ММИР

Лекции **14** часов,
Практические занятия – **14** часов
4 контрольные работы
Зачет

Лекции №№1-2

Пути решения инженерных задач:

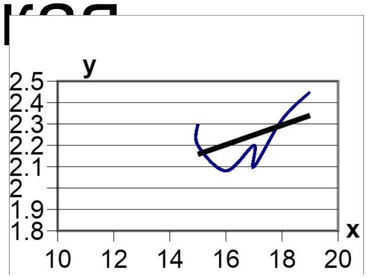
- **экспериментальный;**
- **анализ математической модели реального объекта (процесса)**

Схема ***экспериментальн.*** решения задачи (ЭМ):

- Разработка методики исследований и экспериментальных средств;
- Проведение эксперимента, в котором по возможности наиболее полно отображаются реальные условия взаимодействия объекта исследования с окружающей средой.

……………………………………………………….Повторные эксперименты Массив данных Систематизация и статистическая обработка

X \Y	23	25	27
20	1	2	7
22	2	0	3
24	3	2	1
26	5	2	2
28	17	9	3
m_y	28	15	16



Изображение в виде

- таблиц,
- графиков,
- эксперимент. функциональных зависимостей.

ЭМ

Преимущество:

с помощью правильно поставленного и технически оснащенного эксперимента часто удается получить *надежные и достоверные результаты*

Недостаток:

результаты и закономерности, полученные в данном конкретном эксперименте, *не могут быть использованы для обобщений и прогнозов* результатов других, даже подобных экспериментов.

ММ

Недостаток:

не всегда возможно решение сложных прикладных задач.

Преимущество:

там, где математическое решение возможно эти методы имеют большие возможности для *обобщений*, т.е. применения полученных результатов и закономерностей *для других подобных задач.*

ММИР

ОДУ

УМФ

Методы решения ДУ

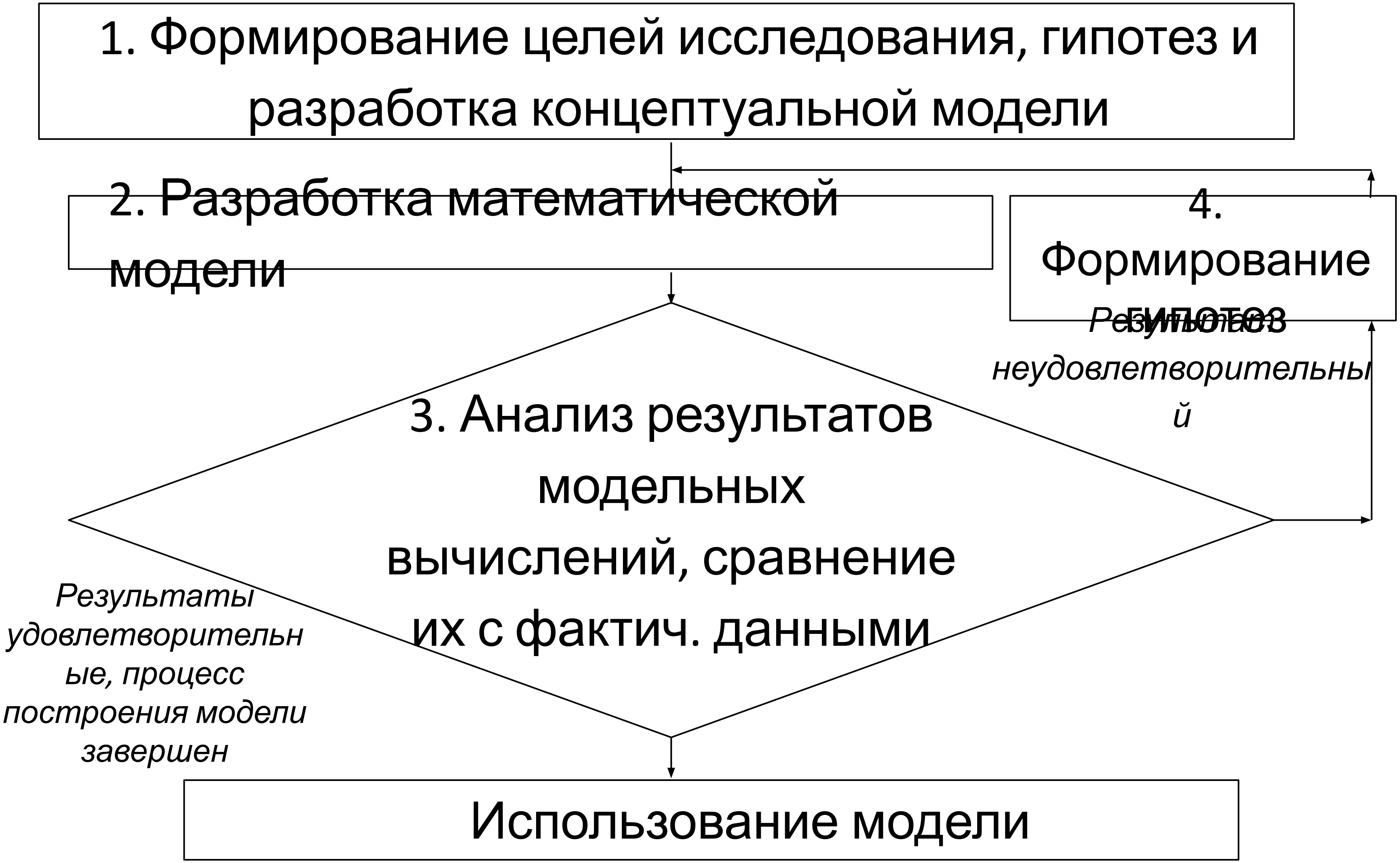
- Графические
- Аналитические
- Приближенные
- ***Численные***

Термин «***<u>модель</u>***» (от лат. «modulus»- образец, норма, мера) - это объект, замещающий оригинал и отображающий его наиболее важные черты и свойства для данного исследования.

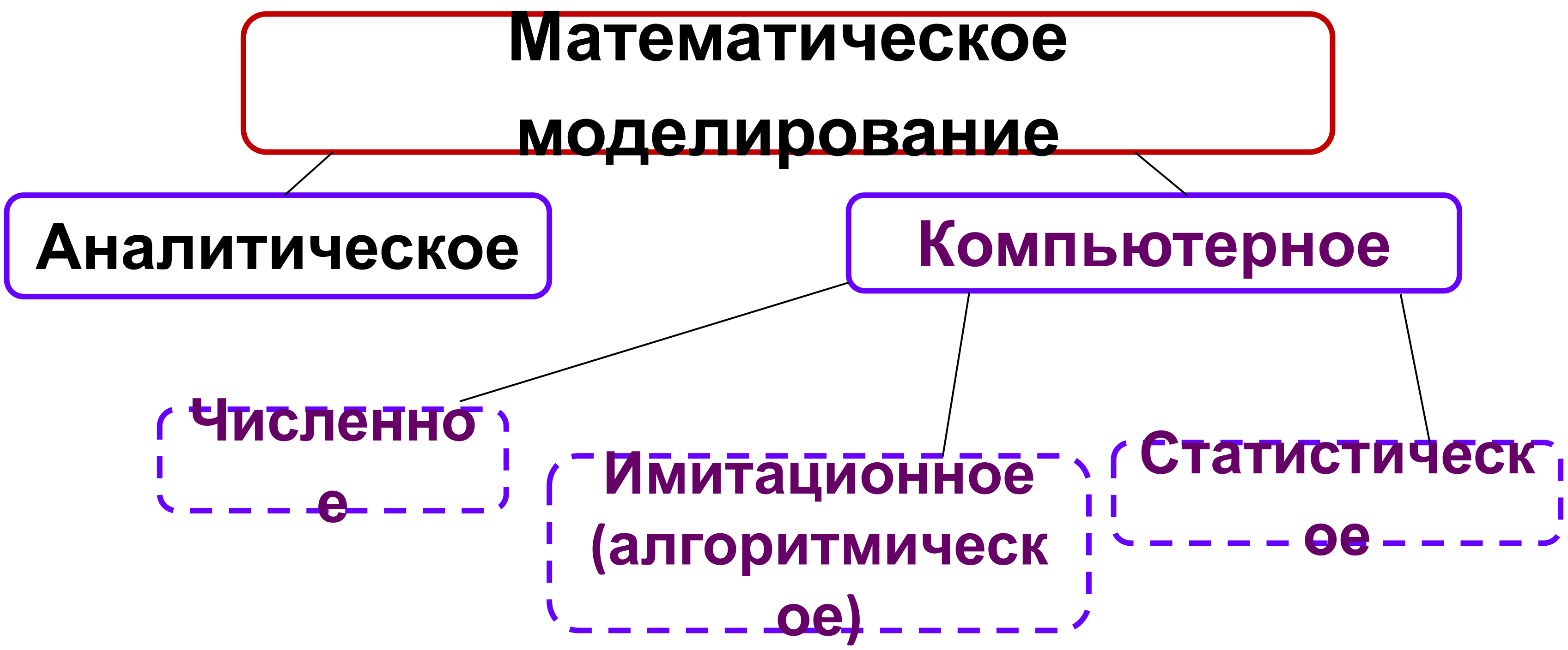
В *широком смысле* ***модель*** – это любая система, в каком-то отношении заменяющая либо способная заменить «оригинал», который интересует исследователя.

Математическая модель – это абстракция реальной действительности, в которой отношения между *реальными* элементами (интересующими исследователя), заменены отношениями между *математическими категориями*. Эти отношения записываются в виде *уравнений и* (*или*) *неравенств,* соотношениями формальной логики между показателями (переменными), которые характеризуют функционирование реальной моделируемой системы.

Основные этапы процесса математического моделирования



Классификация видов математической модели

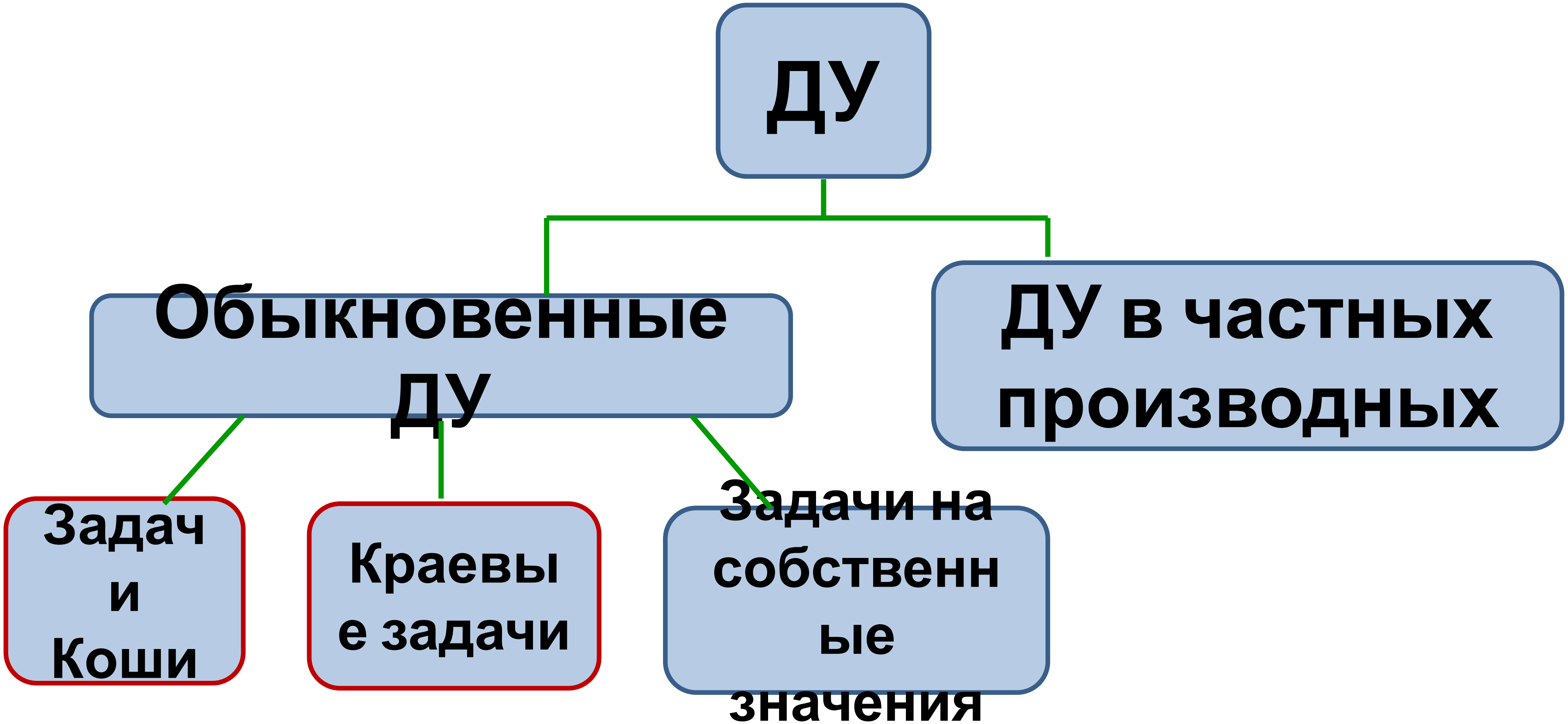


Цикл вычислительного процесса:

объект исследования →
физическая модель →
математическая модель →
численный алгоритм →
программа →
расчет на ЭВМ →
сравнение с экспериментальными данными, управление объектом

Дифференциальные уравнения (ДУ) и методы их решения

Любой физический процесс, в котором рассматривается степень изменения одной переменной относительно другой, описывается ДУ.



ОДУ – уравнение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию $y(x)$ и ее производные.

Если в ДУ неизвестной является функция *нескольких переменных* (т.е. эта функция входит в уравнение вместе со своими частными производными), то ДУ называется уравнением в частных производных.

Порядок ДУ – порядок старшей из производных

<u>Общий вид ОДУ n - порядка</u>:

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \ x \in [a, b] \qquad (1)$$

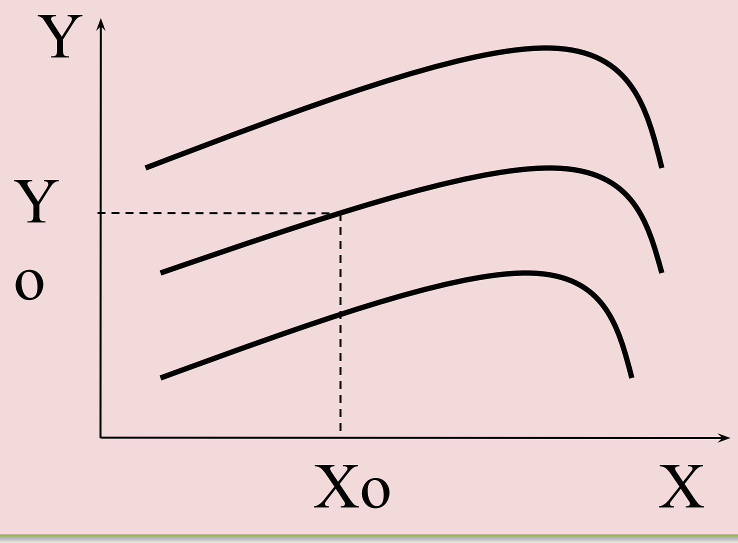
<u>Решением (интегралом) ДУ</u> называется функция, которая обращает (1) в верное тождество.

Общее решение уравнения (1) содержит ***n*** произвольных постоянных, т.е. является **неоднозначным**

$$y = \varphi\,(x, C_1, C_2 ..., C_n), \; x \in [a, b]$$

Общее решение задает ***поле решений***, т.е. совокупность кривых.

Для получения **частного решения** (однозначного) необходимо иметь набор дополнительных условий для определения постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$.



Дополнительные условия включают задание значений функции и ее производных в определенной точке, т.е. дают однозначное решение, т.к. позволяют выбрать кривую

В зависимости от способа задания дополнительных условий задачи решения ДУ решения делятся на

задачу с начальными условиями (**задачу Коши**)

задачу с краевыми условиями (**краевую задачу**)

Начальные условия – определяют значения функции и ее производных до (n – 1) порядка включительно в одной точке отрезка интегрирования уравнения (1)

Обычно в начале $\boldsymbol{x = a}$

Краевые (граничные) условия – определяют значения функции и ее производных до (n – 1) порядка включительно в нескольких точках отрезка интегрирования

Обычно в начале и конце

$\boldsymbol{x = a}$ и $\boldsymbol{x = \mathrm{b}}$

$$\boxed{y^{(p)}(x) = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})}$$

$\sim$

$$y'_k = y_{k+1}(x), \qquad 0 < k < p-2$$
$$y'_{p-1}(x) = f\big(x, y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}\big), \;\; y_0(x) = y(x)$$

⇓

Произвольную систему ДУ **любого** порядка можно свести к некоторой эквивалентной системе уравнений **1-го** порядка.

ЗАДАЧА КОШИ для ОДУ 1-го порядка

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

$x \in [a, b]$, x_0 – точка, где задано начальное условие.

Решением задачи Коши является функция $y=y(x)$, удовлетворяющая ДУ и начальному условию.

Если правая часть $f(x, y)$ непрерывна в области ***R:*** $|x - x_0| < a, |y - y_0| < b$, то существует по меньшей мере одно решение $y = y(x)$, определенное в некоторой окрестности $|x - x_0| < h$, где $h > 0$.

Это решение единственно, если в ***R*** выполнено ***условие Липшица:*** $|f(x,\tilde{y}) - f(x,y)| \le N|\tilde{y} - y|$.

Если $f(x, y)$ имеет в ***R*** ограниченную производную $f_y'(x,y)$, то $N = max|f_y'(x,y)|$ при $(x,y) \in$ ***R***.

Методы решения ЗК

точные

приближенные

аналитические

численные

дают приближенное решение в виде

некоторого аналитического выражения <u>(формулы)</u> искомой функции (ряда, интеграла и т.д.)

<u>таблицы</u> значений искомой функции в выбранных точках интервала

Численные методы решения ДУ

одношаговые

многошаговые

В ***1-шаговых методах*** (Эйлера, Рунге-Кутта, решение уравнений с помощью рядов Тейлора) используется информация о самой интегральной кривой в предыдущей точке.

Недостаток: трудно оценить допускаемую ошибку (погрешность) вычисления.

В ***многошаговых методах*** следующую точку интегральной кривой можно получить, не делая повторных вычислений функции (как в 1-шаговых), а используя приемы прогноза и корреляции.

Недостаток: необходимость получения некоторых начальных точек, сложность организации вычислительной процедуры.

ЧМ – это алгоритмы вычисления приближенных (а иногда и точных) значений искомого решения на некоторой выбранной сетке значений аргумента. Решение при этом получается *в виде таблицы*.

— ЧМ не позволяют найти общего решения, а могут дать какое-то частное решение.

+ ЧМ применимы к очень широким классам уравнений и всем типам задач для них. При появлении ЭВМ – это основные методы.

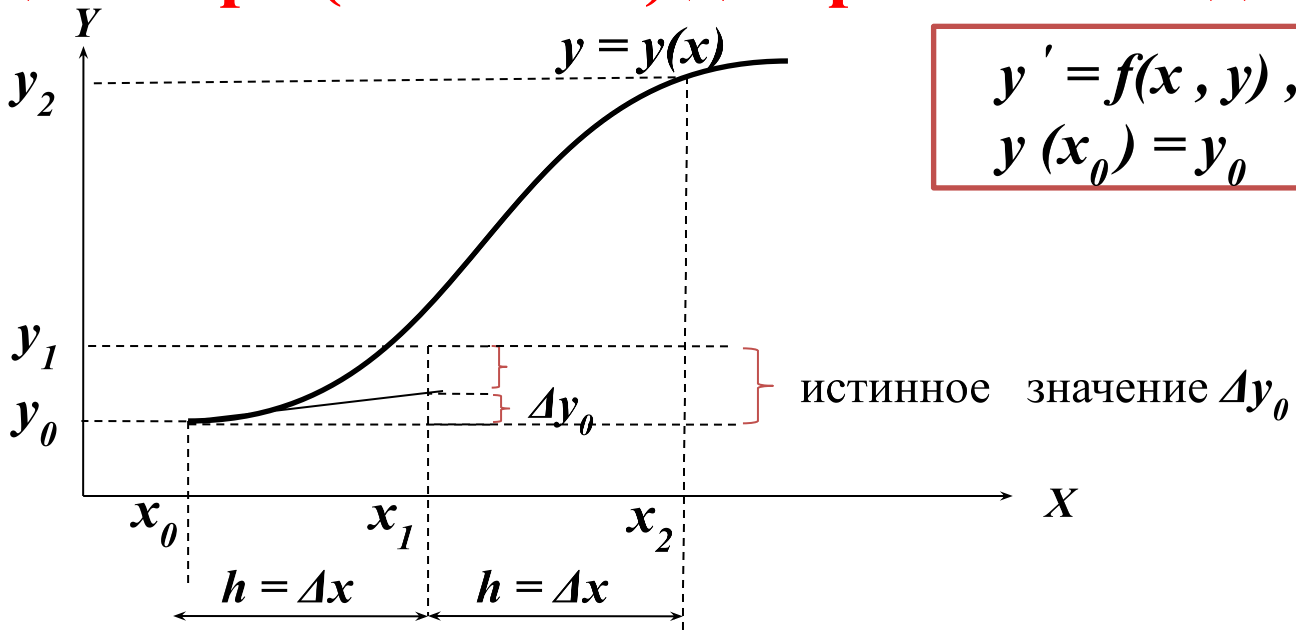
ЧМ применяются только для хорошо обусловленных задач**!!!** ДУ наз. ***плохо обусловленным***, если небольшие изменения начальных условий или эквивалентные этим изменениям небольшие погрешности ЧМ могут сильно исказить решение.

Пример: $y' = y - x, \quad 0 \le x \le 100, \; y(0)=1.$

Общее решение : $y = 1 + x + Ce^x$. При $x=0$ $C=0$, а $\mathbf{y(100)=101}$.

При небольшом изменении начального условия $\tilde{y}(0)=1.000001$ слегка меняется постоянная $\hat{C}=10^{-6}$, но тогда

Метод Эйлера (ломаных) для решения задачи Коши



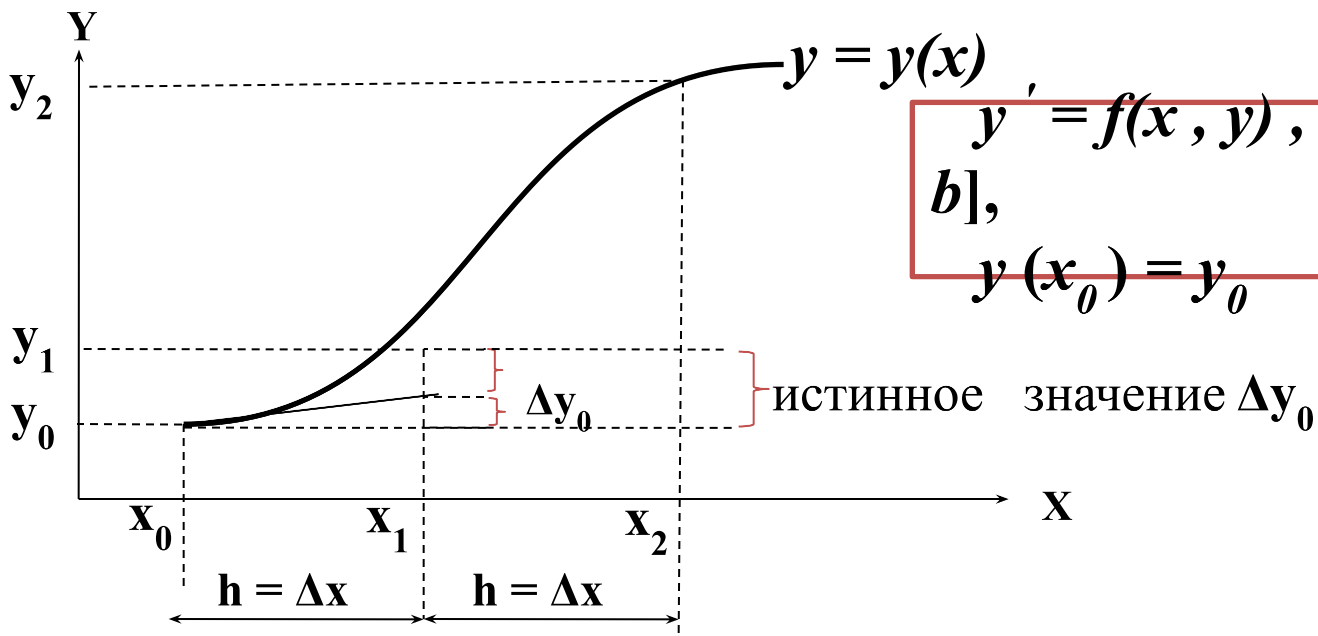
$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b],$$
$$y(x_0) = y_0$$

Выбираем достаточно малый шаг $h > 0$ и строим систему равноотстоящих точек $x_i = a + i \cdot h$, $i = 0, 1, \ldots n$ или $x_i = x_0 + i \cdot h$

Основная идея метода Эйлера – использование **геометрического смысла первой производной**

Заменим производную в т. x_i правой разностью $\quad y_i' = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h}$

Для $i = 0 \qquad y_0' = \dfrac{y_1 - y_0}{h}$



$$\boxed{y' = f(x, y), \ x \in [a, b], \quad y(x_0) = y_0}$$

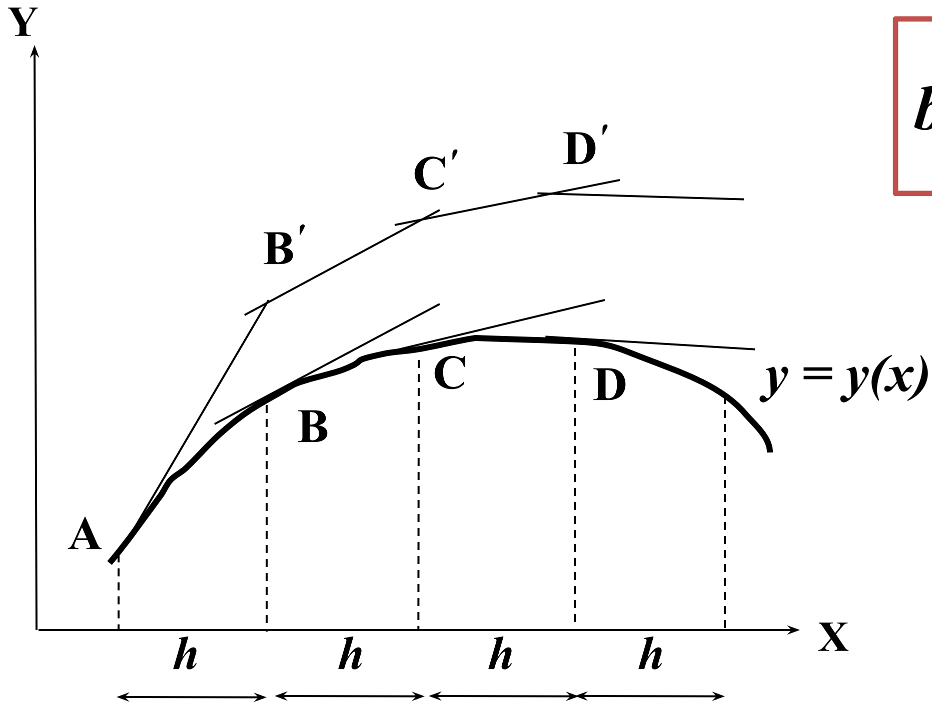
С другой стороны $y_i' = f(x_i, y_i)$, т.о.

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i), \qquad i = 0, 1, \dots n$$

Откуда $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$ $\quad i = 0, 1, \dots n$

Обозначим $h \cdot f(x_i, y_i) = \Delta y_i$ тогда

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \Delta y_i}$$



$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b]$$
$$y(x_0) = y_0$$

Порядок точности – 1-й O(*h*)

Модификации метода Эйлера имеют 1-й – O(*h*) и 2-й O(h^2)порядок точности

Недостатки метода: малая точность и систематическое накопление ошибок.

Кривая ABCD – график решения $y = y(x)$.

Фактически заменяем искомую кривую $y = y(x)$ некоторой ломаной, звенья которой параллельны касательным, проведенным к графику функции $y = y(x)$ в точках x_i.

Ломаная A B′ C′ D′– график приближенного решения

По мере удаления от начальной точки $x = x_0$ ломаная будет удаляться от истинной кривой и **погрешность вычисления накапливается.**

Метод Рунге – Кутта

$y' = f(x, y)$, $x \in [a, b]$,

$y(x_0) = y_0$

Выбираем достаточно малый шаг $h > 0$ и строим систему равноотстоящих точек $x_i = a + i \cdot h$, $i = 0, 1, \dots n$ или $x_i = x_0 + i \cdot h$

Основная идея метода

Проинтегрируем ДУ из задачи Коши в пределах от x до $x + h$.

Получим равенство

$$y(x+h) = y(x) + h \int_{x}^{x+h} f(t, y(t))dt$$

которое посредством интеграла связывает ДУ в двух точках, удаленных друг от друга на расстояние h.

Если решать этот интеграл методом левых прямоугольников

$$\int_a^b \varphi(t)dt = (b-a)\varphi(a),$$ то получим **метод Эйлера.**

Т.о. метод Эйлера – это метод **Рунге – Кутта 1-го порядка.**

Наибольшее распространение получила схема метода Рунге Кутта 4-го порядка точности

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1$$

$$\Delta y_i = 1/6\,[\,K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}],$$

$$K_1^{(i)} = h\,f\,(x_i, y_i)$$

$$K_2^{(i)} = h\,f\,(x_i + h/2,\; y_i + K_1^{(i)}/2)$$

$$K_3^{(i)} = h\,f\,(x_i + h/2,\; y_i + K_2^{(i)}/2)$$

$$K_4^{(i)} = h\,f\,(x_i + h,\; y_i + K_3^{(i)})$$

+ **Преимущества** методОВ Рунге-Кутта:

- Достаточно высокая точность (кроме метода Эйлера);
- Являются явными (т.е. значение y_{i+1} вычисляется по ранее найденным значениям за определенное число действий по определенным формулам);
- Возможность производить вычисления с переменным шагом (там, где функция быстро меняется, нетрудно уменьшить шаг, и наоборот);
- Для начала расчета достаточно выбрать сетку x_i и задать значение y_0, далее вычисления идут по одним и тем же формулам.

– **Недостатки**:

- На каждом шаге приходится вычислять функцию $f(x,y)$ в нескольких точках;
- Трудности при получении оценки погрешности вычисления.

Погрешность метода Рунге-Кутта ≈ h^5. При выборе шага h можно руководствоваться критерием:

$$q = \left|\frac{k_2 - k_3}{k_1 - k_2}\right|$$

Если $q < 10^{-2}$,то шаг выбран правильно, в противном случае шаг нужно уменьшить.

Для практической оценки погрешности методов Рунге-Кутта порядка **p** используют «**принцип Рунге**», согласно которому погрешность метода вычисляется (приближенно) по формуле:

$$y(x_i + 2h) - {y_{i+1}}^{h} \approx \frac{{y_{i+1}}^{h} - {y_{i+1}}^{2h}}{2^p - 1}$$

(для метода Эйлера *p=1*, для метода Рунге-Кутта 4-го порядка точности *p=4*).

Лекция №3

Решение краевых задач (КЗ) для ОДУ

Постановка линейной краевой задачи для ОДУ

В общем случае КЗ состоит в нахождении функции $y = y(x)$ для интервала $x \in [a, b]$, удовлетворяющей ДУ и краевым условиям.

$$\begin{cases} p_0(x)\, y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = f(x),\ x \in [a, b], & \textbf{(1)} \\ \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_\kappa^\nu y^{(k)}(a) + \beta_k^\nu y^{(k)}(b)) = \gamma_\nu \quad , \quad \nu = 1, 2, \ldots, n & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Величины α_k^ν, β_k^ν и γ_ν — заданные постоянные. $p_0(x)$, $p_1(x)$ ... $p_n(x)$, $f(x)$ – заданные функции.

В уравнение **(2)** входят n уравнений, из которых определяют n постоянных общего решения..

Понятие функционала и оператора

Понятие **функционала** связано с соответствием между множеством определенного класса функций и множеством чисел.

Если каждой функции $y = f(x)$ определенного класса ставится в соответствие по некоторому закону определенное числовое значение переменной I, то эту переменную называют функционалом от одной функциональной переменной

$$I = I[y] = I[y(x)] = I[f(x)],$$

y – независимая переменная для функционала.

Областью определения функционала является определенный класс функций.

Понятие оператора

Оператор – закон преобразования функций - прообразов в функции-образы.

Оператор дифференцирования действует по закону

$$D\,f = f^{I}$$

Пример

$$D\,(\sin x) = \cos x$$

Функция – прообраз **функция - образ**

$$D\,(x^3) = 3\,x^2$$

Функция – прообраз **функция - образ**

$$\begin{cases} p_0(x)\, y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = f(x),\ x \in [a, b], & (1) \\ \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k^{\nu} y^{(k)}(a) + \beta_k^{\nu} y^{(k)}(b)) = \gamma_{\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n & (2) \end{cases}$$

Введем в рассмотрение дифференциальный оператор Ly и функционал $l_{\nu}[y]$, тогда (1) и (2) можно записать в виде

$$\begin{cases} Ly = f(x), & x \in [a,b] \\ l_{\nu}[y] = \gamma_{\nu}, & \nu = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \qquad (3)$$

или при $n = 2$

$$\begin{cases} Ly = f(x), & x \in [a,b] \\ l_1[y] = \gamma_1 \\ l_2[y] = \gamma_2 \end{cases} \qquad (4)$$

КЗ – **однородная**	КЗ – **полуоднородная**
$\begin{cases} f(x) = 0 \\ \gamma_{\nu} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) = 0 \\ \gamma_{\nu} \neq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) \neq 0 \\ \gamma_{\nu} = 0 \end{cases}$

Теорема: Для того, чтобы существовало единственное решение неоднородной КЗ, необходимо и достаточно, чтобы однородная КЗ имела только тривиальное решение $y(x) \equiv 0$

Метод конечных разностей (приближенный численный метод)

Для ОДУ 2-го порядка

$$\begin{cases} p_0(x)\,y^{II} + p_1(x)\,y^{I} + p_2(x)\,y = f(x), \qquad x \in [a, b], \\ \alpha_0^1 y(a) + \cancel{\beta_0^1} y(b) + \alpha_1^1 y'(a) + \cancel{\beta_1^1} y'(b) = \gamma_1 \\ \cancel{\alpha_0^2} y(a) + \beta_0^2 y(b) + \cancel{\alpha_1^2} y'(a) + \beta_1^2 y'(b) = \gamma_2 \end{cases}$$

Пусть $p_0(x)=1$, $\beta_0^1 = \beta_1^1 = 0$ $\alpha_0^2 = \alpha_1^2 = 0$ $\gamma_1 = \alpha$ $\gamma_2 = \beta$

$p_1(x) = p(x)$, $p_2(x) = q(x)$, т.е.

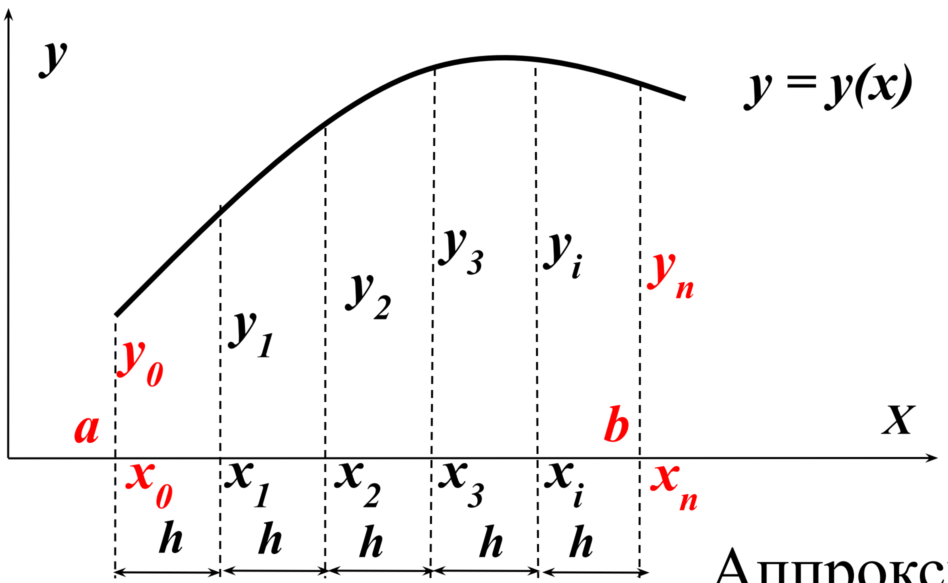
$$\begin{cases} y^{II} + p(x)\,y^{I} + q(x)\,y = f(x), \qquad x \in [a, b], & \textbf{(5)} \\ \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = \alpha & \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \beta & \textbf{(6)} \end{cases}$$

Разобьем $[a, b]$ на n равных частей длиной $h = (b - a) / n$.

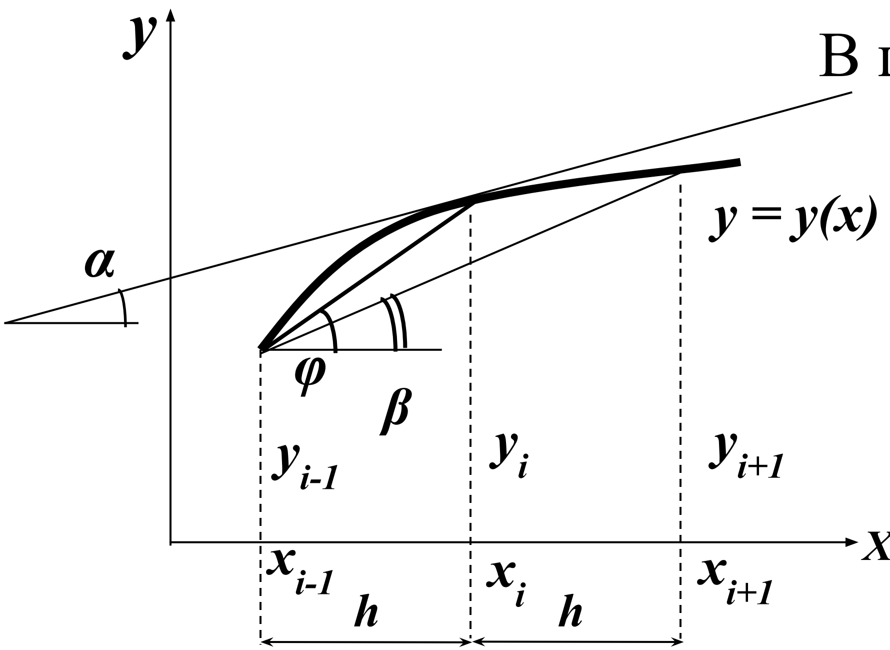
Координаты узлов : $x_i = a + i \cdot h, \quad i = 0, 1, \ldots n$.

x_0 и x_n – граничные, $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}$ – внутренние.

Обозначим $y(x_i) = y_i$, $p(x_i) = p_i$, $f(x_i) = f_i$.



Аппроксимируем производные конечно – разностными отношениями, которые позволяют заменить ДУ на СЛАУ, относительно неизвестных значений функции y_i в точках x_i $(i = 0, 1\ldots n)$



В центральном узле x_i заменим

$y_i' = tg(\alpha)$ на

$$y_i' = tg\beta = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad (7)$$

Формулы **центральных разностей** для внутренних узлов

$$y_i'' = (y_i')' = \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h}\right)' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad (8)$$

Для граничных узлов используем **правые (левые) разности**

$$y_0' = \frac{y_1 - y_0}{h}, \qquad y_n' = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \quad (9)$$

$$\begin{cases} y_i^{II} + p(x_i)\, y_i^{I} + q(x_i)\, y_i = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, n-1, & (5) \\ \alpha_0 y(x_0) + \alpha_1 y'(x_0) = \alpha & (6) \\ \beta_0 y(x_n) + \beta_1 y'(x_n) = \beta \end{cases}$$

$$y_0' = \frac{y_1 - y_0}{h}; \qquad y_n' = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}$$

В ДУ (5) производные заменяются центральными разностями для каждого внутреннего узла (8), а в уравнениях (6) - разностями для краевых узлов (9).

В результате система диф. уравнений преобразуется в **СЛАУ**

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \quad i = 1, \ldots, n-1 & (10) \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = \alpha \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = \beta & (11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i & \textbf{(10)} \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = \alpha & \\ & \textbf{(11)} \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = \beta & \end{cases}$$

После преобразований получим

$$\begin{cases} (\alpha_0 h - \alpha_1) y_0 + \alpha_1 y_1 = \alpha h & \textbf{(12)} \\ (1 + \dfrac{h}{2} p_i) y_{i+1} + (h^2 q_i - 2) y_i + (1 - \dfrac{h}{2} p_i) y_{i-1} = f_i h^2 \;, \; \boldsymbol{i = 1,2 \ldots, n\text{-}1} & \\ -\beta_1 y_{n-1} + (\beta_0 h + \beta_1) y_n = \beta h & \end{cases}$$

Полученная система **(12)** представляет собой **СЛАУ с трёхдиагональной матрицей коэффициентов.**

Решается методом прогонки.