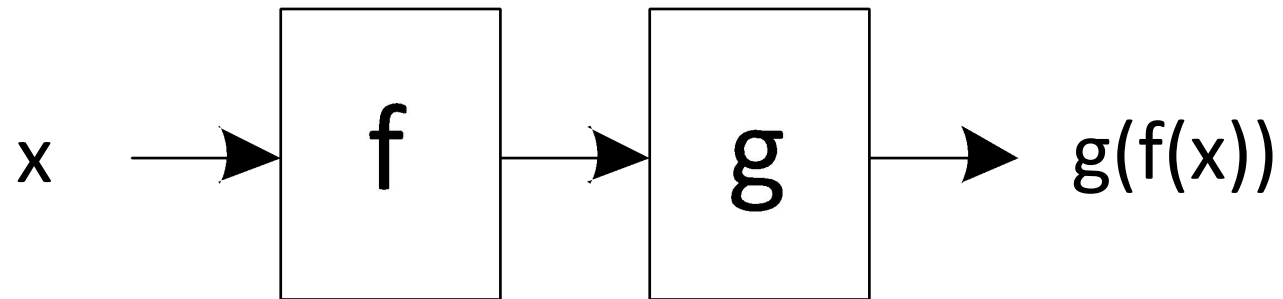


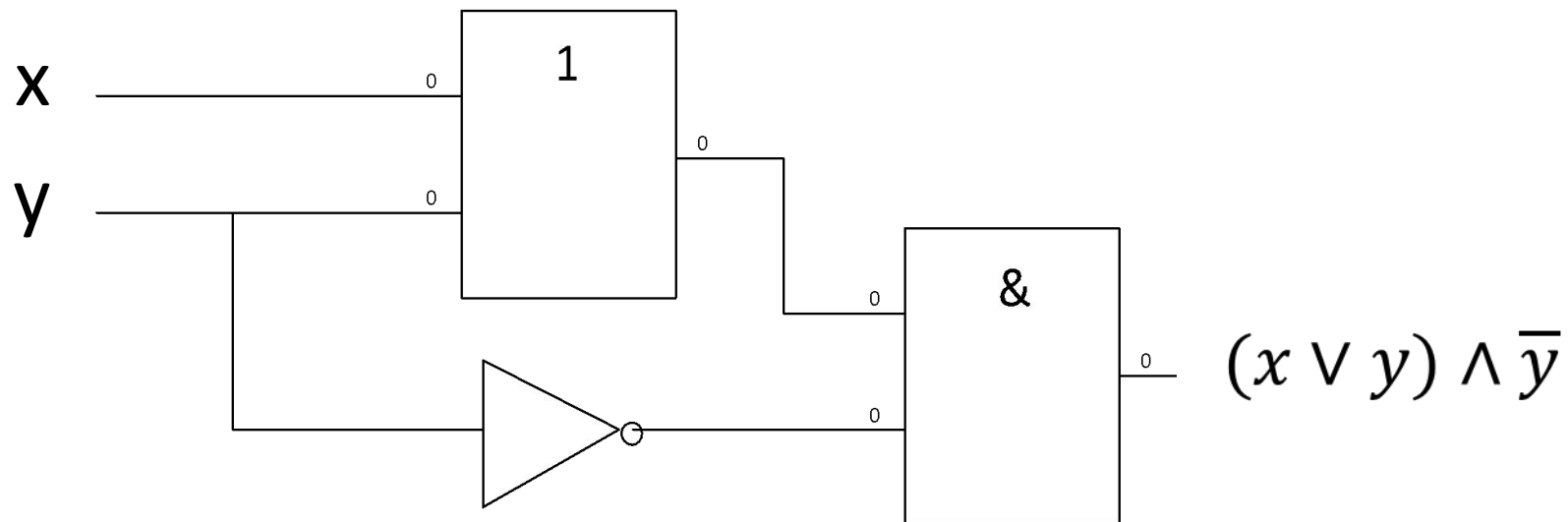
# Минимизация функций

Схемы функциональных элементов.  
Задача минимизации функций  
алгебры логики. Каноническая задача  
минимизации. Расчётный метод.  
Метод Квайна. Метод Карно.

# Схемы функциональных элементов



# Логические схемы



# Задача минимизации ФАЛ

Пример: сумматор, складывает два 16 битных числа.

Количество входов: **32**

Количество выходов **33**

СДНФ: 33 формулы по  $2^{32}$  конъюнкта, в каждом по 32 переменные.

# Задача минимизации ФАЛ

$x_1$	$x_2$	$x_3$	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$$1. F = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3$$

$$2. F = x_3 \bar{x}_2 \vee x_3 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 x_1$$

$$3. F = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$$

$$4. F = (x_1 \vee x_3) (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$$

# Задача минимизации ФАЛ

$$\begin{aligned} 5. F &= x_3 \bar{x}_2 \vee x_3 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 x_1 = x_3 (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) \vee \\ &\bar{x}_3 x_1 = x_3 \overline{x_2 x_2} \vee \bar{x}_3 x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. F &= (x_1 \vee x_3) (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \\ &= (x_1 \vee x_3) \overline{x_1 x_2 x_3} \end{aligned}$$

# Каноническая задача минимизации

Минимизировать число букв в нормальной  
форме

# Методы минимизации

- Метод непосредственных преобразований
- Метод Квайна-МакКласки
- Метод Петрика
- Табличный метод (карты Карно)
- Геометрический метод
- Метод факторизации
- Метод функциональной декомпозиции
- И др.



# Этапы минимизации

1. Склейка. Преобразование СДНФ в сокращённую ДНФ
2. Удаление лишних импликант.  
Преобразование сокращённой ДНФ в тупиковую (минимальную) ДНФ
3. Переход од ДНФ к минимальной форме

# Расчётный метод

1. этап. Склейка.

$$\begin{aligned} F = & \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \\ & \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \\ & \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \\ & \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \\ & \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \end{aligned}$$

Сокращённая ДНФ:  $F = \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_3$

# Расчётный метод

2 этап. Выявление лишних импликант:

$$F = \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_3$$

$$\bar{x}_1 x_3 = \bar{x}_1 x_3 (x_2 \vee \bar{x}_2) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$$

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 = 1 \Rightarrow \bar{x}_2 x_3 = 1$$

( $\bar{x}_2 x_3$  импликанта  $\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$ )

# Расчётный метод

$$F = \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_3$$

$$1. \bar{x}_1 x_3 = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$$

$$2. \bar{x}_2 x_3 = x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \leftarrow \text{поглощается 3 и 1}$$

$$3. x_1 \bar{x}_2 = x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \leftarrow \text{поглощается 2 и 4}$$

$$4. x_1 \bar{x}_3 = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

Тупиковые ДНФ:

$$F = \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_3$$

$$F = \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3$$

# Расчётный метод

3 этап. Магия:

$$F = \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_3 = \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) =$$
$$\bar{x}_1 x_3 \vee x_1 \overline{x_2 x_3}$$

# Метод квайна

1. Составить таблицу импликант:

	○	○			
	○			○	
			○	○	
			○		○

# Метод Квайна

2. Выделить существенные импликанты:

	○	●			
	○			○	
			○	○	
			○		●

# Метод Квайна

2. Выделить существенные импликанты.

	○	●			
	○			○	
			○	○	
			○		●

$$F = \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee \dots$$

3. Удалить избыточные столбцы и строки



# Метод Квайна

4. Выбрать минимальное покрытие максимальными интервалами.

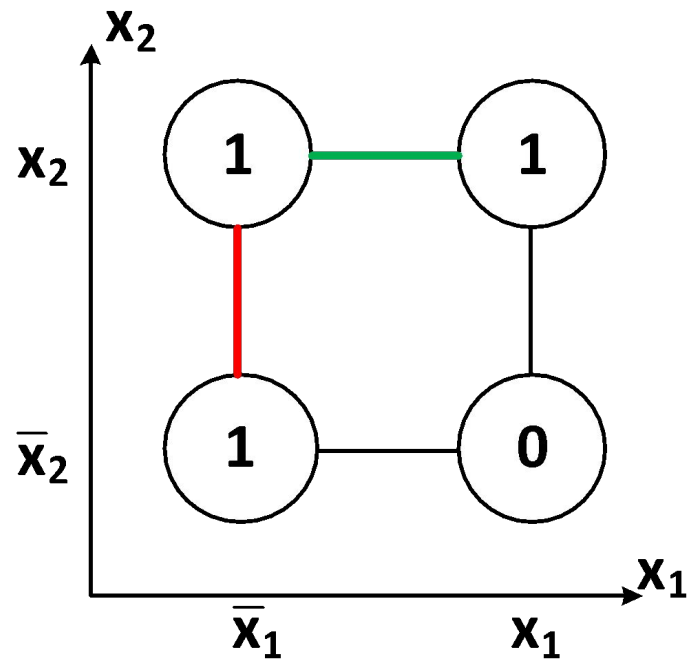
	○	●			
	○			○	
			○	○	
			○		●

$$F = \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3$$

$$F = \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2$$

# Геометрический метод

		F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

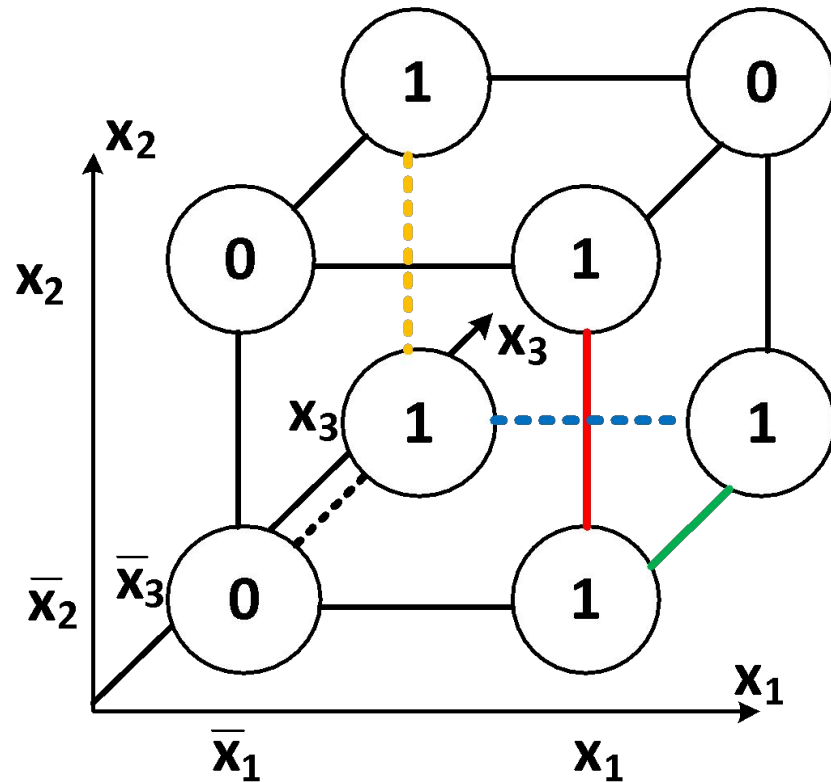


$$F_{\text{сднф}} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2$$

$$F_{\text{тднф}} = \bar{x}_1 \vee x_2$$

# Геометрический метод

$x_1$	$x_2$	$x_3$	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

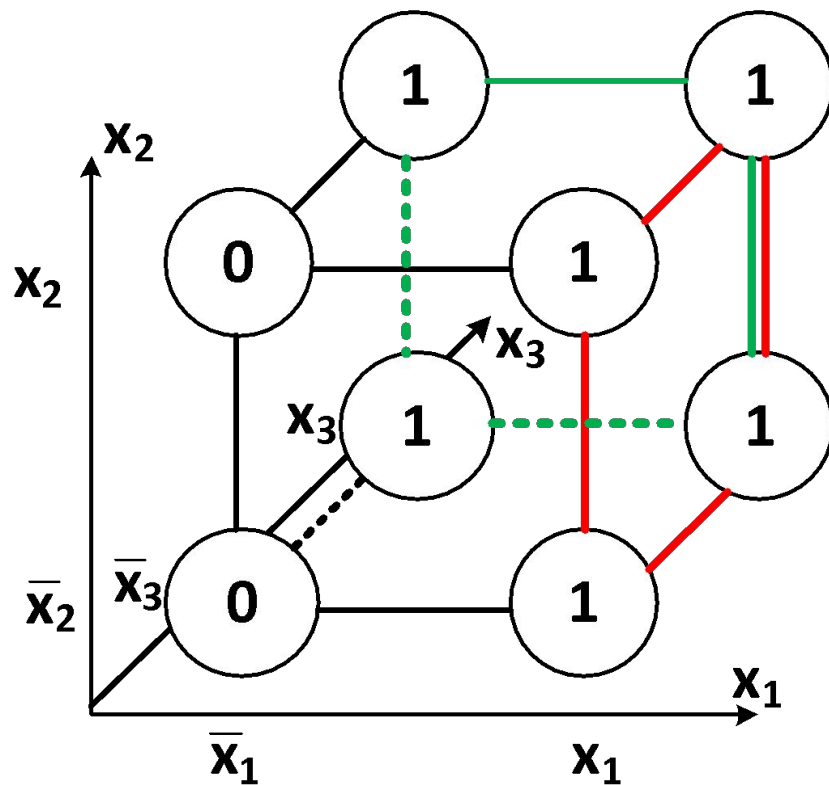


$$F = x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3$$

$$F = \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3$$

# Геометрический метод

$x_1$	$x_2$	$x_3$	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



$$F = x_1 \vee \bar{x}_3$$

# Метод карт Карно

		F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



		0	1
		1	1

$$F_{\text{ТДНФ}} = \bar{x}_1 \vee x_2$$

# Метод карт Карно

$x_1$	$x_2$	$x_3$	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0



	0	1	1	1
	1	1	0	0

$$F = x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3$$

$$F = \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3$$

# Метод карт Карно

$x_1$	$x_2$	$x_3$	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



	1	1	1	1
	1	1	0	0

$$F = x_1 \vee x_3$$

# Эталонная карта Карно для 3 переменных

N	$x_1$	$x_2$	$x_3$
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

	<b>7</b>	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>6</b>
	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>2</b>



# Эталонная карта для 4 переменных

	15	11	9	13	
	7	3	1	5	
	6	2	0	4	
	14	10	8	12	

# Правила выбора областей на картах Карно

- 1) Выбираются области  $1 \times 1$ ,  $1 \times 2$ ,  $1 \times 4$ ,  $2 \times 2$ ,  $2 \times 4$ ,  $4 \times 2$ ,  $4 \times 4, \dots$  клеток
- 2) В область могут включаться клетки, находящиеся по краям
- 3) Надо выбрать минимальное количество самых больших областей
- 4) Существуют эквивалентные покрытия

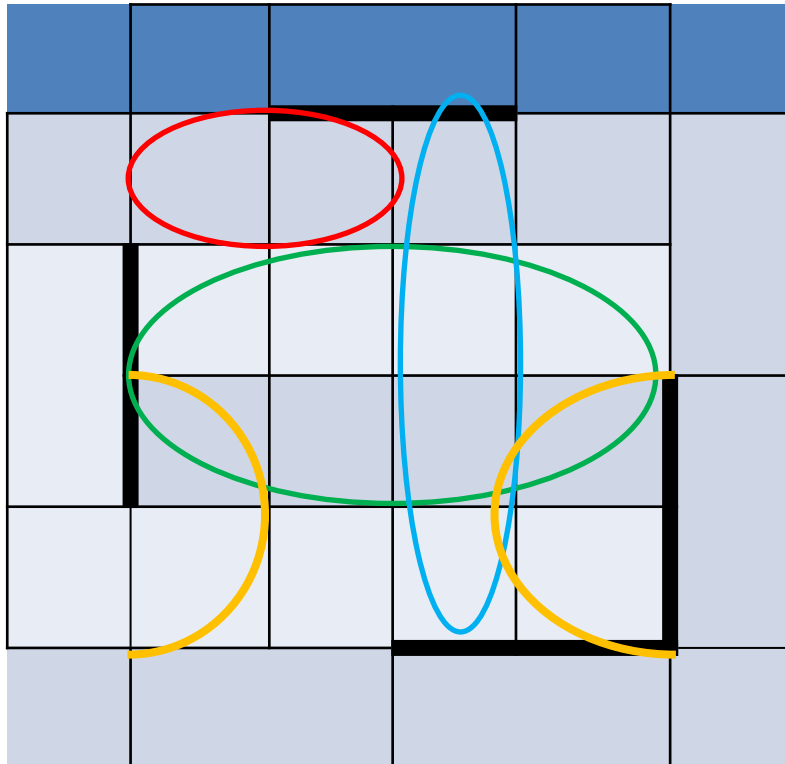
# Примеры склейки

	0	1	1	0
	1	1	1	1

	1	0	0	1
	0	1	0	1

	1	0	1	1
	0	1	1	0
	0	1	1	1
	1	0	1	1

# Запись ТДНФ по карте



$$x_1 x_3 x_4$$

$$\bar{x}_2 \bar{x}_3$$

$$\bar{x}_1$$

$$x_2 \bar{x}_4$$