Выпускная квалификационная работа

МНОГОЛИСТНЫЕ И МНОГОЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Никифорова Т. А.

АКТУАЛЬНОСТЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Конформные отображения представляют весьма удобный математический аппарат для решения довольно широкого круга задач математической физики и прикладной математики. С конформными отображениями сталкиваются, прежде всего, как с графическими образами аналитических функций.

Также конформные отображения имеют приложения в механике, физике и технике, прежде всего – для расчетов плоских гармонических векторных полей в гидро- и аэродинамике, теории фильтрации, теории электрических и магнитных полей, теории теплопередачи.

ПРЕДМЕТ И ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Предметом исследования данной работы являются простейшие многолистные и многозначные функции.

Целью является изучение отображений, осуществляемых с помощью этих функций.

СТРУКТУРА

- Введение.
- Теоретическая часть.
- Практическая часть.
- Заключение.
- Список литературы.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

- §1. Функции комплексного переменного, дифференцируемость и аналитичность. Конформные отображения.
- §2. Элементарные многозначные и многолистные функции.

Функцией комплексной переменной называется отображение f некоторого подмножества D комплексной плоскости во множество $\mathbb{C}$:

$$f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}.$$

Если существует конечный $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}$, то он называется производной функции f в точке z_0, и обозначается $f'(z_0)$.

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Геометрический смысл аргумента и модуля производной

Геометрический смысл аргумента производной: аргумент производной в точке z_0 равен углу поворота касательной к кривой L в точке z_0 при переходе к её образу Λ и к точке $w_0 = f(z_0)$.

Геометрический смысл модуля производной: модуль производной $f'(z_0)$ равен растяжению окрестности точки z_0 при отображении посредством функции $w = f(z)$.

Конформное отображение

Отображение $w = f(z)$ называется конформным (т.е. сохраняющим форму) в точке z_0, если оно сохраняет углы между кривыми и обладает свойством постоянства растяжения окрестности точки.

Конформное отображение, при котором направление отсчета углов сохраняется, называется конформным отображением I рода.

Конформное отображение, при котором направление отсчета углов меняется на противоположное, называется конформным отображением II рода.

Если каждому z соответствует лишь одно значение $w = f(z)$, то функция называется однозначной.

Функция $w = f(z)$ называется многозначной функцией на множестве D, если некоторыми значениям $z \in D$ соответствует более чем одно значение w.

Если для любых z_1, z_2, принадлежащих области D, таких что $z_1 \neq z_2$, выполнено $f(z_1) \neq f(z_2)$, то аналитическая функция $w = f(z)$ называется однолистной в области D.

Если в области D существует, по крайней мере, одна пара точек $z_1 \neq z_2 : f(z_1) = f(z_2)$, то функцию $f(z)$ называют многолистной в области D.

Если отображение $w = f(z)$ является многолистным на области D, то обратное отображение $z = f^{-1}(w)$ является многозначной функцией.

СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ И РАДИКАЛ

Степенной называется функция вида $w = z^n \ (n \in \mathbb{N}, n > 1)$, являющаяся многолистной и аналитической функцией. Функция $w = z^n$ обладает основными свойствами функции $y = x^n$ действительного переменного. Областью однолистности функции $w = z^n$ является любой угол с вершиной в начале координат и раствором $\frac{2\pi}{n}$:

$$D_k : \varphi_0 + \frac{2k\pi}{n} < \operatorname{Arg} z < \varphi_0 + \frac{2(k+1)\pi}{n}, k = 0,1,\ldots,n-1.$$

Функцией, обратной к степенной, является радикал $w = \sqrt[n]{z}$. Она является многозначной (n – значной). Эти n значений располагаются в вершинах правильного n – угольника, вписанного в окружность $|w| = \sqrt[n]{|z|}$.

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Показательной функцией комплексного переменного называется функция, обозначаемая $\exp z$ и определяемая формулой $\exp z = e^{x}(\cos y + i \cdot \sin y)$.

Отметим некоторые свойства:

1) если $z = x \in \square$, то $\exp z = \exp x = e^{x}$;

2) $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$;

3) $\exp z \neq 0$ для любых $z \in \square$;

4) $\exp(z + 2\pi i) = \exp z$;

5) если $z = x + i \cdot y \to \infty$ так, что $x \to +\infty$, то $\exp z \to \infty$;
если $z = x + i \cdot y \to \infty$ так, что $x \to -\infty$, то $\exp z \to 0$;

6) $(\exp z)' = \exp z$.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Функция, обратная к $z = e^w = e^u(\cos v + i\sin v)$, определена для любых $z \neq 0$ и $z \neq \infty$ и задается формулой $w = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}z$.

Эта функция является многозначной, называется логарифмической и обозначается $\mathrm{Ln}z$: $w = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$.

Значение логарифма $\ln|z| + i\arg z$, соответствующее $k = 0$, называется главным значением и обозначается $\ln z$: $\ln z = \ln|z| + i\arg z$.

Отметим некоторые свойства:

$$\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}z_1 + \mathrm{Ln}z_2, \mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\,z_1 - \mathrm{Ln}\,z_2$$

Заметим, что эти равенства означают равенство множеств.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Функции $\cos z = \dfrac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$ и $\sin z = \dfrac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$ называют основными тригонометрическими функциями – косинусом и синусом z.

При $z = x \in \mathbb{R}$ они принимают действительные значения, совпадающие соответственно с $\cos x$ и $\sin x$.

Отметим некоторые свойства:

1) $\cos z$ – четная функция, $\sin z$ – нечётная функция;

2) $\cos z$ и $\sin z$ – периодические функции с периодом 2π;

3) Для функций $\cos z$ и $\sin z$ справедливы основные формулы тригонометрии;

4) $\cos z = 0$ при $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, $\sin z = 0$ при $z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

5) Функции $\cos z$ и $\sin z$ являются аналитическими в $\mathbb{C}$.

6) $\left|\cos(x+iy)\right| \xrightarrow[y\to\infty]{} \infty$, $\left|\sin(x+iy)\right| \xrightarrow[y\to\infty]{} \infty$.

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Многозначная функция $w = \arccos z$ выражается через логарифм и квадратный корень:

$$w = \arccos z = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right).$$

Функция $\mathrm{arctg} z$ выражается через логарифм от дробно-линейной функции:

$$w = \mathrm{arctg} z = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

В этой части работы решен ряд задач по теме исследования. Их можно разделить на два типа:

- нахождение образа данной области при отображении посредством заданной функции;
- нахождение функции, осуществляющей отображение заданной области на другую область.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!