m \times n + 1.$$

$$B \{ \bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_m \} \quad m \times m.$$

Общее число определяемых коэффициентов системы эконометрических моделей в структурной форме:

$$N_{\text{стр}} = m \times (n + 1 + m - 1) = m \times (n + m)$$



ПРИВЕДЕННАЯ ФОРМА ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

$$\bar{Y} = C\bar{X} \quad C = (I - B')^{-1} A = D^{-1} A$$

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{10}x_0 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \square + c_{1n}x_n; \\ y_2 &= c_{20}x_0 + c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \square + c_{2n}x_n; \\ &\square \\ y_m &= c_{m0}x_0 + c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \square + c_{mn}x_n. \end{aligned} \quad C \{ \bar{c}_0, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n \}$$

$m \times n + 1.$

Число неизвестных коэффициентов приведенной формы эконометрических моделей:

$$N_{\text{прив}} = m \times n + 1$$

Преимущество:

- большая степень взаимной увязки переменных при описании процесса прогнозирования.



ПОЛНЫЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

- система имеет однозначное решение относительно зависимых переменных (матрица не вырождена);
- модель содержит все существенные переменные, а возмущающие параметры носят случайный характер;
- число уравнений равно числу эндогенных переменных, так что каждый эндогенный показатель может быть объяснен с помощью соответствующего уравнения.

ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ МОДЕЛИ

- $N_{\text{стр}} = N_{\text{прив}}$ - *точная идентифицируемость;*
- $N_{\text{стр}} < N_{\text{прив}}$ - *сверхидентифицируемость.*



Оценки коэффициентов структурной формы эконометрических моделей

точная идентифицируемость → **КОСВЕННЫЙ МЕТОД**

- ❑ эконометрические модели представляются в приведенной форме, в которой эндогенные переменные зависят только от экзогенных;
- ❑ оцениваются коэффициенты каждого уравнения отдельно с использованием метода наименьших квадратов;
- ❑ однозначно оцениваются коэффициенты структурной формы через параметры приведенной.



сверхидентифицируемость → **ДВУХШАГОВЫЙ МЕТОД**

$$\bar{Y}_B = A\bar{X} + B\bar{Y} + \bar{E} \quad (*)$$

ПЕРВЫЙ ШАГ

$$\bar{Y} = C\bar{X}, \quad C = (X_B^t X_B)^{-1} X_B^t Y_B \cdot$$



$$Y = \left\{ (X_B^t X_B)^{-1} X_B^t Y_B \right\} X_B \cdot$$

ПОГРЕШНОСТЬ МОДЕЛИРОВАНИЯ:

$$Y_{Bi} = Y_i + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (**)$$



ВТОРОЙ ШАГ

подстановка (**) в (*)

$$\mathbf{Y}_{Bi} \mathbf{B} = \mathbf{X} \mathbf{A}_i + (\mathbf{Y}_i + \mathbf{I}_i) \mathbf{V}_i + \mathbf{I}_i$$

$$\mathbf{Y}_{Bi} = \mathbf{X} \mathbf{A}_i + \mathbf{Y}_i \mathbf{B}_i + \mathbf{W}_i, \text{ где } \mathbf{W}_i \mathbf{B} = \mathbf{E}_i + \mathbf{I}_i$$



УрФУ
Кафедра «Автоматизированные электрические системы»



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ !