Методы решения тригонометрических уравнений

- Решение простейших тригонометрических уравнений
- Решение тригонометрических уравнений разложением на множители
- Решение тригонометрических уравнений сводящихся к квадратным уравнениям
- Решение тригонометрических уравнений преобразованием суммы тригонометрических функций в произведение
- Решение тригонометрических уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму
- Решение тригонометрических уравнений с применением формул понижения степени
- Решение тригонометрических уравнений как однородное
- Решение тригонометрических уравнений с помощью введения вспомогательного аргумента
- Решение тригонометрических уравнений с помощью универсальной тригонометрической подстановки
- Решение тригонометрических уравнений с помощью замены неизвестного
- Решение тригонометрических уравнений с помощью оценки левой и правой частей уравнения (метод оценок)
- Решение тригонометрических уравнений содержащих тригонометрические функции под знаком радикала

К определению тригонометрического уравнения различные авторы учебных пособий подходят по-разному. Мы назовём тригонометрическим уравнением равенство тригонометрических выражений, содержащих неизвестное (переменную) только под знаком тригонометрических функций. Уравнения вида

$$\cos 3x = \sin x \qquad tg\left(\frac{\pi}{2} - 11x\right) - tg\left(\frac{3}{2}\pi - 5x\right) = 0 \qquad \sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$$

и т.д. – тригонометрические уравнения.

Уравнения вида

$$\sin x = \frac{1}{2}x \qquad \cos 2x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \qquad tg 2x = x$$

и т.д. не являются тригонометрическими, они относятся к типу трансцендентных уравнений и, как правило, решаются приближенно или графически.

Решить тригонометрическое уравнение – значит, найти все его корни – все значения неизвестного, удовлетворяющие уравнению.

- Простейшими тригонометрическими уравнениями являются:
- $\sin x = a$ $\cos x = a$, где $|a| \le 1$

$tgx = a$ $ctgx = a$, где $a \in R$

1. Решение простейших тригонометрических уравнений

$$\sin \pi\sqrt{x} = -1$$

$$\pi\sqrt{x} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\sqrt{x} = -\frac{1}{2} + 2n, n \in Z$$

По определению арифметического квадратного корня перейдем к равносильной системе уравнений.

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} + 2n \geq 0, n \in Z \\ x = \left(-\frac{1}{2} + 2n\right)^2, n \in Z \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} n \geq \frac{1}{4}, n \in Z \\ x = \left(-\frac{1}{2} + 2n\right)^2, n \in N \end{cases}$$

Отве

$$x = \left(-\frac{1}{2} + 2n\right)^2, n \in N$$

2. Решение тригонометрических уравнений разложением на множители

Пример.

$$\frac{1}{\sin x} - 1 = ctgx - \cos x, x \neq \pi n, n \in Z$$

$$\frac{1-\sin x}{\sin x} = \frac{\cos x - \cos x \sin x}{\sin x}$$

$$1 - \sin x = \cos x(1 - \sin x)$$

$$1 - \sin x - \cos x(1 - \sin x) = 0$$

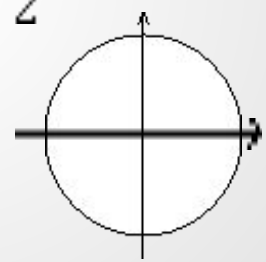
$$(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0$$

$$\sin x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

$$\cos x = 1$$

x = 2пn, nϵZ



Отметим полученные решения и область определения на тригонометрическом круге.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z$

3. Решение тригонометрических уравнений сводящихся к квадратным уравнениям

$$\sin^4 x + \cos^4 x - 2\sin 2x + \frac{3}{4}\sin^2 2x = 0$$

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - 2\sin 2x + \frac{3}{4}\sin^2 2x = 0$$

$$4 - 2\sin^2 2x - 8\sin 2x + 3\sin^2 2x = 0$$

$$\sin^2 2x - 8\sin 2x + 4 = 0$$

Пусть $\sin 2x = y$ тогда

$$y^2 - 8y + 4 = 0$$

$$D_1 = 12$$

$$y_{1,2} = 4 \pm 2\sqrt{3}$$

$\sin 2x = 4 - 2\sqrt{3}$ или $\sin 2x = 4 + 2\sqrt{3}$

$$\sin 2x = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$2x = (-1)^k \arcsin\left(4 - 2\sqrt{3}\right) + \pi k, k \in Z$$

$$x = \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin\left(4 - 2\sqrt{3}\right) + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$$

$$\sin 2x = 4 + 2\sqrt{3}$$

$$\left|\sin 2x\right| \le 1$$

Корней нет

Ответ: $x = \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin\left(4 - 2\sqrt{3}\right) + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

4. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

При решение уравнений данным способом необходимо знать формулы:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}, \quad \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)-\sin 2x=0$$

По формулам приведения

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\sin 3x$$

преобразуем разность синусов в произведение:

$$\sin 3x-\sin 2x=2\sin\frac{3x-2x}{2}\cos\frac{3x+2x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}=0$$

$$\sin\frac{x}{2}=0$$

$$x=2\pi k,\ k\in Z$$

или

$$\cos\frac{5x}{2}=0$$

$$x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}k,\ k\in Z$$

Ответ: $2\pi k,\ \frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}k,\ k\in Z$

5. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

При решение уравнений данным способом необходимо знать формулы:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha},\qquad \operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}.$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)].$$

$$\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$$

$$\frac{1}{2}[\cos(2x-6x)-\cos(2x+6x)] = \frac{1}{2}[\cos(x-3x)+\cos(x+3x)]$$

$$\cos 4x - \cos 8x = \cos 2x + \cos 4x$$

$$\cos 8x + \cos 2x = 0$$

$$2\cos 5x \cos 3x = 0$$

$\cos 5x = 0,\ \ x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5},\ k \in Z$ или $\cos 3x = 0,\ \ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5},\ \ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z$

6. Использование формул понижения степени

При решение уравнений данным способом необходимо знать формулы:

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \quad 1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos^2 3x+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)=\cos^2 7x+\cos^2 9x+\cos\frac{3\pi}{2}$$

$$\cos^2 3x+\cos 5x=\cos^2 7x+\cos^2 9x$$

$$\frac{1}{2}(1+\cos 6x)+\frac{1}{2}(1+\cos 10x)=\frac{1}{2}(1+\cos 14x)+\frac{1}{2}(1+\cos 18x)$$

$$\cos 6x+\cos 10x=\cos 14x+\cos 18x$$

$$2\cos 8x\cos 2x=2\cos 16x\cos 2x,$$

$$\cos 2x(\cos 16x-\cos 8x)=0.$$

$$-2\sin 4x\sin 12\cos 2x=0$$

$\sin 4x=0$ или $\sin 12x=0$ или $\cos 2x=0$

$$x=\frac{\pi k}{4},\ x=\frac{\pi n}{12},\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi l}{2},\ k,n,l\in Z$$

$$x=\frac{\pi n}{12},\ n\in Z$$

Ответ: $\frac{\pi n}{12},\ n\in Z$

7. Однородные уравнения

Уравнения

$$a\sin x + b\cos x = 0;$$

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0;$$

$$a\sin^3 x + b\sin^2 x\cos x + c\sin x\cos^2 x + d\cos^3 x = 0$$ и т. д.

называют **однородными** относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Сумма показателей степеней при $\sin x$ и $\cos x$ всех членов такого уравнения одинакова. Эта сумма называется степенью однородного уравнения. Рассмотренные уравнения имеют соответственно первую, вторую и третью степень.

Делением на $\cos^k x$, где k - степень однородного уравнения, уравнение приводится к алгебраическому относительно функции tgx

$$2\sin x - 3\cos x = 0$$

Разделим обе части уравнения на $\cos x \neq 0$

$$2\cdot tgx - 3 = 0$$

$$tgx = \frac{3}{2}$$

$$x = arctg\frac{3}{2} + \pi k \quad k \in Z$$

Ответ: $x = arctg\frac{3}{2} + \pi k \quad k \in Z$

$$4\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 3$$

Умножим правую часть уравнения на $\sin^2 x + \cos^2 x$

$$4\sin^2 x + 2\sin x\cos = 3\sin^2 x + 3\cos^2 x;$$

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos - 3\cos^2 x = 0$$

Разделим на $\cos^2 x$

$$tg^2 x + 2\cdot tgx - 3 = 0;$$

$tgx = -3$ и $tgx = 1$

$x = -arctg3 + \pi k$ и $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$ $n, k \in Z$

Ответ: $x = -arctg3 + \pi k$ $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$ $n, k \in Z$

8.Введение вспомогательного угла.

Рассмотрим уравнение вида: $a \sin x + b \cos x = c$

где a, b –

x –

Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$ (корректно ли это?) :

$$\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos\varphi}\sin x+\underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin\varphi}\cos x=\underbrace{\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{C},$$

Теперь коэффициенты уравнения обладают свойствами синуса и косинуса,

а именно: модуль (абсолютное значение) каждого из них не больше 1,
а сумма их квадратов равна 1.

Тогда можно обозначить их соответственно как cos φ и sin φ

φ - так называемый **вспомогательный угол**

и наше уравнение принимает вид:

$$\cos\varphi \cdot \sin x + \sin\varphi \cdot \cos x = C ,$$

или $$\sin(x+\varphi) = C ,$$

и его решение: $x = (-1)^k \cdot \arcsin C - \varphi + \pi k$,

где $\varphi = \arccos \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arcsin \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Заметим, что введённые обозначения $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ взаимно заменяемы.

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1$$

Так как $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$, то $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ уже являются соответственно косинусом и синусом определенного угла; ясно, что этот угол $\frac{\pi}{3}$

$$\sin x \cos\frac{\pi}{3} + \cos x \sin\frac{\pi}{3} = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$

Пример. Решить уравнение: $\sqrt{3}\ \sin 3x - \cos 3x = 1$.

Решение. Здесь $a = \sqrt{3}$, $b = -1$, поэтому делим обе части на $\sqrt{3+1} = 2$:

$$(\sqrt{3}\ /\ 2) \cdot \sin 3x - (1\ /\ 2) \cdot \cos 3x = 1\ /\ 2\ ,$$

$$\cos(\pi\ /\ 6) \cdot \sin 3x - \sin(\pi\ /\ 6) \cdot \cos 3x = 1\ /\ 2\ ,$$

$$\sin(3x - \pi\ /\ 6) = 1\ /\ 2\ ,$$

отсюда, $x = (-1)^k \cdot \pi\ /\ 18 + \pi\ /\ 18 + \pi k\ /\ 3.$

9. Метод рационализации (метод универсальной тригонометрической подстановки) для уравнения вида

$$a\sin x + b\cos x = c$$

Известно, что если $\alpha \neq (2n+1)\pi,\ n \in Z$, то $\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ tg\alpha$ выражаются рационально через $tg\frac{\alpha}{2}$

$$\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

Вводим вспомогательное неизвестное так, чтобы после подстановки получилось рациональное уравнение относительно вспомогательного неизвестного.

$$a\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} + b\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} = c$$

Обозначим $tg\frac{\alpha}{2}=t$, получим:

$$a\frac{2t}{1+t^2}+b\frac{1-t^2}{1+t^2}=c$$

Решим данное уравнение и получим следующие ответы:

1. если $a^2+b^2<c^2$, то то у уравнения нет корней;

2. если $a^2+b^2\geq c^2,\ c\neq -b$, то $x=2arctg\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}+2n\pi,\ n\in Z$

3. если $c\neq -b$, то $x=\begin{cases}(2n+1)\pi\\ -2arctg\frac{b}{a}+2n\pi,\ n\in Z\end{cases}$

$$3\sin x + 4\cos x = 3$$

$$a = 3,\ b = 4,\ c = 3,\ a^2 + b^2 > c^2$$

- уравнение имеет решение.

$$3\frac{2t}{1+t^2} + 4\frac{1-t^2}{1+t^2} = 3 \ \Rightarrow \ 7t^2 - 6t - 1 = 0,\ t_{1,2} = \frac{3 \pm 4}{7}$$

$$t_1 = 1,\ \ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ \ x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in Z$$

$$t_2 = -\frac{1}{7},\ \ \frac{x}{2} = -arctg\frac{1}{7} + n\pi,\ \ x = -2arctg\frac{1}{7} + 2n\pi,\ n \in Z$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ x = -2arctg\frac{1}{7} + 2n\pi,\ n \in Z$

$$3\sin x+4\cos x=5, x\in Z$$ (1)

$$3\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+4\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=5$$ (2)

$$\frac{6tg\frac{x}{2}+4-4tg^2\frac{x}{2}-5-5tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=0$$

$$\begin{cases} 9tg^2\frac{x}{2}-6tg\frac{x}{2}+1=0 \\ 1+tg^2\frac{x}{2}\neq 0 \end{cases}$$

$$\left(3tg\frac{x}{2}-1\right)^2=0$$

$$tg\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{2}=arctg\frac{1}{3}+\pi n, n\in Z$$

$$x=2arctg\frac{1}{3}+2\pi n, n\in Z$$

При переходе от уравнения (1) к уравнению (2), могла произойти потеря корней, значит необходимо проверить, являются ли корни уравнения $\cos\frac{x}{2}=0$ корнями данного уравнения.

$$\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$$

$$x=\pi+2\pi n, n\in Z$$

Проверка.

Если $x=\pi+2\pi n, n\in Z$, тогда

$$3\sin(\pi+2\pi n)+4\cos(\pi+2\pi n)=5, x\in Z$$

$0+4(-1)=5$ - не верно, значит $x=\pi+2\pi n, n\in Z$ не является корнями исходного уравнения.

Ответ: $x=2arctg\frac{1}{3}+2\pi n, n\in Z$

11. Решение тригонометрических уравнений с помощью оценки левой и правой частей уравнения (метод оценок)

Пример 1.

$$2\sin^3 5x + 7\cos 5x = 9,$$
$$2\sin^3 5x \le 2,$$
$$7\cos 5x \le 7,$$
$$2\sin^3 5x + 7\cos^5 x \le 9,$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 5x = 1, \\ \cos 5x = 1, \end{cases}$$ что невозможно.

Ответ. Решений нет.

Пример 2.

$$\sin^{19} x + \cos^{19} x = \frac{\pi}{3},$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin^{19} x \le \sin^2 x, \\ \cos^{19} x \le \cos^2 x, \end{array}\right| \Rightarrow \sin^{19} x + \cos^{19} x \le 1,$$

$$\pi/3 > 1.$$

Пример 3.

$$\sin 3x + \sin 7x = 2,$$

$$\begin{cases} \sin 3x = 1, \\ \sin 7x = 1, \end{cases}$$

$$\sin 3x = 1,$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $x \in [0; 2\pi[,\ x \in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2} \right\}.$

Подставляем во второе уравнение:

$$\sin\frac{7\pi}{6} \neq 1;\ \sin\frac{35\pi}{6} \neq 1;\ \sin\frac{21\pi}{2} = 1.$$

Ответ. $\left\{ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Пример 4.

$$\cos^3 x \cos 2x = -1,$$

$$|\cos x| \le 1,\ |\cos 2x| \le 1,\ |\cos^3 x \cos 2x| \le 1,$$

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos 2x = -1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos x = -1, \\ \cos 2x = 1. \end{cases}$$

Если $\cos x = 1$, то $\cos 2x = \cos^2 x - 0 = 1 \neq -1$

Если $\cos x = -1$, то $\cos 2x = 1$

$$\begin{cases} \cos x = -1, \\ \cos 2x = 1. \end{cases} \Longleftrightarrow \cos x = -1.$$

Ответ. $\{\pi + 2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$

12. Решение тригонометрических уравнений содержащих тригонометрические функции под знаком радикала

Пример №1

$$\sqrt{1-\cos x} = \sin x$$

$$\begin{cases} \sin x \geq 0 & (1) \\ 1-\cos x = \sin^2 x & (2) \end{cases}$$

Решим уравнение 2.

$$1-\cos x = \sin^2 x$$

$$\cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\cos x(\cos x - 1) = 0$$

$\cos x = 0$ или $\cos x = 1$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \qquad x_2 = 2\pi n, n \in Z$$

Учитывая условие 1, sin x ≥ 0, решением системы будут серии :

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \;\; k \in Z$

$x = 2\pi n, \;\; n \in Z$