МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Определения

Пусть на вероятностном пространстве заданы случайные величины $\xi_1 = \xi_1(\omega), \xi_2 = \xi_2(\omega), \dots, \xi_n = \xi_n(\omega), \quad \omega \in \Omega.$

Определение. *n*- **мерной случайной величиной** называется вектор

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

Определение. Функцией распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ называется функция

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n), \ \forall x_i \in (-\infty, \infty) \qquad (1)$$

Свойства функции распределения

1. Монотонность по каждому аргументу.

$$F(x_1, x_2, \ldots x_i' \ldots, x_n) \ge F(x_1, x_2, \ldots x_i'' \ldots, x_n), \quad x_i' > x_i''$$

2. Непрерывность слева по каждому аргументу.

$$\lim_{x_i \to x_{i_0} - 0} F(x_1, x_2, \ldots x_i \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, \ldots x_{i_0} \ldots, x_n), \quad \forall x_i \in (-\infty, \infty)$$

3. $$\lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ \cdots\cdots \\ x_n \to \infty}} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(\infty, \infty, \ldots, \infty) = 1$$

$$\lim_{x_i \to -\infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, \ldots, -\infty, \ldots, x_n) = 0, \quad \forall x_i$$

4. $\forall m < n \quad F(x_1, x_2, \ldots, x_m, \infty, \ldots, \infty) = F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$

Определение. Плотностью распределения (плотностью вероятностей) случайного вектора $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ называется такая интегрируемая функция $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, для которой $\forall x_i \in(-\infty,\infty)$ имеет место

$$F\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f\left(t_1,t_2,...,t_n\right)dt_1 dt_2\cdots dt_n \qquad (2)$$

$$f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\frac{\partial^n F\left(x_1,x_2,...,x_n\right)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n} \qquad (3)$$

Свойства плотности вероятностей

1. $f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\geq 0$

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(t_1,t_2,\ldots,t_n\right)dt_1 dt_2\cdots dt_n = 1$ - условие нормировки

3. $P(\xi\in B)=\int\int\limits_{B}\cdots\int f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)dx_1 dx_2 \ldots dx_n$

4. $\forall m\leq n$

$$f\left(x_1,x_2,\ldots,x_m\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x_1,x_2,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_n\right)dx_{m+1}dx_{m+2}\cdots dx_n$$

Определение. Случайные величины $\xi_1 = \xi_1(\omega), \xi_2 = \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n = \xi_n(\omega)$ называются **независимыми**, если для любых

$$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n, \quad x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, k = 2,3,\ldots, n$$

имеет место

$$P\left(\xi_{i_1} < x_{i_1}, \xi_{i_2} < x_{i_2}, \ldots, \xi_{i_k} < x_{i_k}\right) = P\left(\xi_{i_1} < x_{i_1}\right) P\left(\xi_{i_2} < x_{i_2}\right) \cdots P\left(\xi_{i_k} < x_{i_k}\right) \quad (4)$$

В частности из (4)

$$P\left(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n\right) = P\left(\xi_1 < x_1\right) P\left(\xi_2 < x_2\right) \cdots P\left(\xi_n < x_n\right)$$

то есть

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = F_{\xi_1}\left(x_1\right) F_{\xi_2}\left(x_2\right) \ldots F_{\xi_n}\left(x_n\right) \quad (5)$$

Из (5)

$$\frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = \frac{dF_{\xi_1}(x_1)}{dx_1} \frac{dF_{\xi_2}(x_2)}{dx_2} \dots \frac{dF_{\xi_n}(x_n)}{dx_n} \tag{6}$$

Следовательно, для независимых случайных величин

$$f_\xi(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{\xi_1}(x_1) f_{\xi_2}(x_2) \dots f_{\xi_n}(x_n) \tag{7}$$

Если $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ - дискретная случайная величина и компоненты $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы, то

$$P(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots, \xi_n = x_n) = P(\xi_1 = x_1) P(\xi_2 = x_2) \cdots P(\xi_n = x_n) \tag{8}$$