

МОДЕЛИРОВАНИЕ И  
ОПТИМИЗАЦИЯ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ  
ПРОЦЕССОВ САХАРНОГО  
ПРОИЗВОДСТВА

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВВЕДЕНИЕ**

Основным методом исследования сложных объектов является метод математического моделирования на ЭВМ. Под математическим моделированием на ЭВМ понимают описание поведения физического объекта при помощи математических уравнений или соотношений и вычислительных алгоритмов, их реализации на ЭВМ.

Эксперимент с моделью процесса или объекта на ЭВМ во многом сродни физическому эксперименту. В ходе эксперимента варьируются независимые переменные, параметры модели, совершенствуется её структура, принятые гипотезы о поведении отдельных частей системы.

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

❖ **Системный анализ.** Это система методов исследования или проектирования сложных систем, поиска, планирования и реализации изменений, предназначенных для устранения проблем. Системный анализ реализует идеи применительно к конкретным практическим задачам, особенность которых состоит в необходимости выяснения причин, их сложности. Системный анализ отличается междисциплинарным и наддисциплинарным характером и вовлечением в работу как неформальных эвристических, экспертных методов, так и эмпирических, экспериментальных методов, а также при необходимости строгих формальных математических методов. Системный анализ основан на таких дисциплинах, как моделирование, оптимизация и др.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ

❖ **Моделирование.** Это метод изучения объектов, при котором вместо оригинала (исследуемого объекта) эксперимент проводят на модели (другой объект), а результаты количественно распространяют на оригинал.

# МОДЕЛЬ

❖ Это искусственный, созданный человеком объект, процесс, система любой природы (умозрительный или материально реализованный), который замещает или воспроизводит исследуемый объект, процесс, систему так, что её изучение способно давать новую информацию об этом объекте, процессе, системе. К процессу моделирования предъявляются два основных требования:

- ❖ 1. Эксперимент на модели должен быть проще, быстрее, экономичнее и безопаснее, чем эксперимент на оригинале. Но не всегда целесообразно строить более дешёвую модель.
- ❖ 2. Должен быть известен алгоритм расчёта параметров оригинала на основе результатов исследования модели.

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ КАК МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ

❖ Существует два способа создания математических моделей:

1. Исследуемая система расчленяется на такие подсистемы, свойства которых очевидны из ранее накопленного опыта - моделирование
2. При построении моделей непосредственно используются данные эксперимента— идентификация.

## КЛАССИФИКАЦИЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ

- 1) По конечному результату идентификации: *структурная; параметрическая;*
- 2) По способу изучения объекта идентификации: *активная; пассивная;*
- 3) По типу идентифицируемой модели: *линейная и нелинейная; детерминированная и стохастическая; с непрерывным и дискретным временем; стационарная и нестационарная; одномерная и многомерная; статическая и динамическая; с сосредоточенными и распределёнными параметрами.*

## МЕТОДЫ УПРОЩЕНИЯ МОДЕЛЕЙ

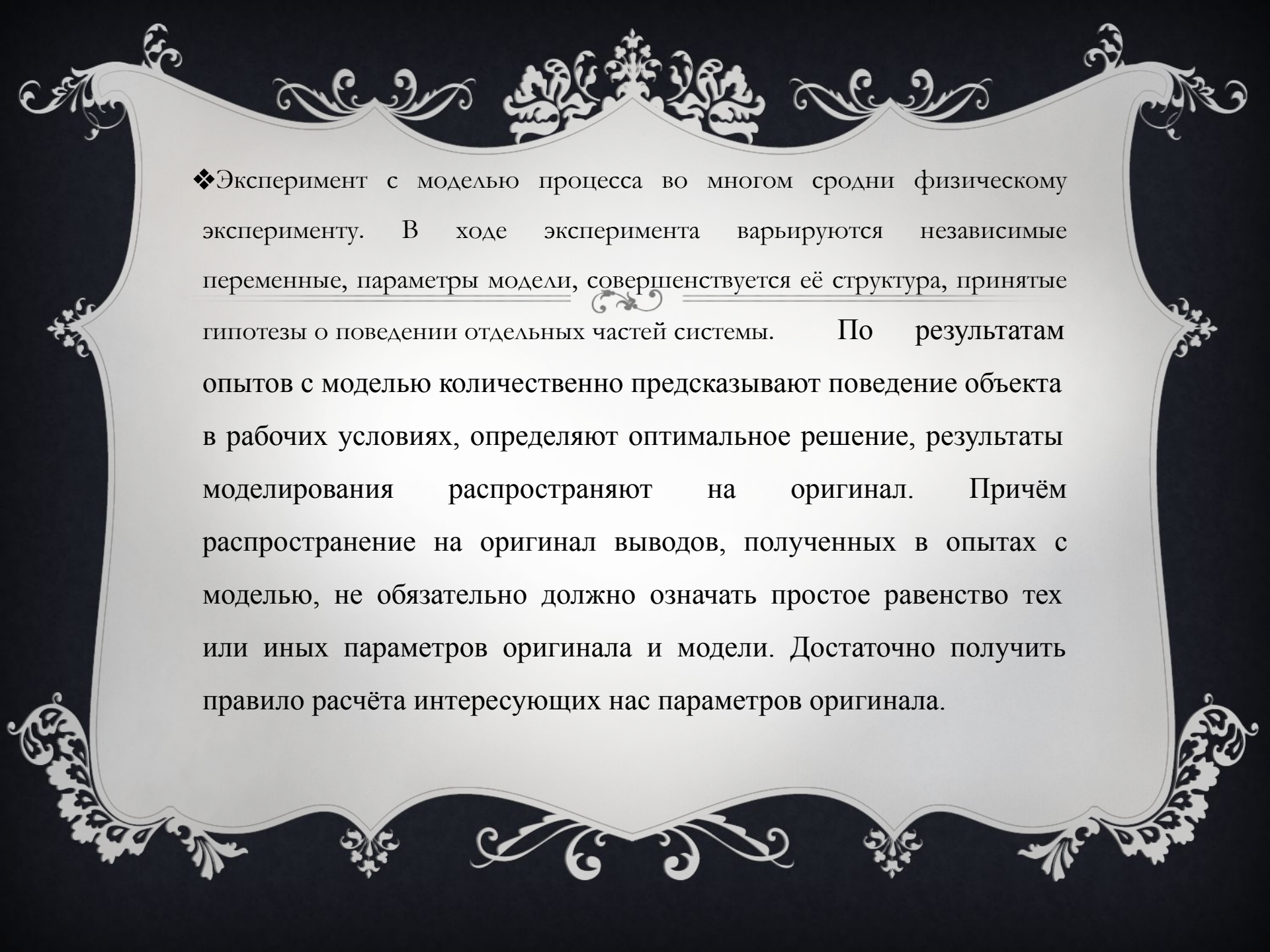
- 1) *Расчленение сложной системы на ряд более простых подсистем (декомпозиция);*
- 2) *Выделение существенных свойств и воздействий, и учет остальных в параметрической форме (метод макро моделирования);*
- 3) *Линеаризация нелинейных процессов в некоторой области изменения переменных;*
- 4) *Приведение систем с распределенными параметрами к системам со сосредоточенными параметрами (введение более жестких предположений и ограничений);*
- 5) *Пренебрежение динамическими свойствами процессов*



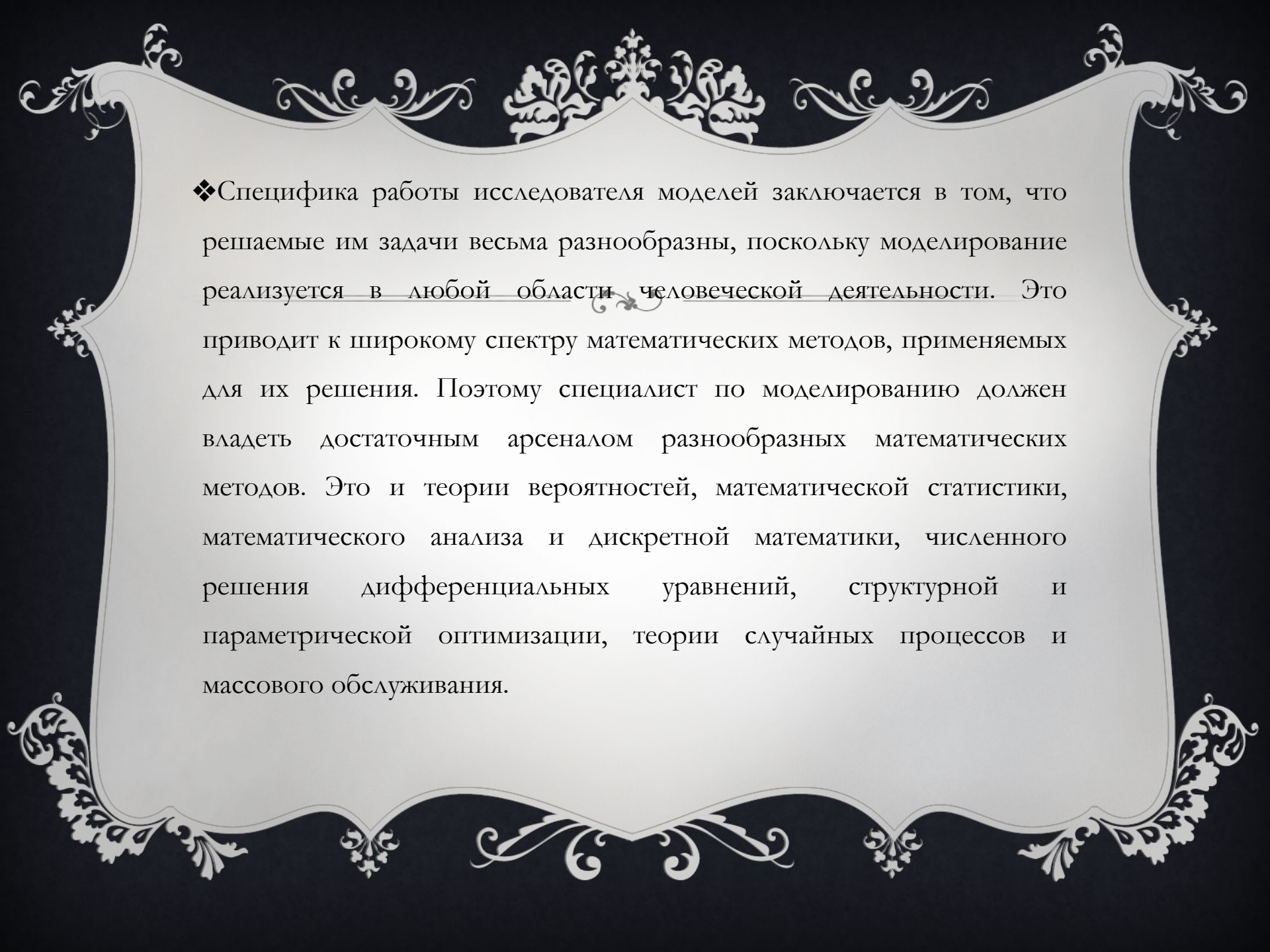
## ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОБЛЕМ И МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ

❖ Под математическим моделированием понимают описание поведения технологического процесса или физического объекта при помощи математических уравнений или соотношений, вычислительных алгоритмов и их реализации на ЭВМ.


❖ Отличительная особенность моделирования как метода исследования заключается в возможности изучения, прогнозирования и оптимизации объектов, физический эксперимент с которыми очень затруднителен, опасен или не выгоден. Вычислительный эксперимент с моделью процесса в подобных ситуациях значительно сокращает сроки и стоимость исследований, повышает обоснованность принимаемых решений. По отношению к модели исследователь является экспериментатором, проводящим эксперимент не с реальным объектом, а с его моделью.



❖ Эксперимент с моделью процесса во многом сродни физическому эксперименту. В ходе эксперимента варьируются независимые переменные, параметры модели, совершенствуется её структура, принятые гипотезы о поведении отдельных частей системы. По результатам опытов с моделью количественно предсказывают поведение объекта в рабочих условиях, определяют оптимальное решение, результаты моделирования распространяют на оригинал. Причём распространение на оригинал выводов, полученных в опытах с моделью, не обязательно должно означать простое равенство тех или иных параметров оригинала и модели. Достаточно получить правило расчёта интересующих нас параметров оригинала.



❖ Специфика работы исследователя моделей заключается в том, что решаемые им задачи весьма разнообразны, поскольку моделирование реализуется в любой области человеческой деятельности. Это приводит к широкому спектру математических методов, применяемых для их решения. Поэтому специалист по моделированию должен владеть достаточным арсеналом разнообразных математических методов. Это и теории вероятностей, математической статистики, математического анализа и дискретной математики, численного решения дифференциальных уравнений, структурной и параметрической оптимизации, теории случайных процессов и массового обслуживания.



❖ В настоящее время получили применение системы моделирования, отличающиеся высокой степенью автоматизации процесса моделирования, когда, наряду с программными средствами управления вычислительным экспериментом, используется возможность диалогового общения исследователя с процессом моделирования. Степень автоматизации процесса моделирования тесно связана с управляемостью модели. В этом смысле наличие многих управляемых параметров и переменных модели в реализованной системе моделирования дает возможность поставить широкий эксперимент и получить обширный спектр результатов.

❖ Характеризуя проблему моделирования в целом, необходимо учитывать, что от постановки задачи моделирования до интерпретации полученных результатов существует большая группа сложных научно-технических проблем. К основным из них можно отнести:

- Идентификацию реальных объектов;*
- выбор вида моделей;*
- получение реализаций переменных объекта;*
- построение моделей и их реализацию на ЭВМ;*
- взаимодействие исследователя с моделью в ходе вычислительного эксперимента;*
- проверку правильности полученных в процессе моделирования результатов и выявление основных закономерностей.*

Для исследования объектов и систем управления, как указывалось выше, используются различные *методы*:


□ *физическое моделирование;*

□ *математическое моделирование;*

□ *полунатурное моделирование.*

❖ Каждый из этих методов имеет свои достоинства и недостатки. Применение того или иного метода определяется в каждом конкретном случае в зависимости от исследуемой системы и условий ее работы. При этом необходимо иметь набор правил и условий, выполнение которых обеспечивает требуемую точность изучения реального объекта по его модели.

## **ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**


При использовании физического моделирования процессы, протекающие в модели и в оригинале, имеют одинаковую иногда и различную физическую природу.: 

---

Физическая модель может отличаться от оригинала размерами, скоростью протекания и физической природой процессов или материалами, из которых она изготовлена.

Физическая модель может наиболее полно воспроизводить такие свойства оригинала, которые при теоретическом изучении не могут быть учтены в полной мере.

Теоретической базой физического моделирования является теория подобия. Теория подобия позволяет пересчитать количественные характеристики, полученные при изучении модели, в количественные характеристики оригинала.



❖ При физическом моделировании необходимо для каждого конкретного процесса создать свою модель. Так как изготовление сложных объектов обходится, как правило, очень дорого, требует больших материальных и трудовых затрат, то изменение параметров модели часто нецелесообразно. Поэтому, несмотря на определенные преимущества, физическое моделирование находит ограниченное применение при исследовании сложных объектов и систем управления.




## *МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ*

❖ При математическом моделировании исследование объекта осуществляется посредством модели, сформулированной на языке математики и реализованной, как правило, на ЭВМ с использованием тех или иных математических методов.

❖ При моделировании на ЭВМ в качестве объекта моделирования выступают исходные уравнения, представляющие математическую модель реального объекта, а в качестве модели – процессы, протекающие в соответствии с этими уравнениями и воспроизводимые на ЭВМ путем реализации программ в виде “машинных решений”.

❖ Полная математическая модель включает описание связей между основными переменными в установившемся режиме (*статическая модель*) и во времени при переходе от одного режима к другому (*динамическая модель*). Она включает также ограничения на переменные, критерий оптимальности, связи между основными переменными в динамике.

❖ В математическом моделировании выделяют *имитационное моделирование*, под которым понимают воспроизведение объектов с имитацией случайными величинами и случайными процессами элементов оригинала, которые не удастся представить определенными математическими моделями.



❖ При этом процесс функционирования системы представляется в виде определённого алгоритма. На некоторых этапах работы имитационной модели используются параметры, выбираемые исследователем, так называемые управляющие воздействия. Выбор управляющих воздействий осуществляется из некоторого множества и обычно имеет критерий качества этого выбора, т.е. функцию, которую следует оптимизировать. Тогда, перед тем как вводить управляющие воздействия в имитационную модель, решается оптимизационная задача по их отысканию, и лишь после этого найденные оптимальные значения вводятся в имитационную модель. В этом случае имитация позволяет моделировать отклик системы на оптимальные управления ею. Если управляющих воздействий немного, то все они могут быть перепробованы в имитационной системе. Результаты имитационного моделирования в этом случае позволяют провести оценку управляющих воздействий – отбросить заведомо плохие, упорядочить и т.п.

## ПОЛУНАТУРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

❖ Это моделирование с реальной аппаратурой, при котором часть системы моделируется, а остальная часть является реальной. Применение такого

метода моделирования становится необходимым в тех случаях, когда не удается описать работу некоторых элементов системы математически. Естественно работа всей замкнутой схемы моделирования должна проходить в натуральном масштабе времени. Такое моделирование системы управления позволяет анализировать как всю систему в целом, так и отдельные ее элементы, несмотря на то, что их математическое описание отсутствует.

❖ В процессе полунатурного моделирования удачно сочетаются достоинства математического и натурного моделирования, и может быть достигнуто оптимальное взаимодействие между вычислительными и натурными экспериментами.

**Необходимость применения таких методов возникает, если:**

- ❖ *объект управления находится еще в стадии проектирования, а элементы устройства управления реально существуют;*
- ❖ *объект не может испытываться в лабораторных условиях;*
- ❖ *элементы устройства управления имеют нелинейные характеристики, трения, помехи, которые при составлении их уравнений не учитывались;*
- ❖ *проведение натурных экспериментов по настройке устройства управления на объекте дорого или вообще недопустимо.*
- ❖ Существует два основных подхода к анализу и управлению технологическими процессами в зависимости от их особенностей и степени сложности – **аналитический и экспериментальный.**

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

- ❖ При построении математической модели системы, принципиально можно получить реакцию системы на любое возмущение. В этом случае получаемая модель даёт представление не об одном конкретном процессе, а о целом классе подобных процессов.
- ❖ Достоинствами подхода являются глубокое исследование механизма изучаемого процесса, возможность одновременно изучить целый класс процессов как объектов автоматизации.
- ❖ При экспериментальном исследовании незначительное изменение аппаратуры или механизма процесса требует проведения нового эксперимента.
- ❖ Аналитический подход легко осуществим, если речь идет о простейших идеальных процессах, для которых он легко реализуется на основе известных теорий в виде математической модели свойств объекта. Однако создание теории для реальных процессов, отражающей все их многообразие, весьма затруднительно, а подчас и невозможно, а точность описания их свойств чаще всего невысока.

❖ **При построении математической модели системы**, принципиально можно получить реакцию системы на любое возмущение. В этом случае получаемая модель дает представление не об одном конкретном процессе, а о целом классе подобных процессов. Достоинствами подхода являются глубокое исследование механизма изучаемого процесса, возможность одновременно изучить целый класс процессов как объектов автоматизации.

❖ **Аналитический подход** легко осуществим, если речь идет о простейших идеальных процессах, для которых он легко реализуется на основе известных теорий в виде математической модели свойств объекта. Однако создание теории для реальных процессов, отражающей все их многообразие, весьма затруднительно, а подчас и невозможно, а точность описания их свойств чаще всего невысока.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ ПОДХОД

❖ Он прост, дает более точные результаты при исследовании сложных объектов и находит широкое применение в практике. Однако экспериментальные подходы имеют и свои недостатки.

❖ Их применение связано с большими затратами труда и средств на подготовку эксперимента и его проведение, а также на последующую обработку опытных данных. Математическое описание объекта, полученное экспериментально, обычно справедливо для некоторой области входных и выходных значений, при отклонении от которых точность модели снижается. При экспериментальном исследовании характеристик не всегда можно выявить влияние некоторых факторов.



❖ Наиболее правильным является оптимальное сочетание экспериментальных и аналитических методов составления математических описаний.

❖ В этом случае на основе анализа объекта составляется в общем виде система уравнений и неравенств, описывающие объект управления. Задача эксперимента сводится к проверке правильности вида выбранных уравнений и к определению значений, входящих в них постоянных коэффициентов.

❖ Модели в зависимости от степени определенности связи выходных и входных параметров разделяются на детерминированные и ндетерминированные.

❖ Модель процесса называется детерминированной, если в описывающих ее математических выражениях отсутствуют случайные величины или случайные функции.

❖ Если такие величины или функции присутствуют в модели или, что равнозначно, принимается во внимание случайный характер входных воздействий, то модель называется ндетерминированной. Соотношения, описывающие свойства модели, могут быть получены в результате статистического обследования объекта и имеют вид корреляционных и регрессионных соотношений между входными и выходными параметрами объекта. При создании этих моделей важную роль играют теория вероятности и математическая статистика.

## МОДЕЛИ, ТИПЫ МОДЕЛЕЙ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ

❖ **Модели можно классифицировать различными способами.** Однако ни один из них не является полностью удовлетворительным, хотя каждый из них служит определенной цели. Укажем некоторые из них:

- ❖ *физические (натурные) и математические (символьные);*
- ❖ *статические и динамические;*
- ❖ *детерминированные и недетерминированные (стохастические);*
- ❖ *дискретные и непрерывные;*
- ❖ *линейные и нелинейные;*
- ❖ *сосредоточенные и распределенные;*
- ❖ *стационарные и нестационарные*

❖ Физическими моделями являются модели, в которых свойства реального объекта представляются свойством такого же объекта (макета) или некоторым другим свойством аналогичного по поведению объекта.

❖ Математические модели - это те, в которых для представления процесса используются символы, а не физические характеристики процесса. Математическую модель можно представить в виде множества величин, описывающих процесс функционирования реального объекта:  $y(t)=F(x, u, z, t)$  – эта зависимость называется законом функционирования объекта. Он может быть задан в виде функции, функционала, логических условий, в алгоритмической и табличной формах или в виде словесного правила соответствия.

❖ Один и тот же закон функционирования может быть реализован различными способами, т.е. с помощью множества различных алгоритмов функционирования.

❖ Соотношение (3) является математическим описанием поведения объекта моделирования во времени  $t$ , т.е. отражает его динамические свойства. Поэтому математические модели такого вида называются *динамическими*. Они описывают изменения параметров во времени. Очень часто приходится сталкиваться с такими моделями при разработке новых технологических процессов, изделий, средств и систем автоматического управления..

❖ **Статические** модели описывают процессы, не изменяющиеся во времени, т.е. поведение объекта в установившихся режимах. Статические модели используют, как правило, при проектной оптимизации объекта. Обычно динамическая модель задается в виде дифференциальных уравнений, а статическая – в виде алгебраических.

❖ **Детерминированные** модели описывают жесткую связь между переменными. Такие модели не содержат случайных факторов, и значения выходных переменных однозначно определяются значениями входных переменных.

❖ **Стохастическая** (вероятностная) модель отражает воздействие случайных факторов. Поэтому между входными и выходными переменными ~~существует не функциональная~~ зависимость (детерминированная модель), а вероятностная. Обычно переменные состояния объекта оцениваются в терминах математического ожидания, а входные воздействия - вероятностными законами распределения.

❖ **Непрерывная** модель описывает непрерывные изменения переменных объекта в течении определенного промежутка времени.

❖ **Дискретная** модель описывает зависимость между переменными объекта в дискретные моменты времени. Состояние объекта в заданный момент времени определяется по известному его состоянию при условии, что параметры системы известны и остаются постоянными.

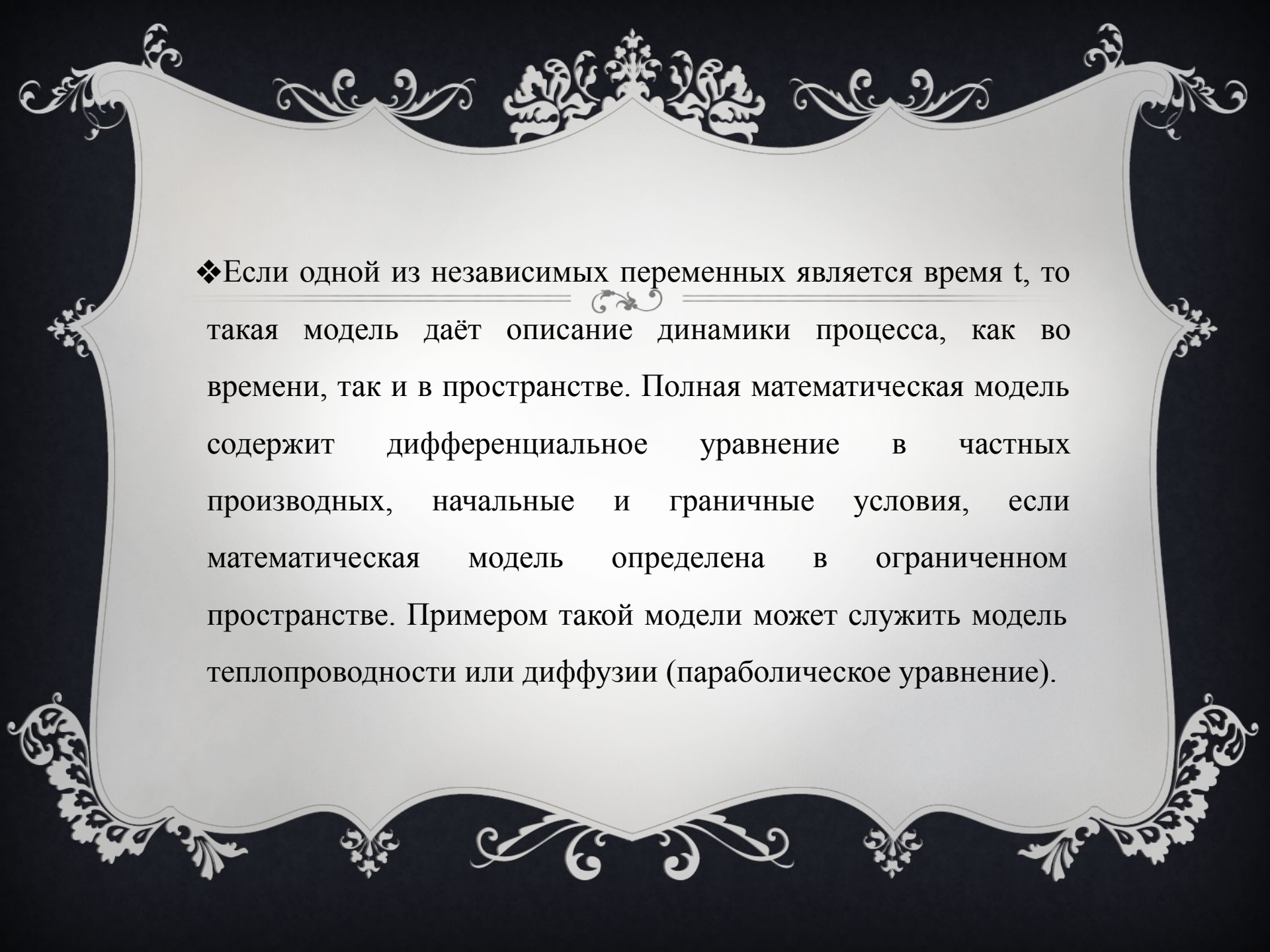
❖ **Линейная** модель определяет пропорциональную связь между входными и выходными переменными. Модели, не удовлетворяющие этому условию, являются **нелинейными**.



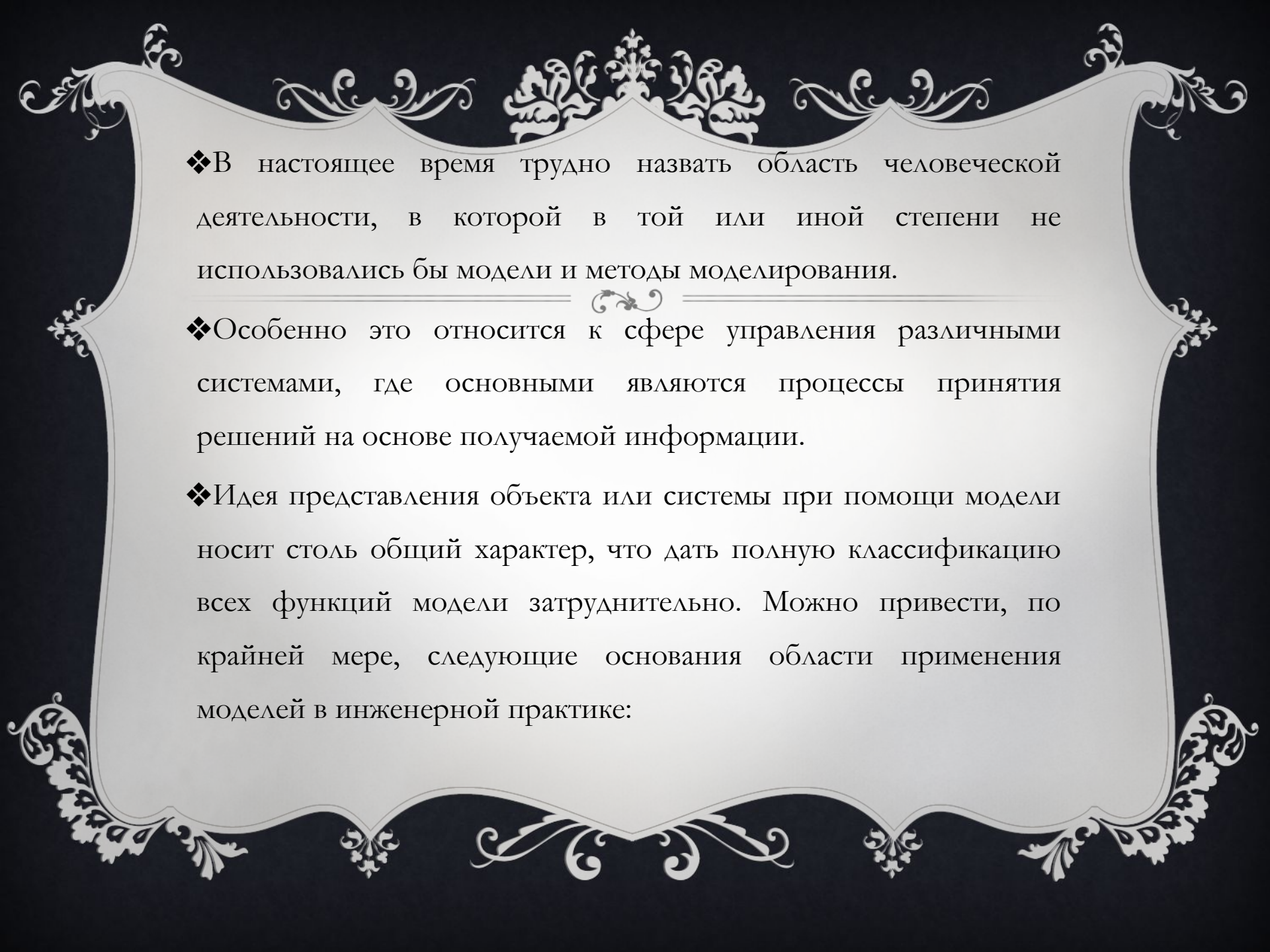
❖ **Динамическая** модель, которая описывает изменение переменных объекта только во времени, называется динамической моделью с *сосредоточенными* параметрами (искомая величина зависит только от одной переменной). Эти модели содержат одну или несколько производных от переменных состояния и представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения.

❖ Полная математическая модель наряду с дифференциальным уравнением при решении практических задач содержит также некоторые дополнительные условия (например, значения искомых переменных  $y$ ) в начальный момент времени  $t_0$ , называемыми начальными условиями.

❖ Во многих практических задачах искомая задача зависит от нескольких переменных. В этом случае математическая модель содержит частные производные и называется *моделью с распределенными параметрами*.



❖ Если одной из независимых переменных является время  $t$ , то такая модель даёт описание динамики процесса, как во времени, так и в пространстве. Полная математическая модель содержит дифференциальное уравнение в частных производных, начальные и граничные условия, если математическая модель определена в ограниченном пространстве. Примером такой модели может служить модель теплопроводности или диффузии (параболическое уравнение).



❖ В настоящее время трудно назвать область человеческой деятельности, в которой в той или иной степени не использовались бы модели и методы моделирования.

❖ Особенно это относится к сфере управления различными системами, где основными являются процессы принятия решений на основе получаемой информации.

❖ Идея представления объекта или системы при помощи модели носит столь общий характер, что дать полную классификацию всех функций модели затруднительно. Можно привести, по крайней мере, следующие основания области применения моделей в инженерной практике:

❖ *управление сложными объектами и системами (техническими, экономическими, социальными и т.д.);*

❖ *проектирование технических объектов и систем;*

❖ *прогнозирование и диагностика с использованием модели объекта;*

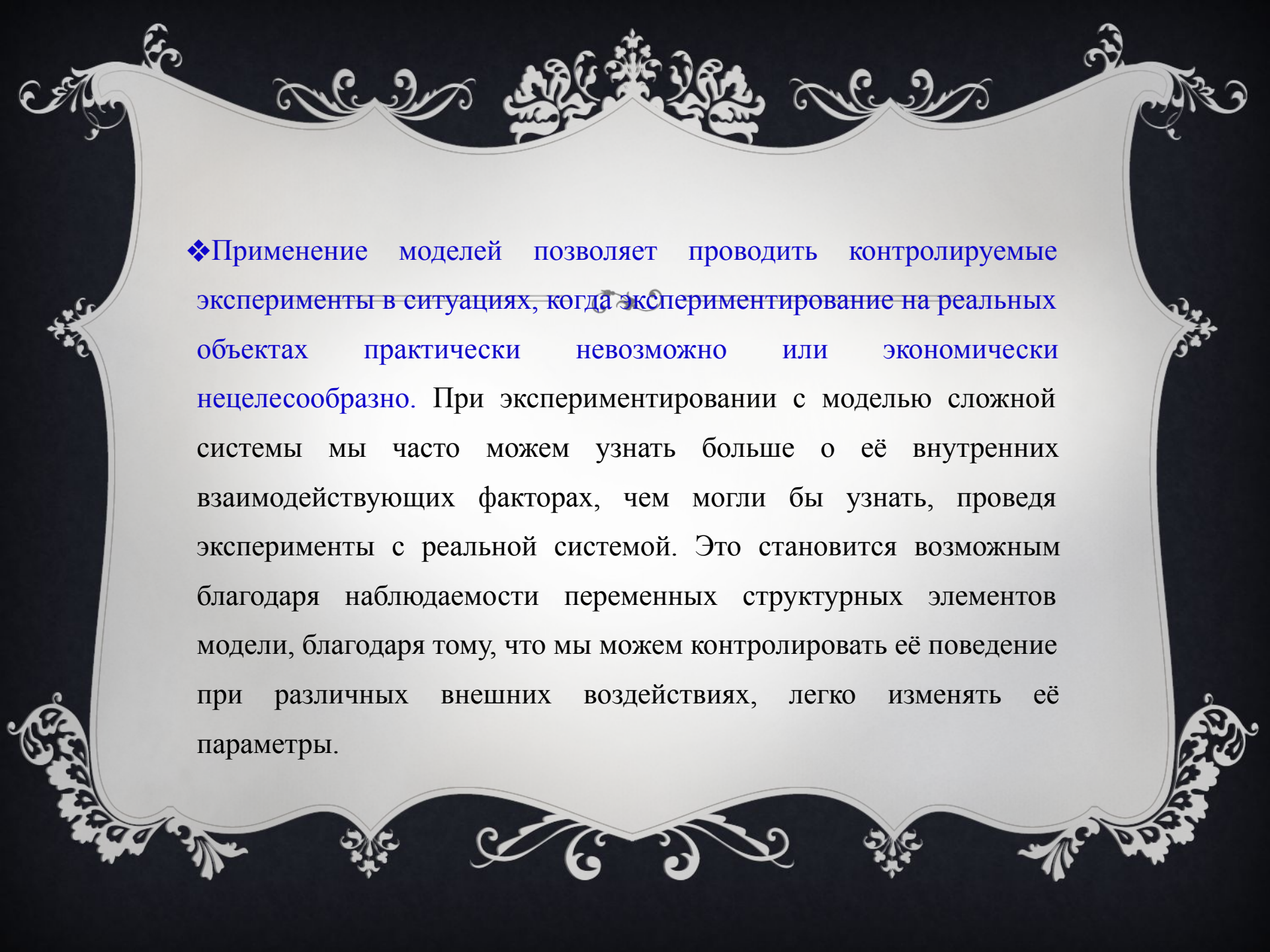
❖ *создание средств обучения и тренажа;*

❖ *постановка численных экспериментов на имитационной модели объекта;*

❖ *Создание и обоснование новых технологий.*

❖ Математические модели являются также **мощным инструментальным средством решения задач имитационного моделирования и предсказания (прогнозирования) поведения моделируемых объектов при различных ситуациях**, которые часто возникают не только в технике, но и в экономике, экологии, биологии и других областях знания.

❖ Модели широко применяются в качестве **средств профессиональной подготовки и обучения лиц, которые должны уметь справляться с всевозможными случайностями до возникновения реальной критической ситуации**. Широко известны такие применения моделей, как натурные макеты или модели космических летательных аппаратов, используемые для тренировки космонавтов, тренажеры, для обучения водителей, деловые игры для обучения персонала, принимающего решения.



❖ Применение моделей позволяет проводить контролируемые эксперименты в ситуациях, когда экспериментирование на реальных объектах практически невозможно или экономически нецелесообразно. При экспериментировании с моделью сложной системы мы часто можем узнать больше о её внутренних взаимодействующих факторах, чем могли бы узнать, проведя эксперименты с реальной системой. Это становится возможным благодаря наблюдаемости переменных структурных элементов модели, благодаря тому, что мы можем контролировать её поведение при различных внешних воздействиях, легко изменять её параметры.

❖ Резюмируя выше изложенное, отметим, что модель может служить для достижения одной из двух основных целей:


❖ *либо описательной, если модель служит для объяснения и (или) лучшего понимания объекта;*

❖ *либо предписывающей, когда модель позволяет предсказать и (или) воспроизвести характеристики объекта, определяющие его поведение.*

## АДЕКВАТНОСТЬ МОДЕЛИ И ОБЪЕКТА

❖ Переход от исследования объекта к исследованию модели и подтверждение пригодности модели для решения задач моделирования требует оценку качества полученной модели, т.е. проверку **адекватности** модели и объекта. Никогда нельзя говорить об абсолютной адекватности, при которой модель по всем свойствам соответствует объекту, так как в зависимости от цели исследования могут строиться различные модели объекта. В связи с этим основное подтверждение модели заключается в том, чтобы убедиться в возможности использования полученной модели для решения той задачи, ради которой эта модель и строилась. Поэтому **адекватность предполагает воспроизведение моделью с необходимой полнотой всех свойств объекта, существенных для целей данного исследования.**





❖ Количественно степень адекватности модели и объекта можно оценить путем сравнения их выходных сигналов при подаче одинаковых входных воздействий на объект и его модель. Если величина ошибок модели и оценок критериев приближения удовлетворяют требованиям к качеству модели, то модель считается адекватной объекту. Такая модель может быть использована для решения задач моделирования, оптимизации и управления. В противном случае модель необходимо усовершенствовать путем изменения структуры и введения в нее неучтенных ранее факторов.

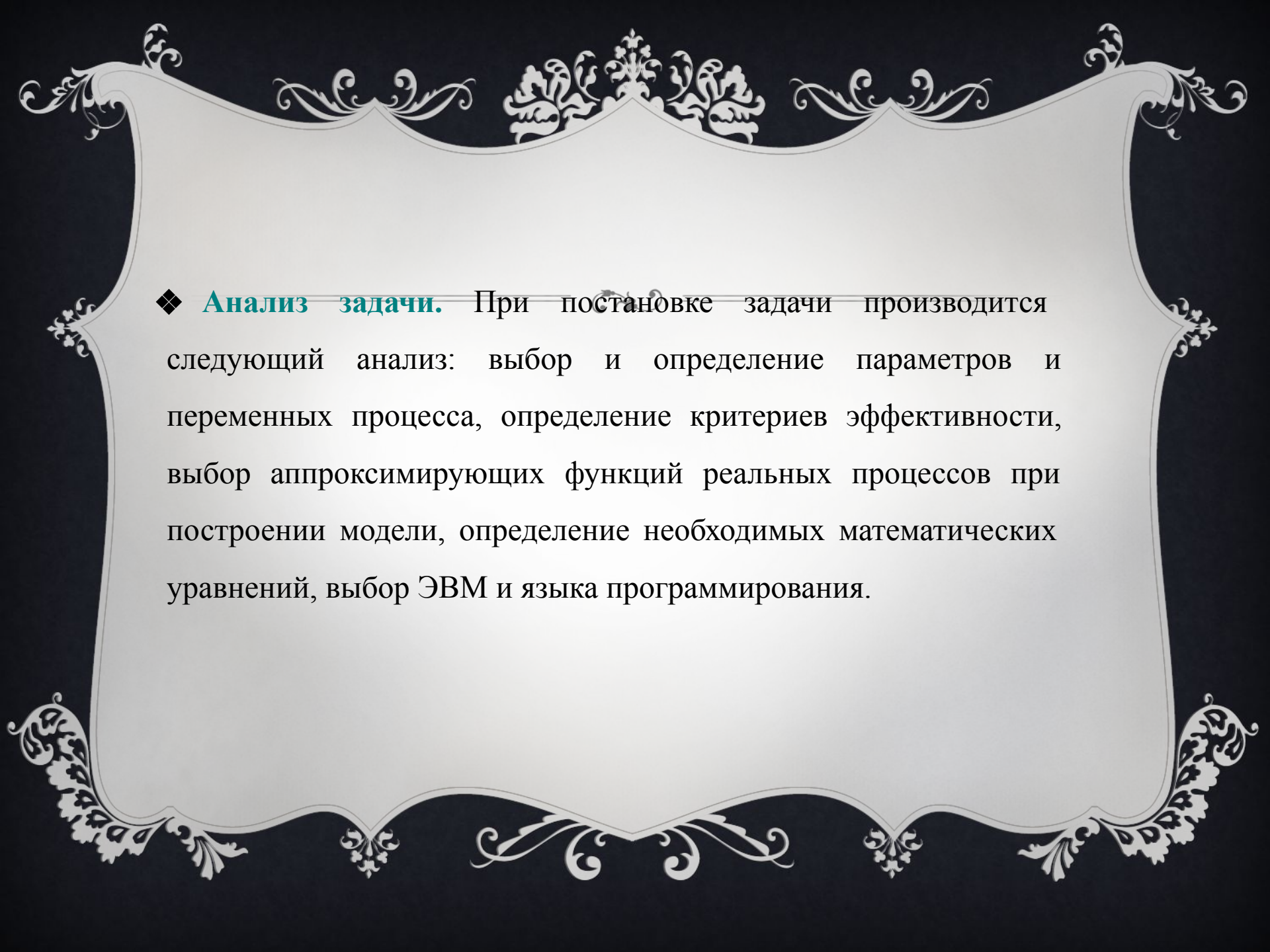
## ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

❖ **Постановка задачи.** На первом этапе построения модели определяются и анализируются задача, проводится сбор и обработка информации, выдвигаются гипотезы, выбирается рациональная структура модели, определяются её параметры, переменные и критерии эффективности. Постановка задачи требует около **20%** затрат на создание модели.


❖ **Предварительная формулировка задачи.**

❖ *Первым шагом* на пути построения модели является определение задачи, то есть даётся чёткая формулировка задачи и указывается предполагаемая последовательность её решения. При этом предварительно определяется объем задачи. При необходимости её разбивают на подзадачи.

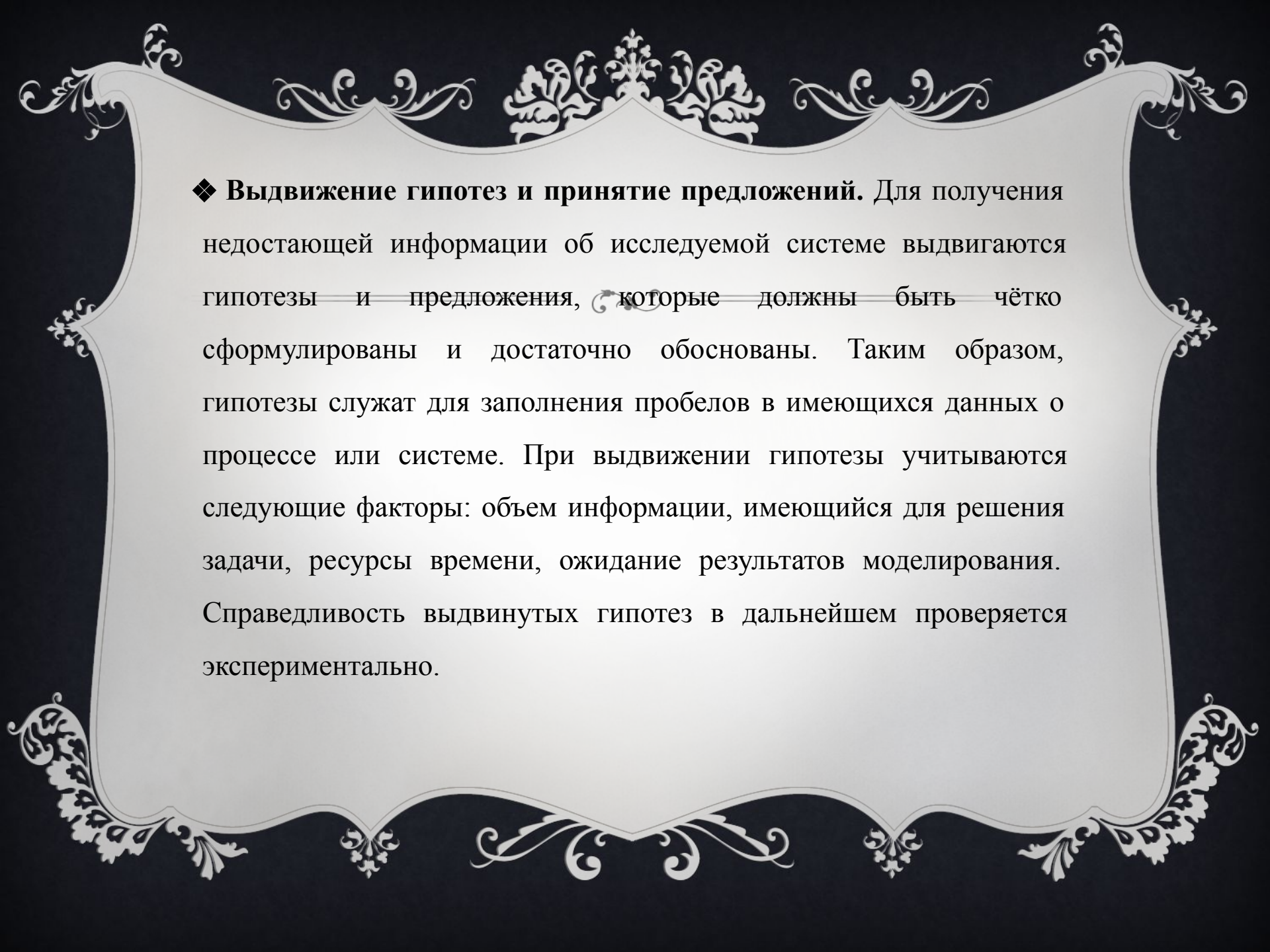
❖ *Вторая часть* общей формулировки задачи содержит методику и порядок её решения. На этом этапе определяют последовательность и возможные методы решения подзадач, формулируют требования к используемым ЭВМ.




❖ **Анализ задачи.** При постановке задачи производится следующий анализ: выбор и определение параметров и переменных процесса, определение критериев эффективности, выбор аппроксимирующих функций реальных процессов при построении модели, определение необходимых математических уравнений, выбор ЭВМ и языка программирования.



❖ **Определение требований к информации.** Прежде всего, требуется определить, какую информацию следует считать необходимой, а затем - где и как можно получить эту информацию, какими методами следует производить её обработку. Необходимая информация может быть получена различными путями: анализом литературных источников, документов и отчётов, консультациями со специалистами и экспертами, анализом экспериментальных данных.



❖ **Выдвижение гипотез и принятие предложений.** Для получения недостающей информации об исследуемой системе выдвигаются гипотезы и предложения, которые должны быть чётко сформулированы и достаточно обоснованы. Таким образом, гипотезы служат для заполнения пробелов в имеющихся данных о процессе или системе. При выдвижении гипотезы учитываются следующие факторы: объем информации, имеющийся для решения задачи, ресурсы времени, ожидание результатов моделирования. Справедливость выдвинутых гипотез в дальнейшем проверяется экспериментально.

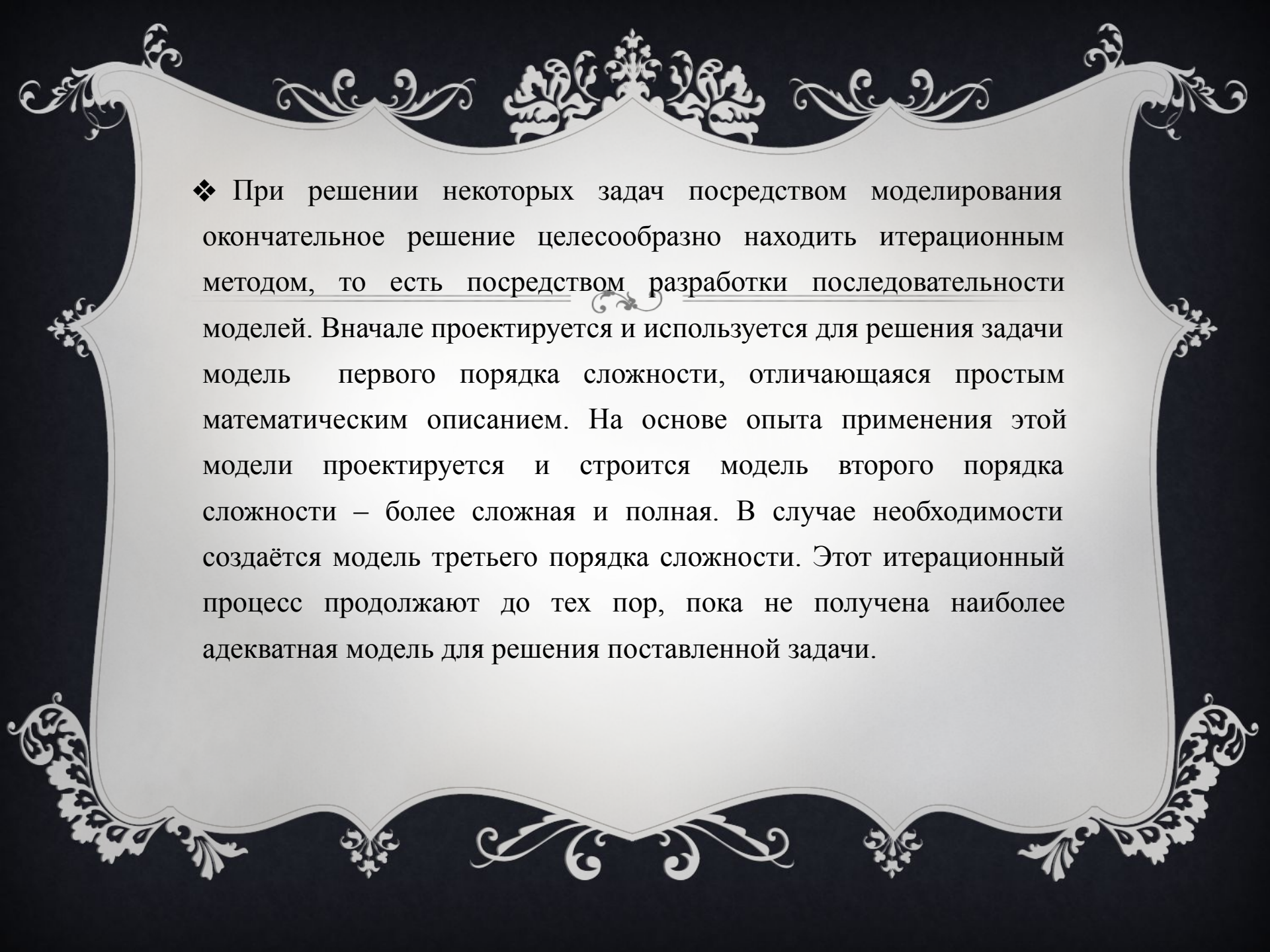


❖ **Определение параметров и переменных модели.** Прежде чем перейти к разработке математической модели, необходимо определить параметры системы, входные и выходные переменные, а также степень их влияния на результаты моделирования. Описание каждого параметра и переменной в модели производится следующим образом:

❖ **Определение критериев эффективности.** Для оценки основных характеристик системы следует выбрать некоторую совокупность критериев эффективности. Эта задача сводится к получению выражения для эффективности как функции параметров и переменных системы. Эта функция представляет собой поверхность отклика в исследуемой области изменения параметров и переменных системы. Такая функция может быть выражена графически или аналитически. В зависимости от рассматриваемой задачи могут выбираться различные критерии эффективности. При исследовании технологических процессов методом моделирования на ЭВМ обычно формулируется цель данного процесса, а затем различные варианты достижения этой цели оцениваются с помощью критерия эффективности



❖ **Описание модели в абстрактных терминах и понятиях.** На этом этапе построения модели на основе имеющейся информации с учётом принятых предположений и выдвинутых гипотез производится математическое описание исследуемого процесса или системы. При этом используются выбранные аппроксимирующие функции. В состав математической модели включается описание всех основных параметров и переменных системы и выбранные критерии эффективности. Уровень детализации модели и выбор моделирующих средств определяются на основании принципов целесообразности и зависят от имеющейся информации о процессе или системе, сроков, установленных для решения конкретной задачи, имеющихся людских и материальных ресурсов.

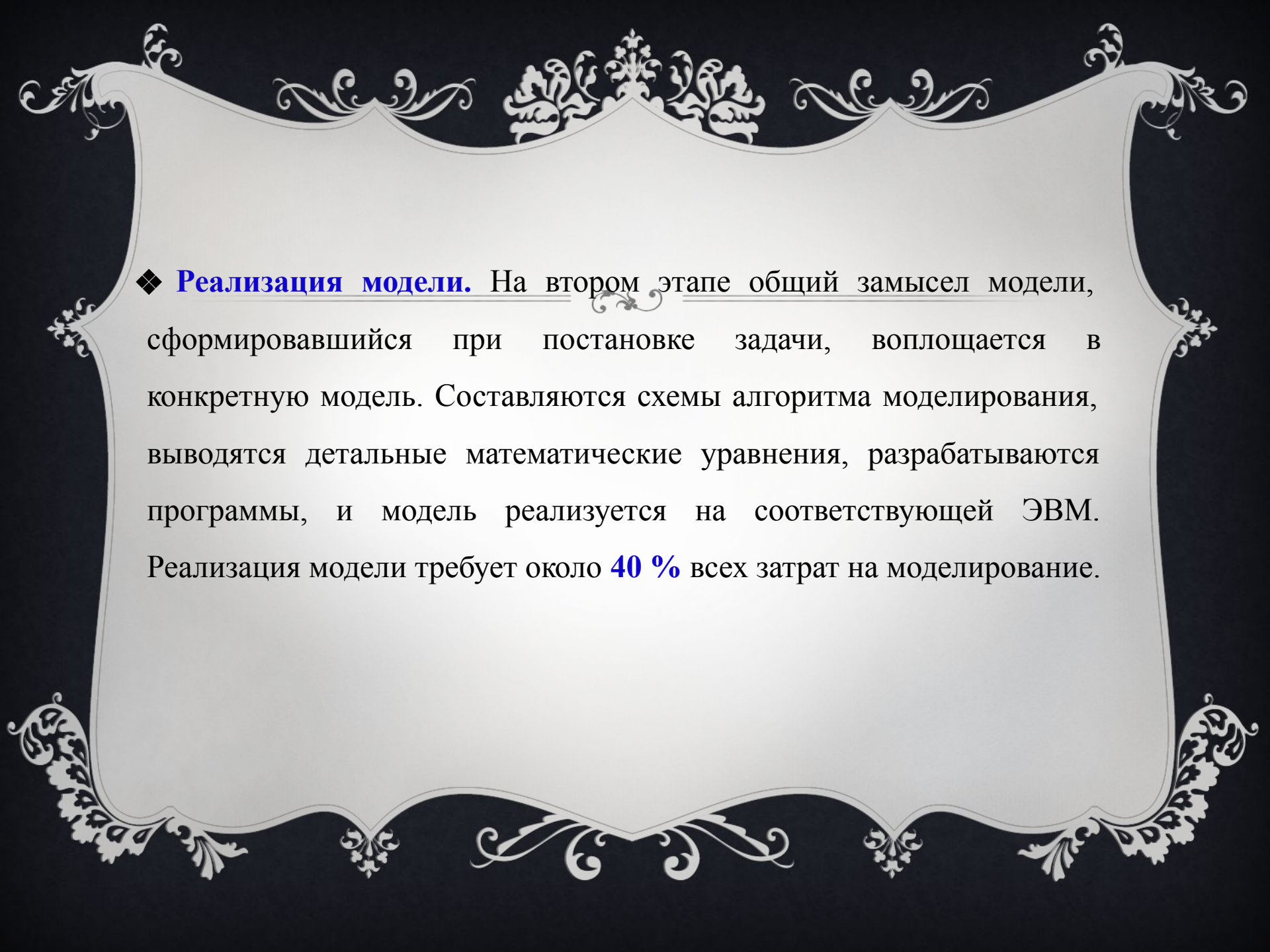


❖ При решении некоторых задач посредством моделирования окончательное решение целесообразно находить итерационным методом, то есть посредством разработки последовательности моделей. Вначале проектируется и используется для решения задачи модель первого порядка сложности, отличающаяся простым математическим описанием. На основе опыта применения этой модели проектируется и строится модель второго порядка сложности – более сложная и полная. В случае необходимости создаётся модель третьего порядка сложности. Этот итерационный процесс продолжают до тех пор, пока не получена наиболее адекватная модель для решения поставленной задачи.

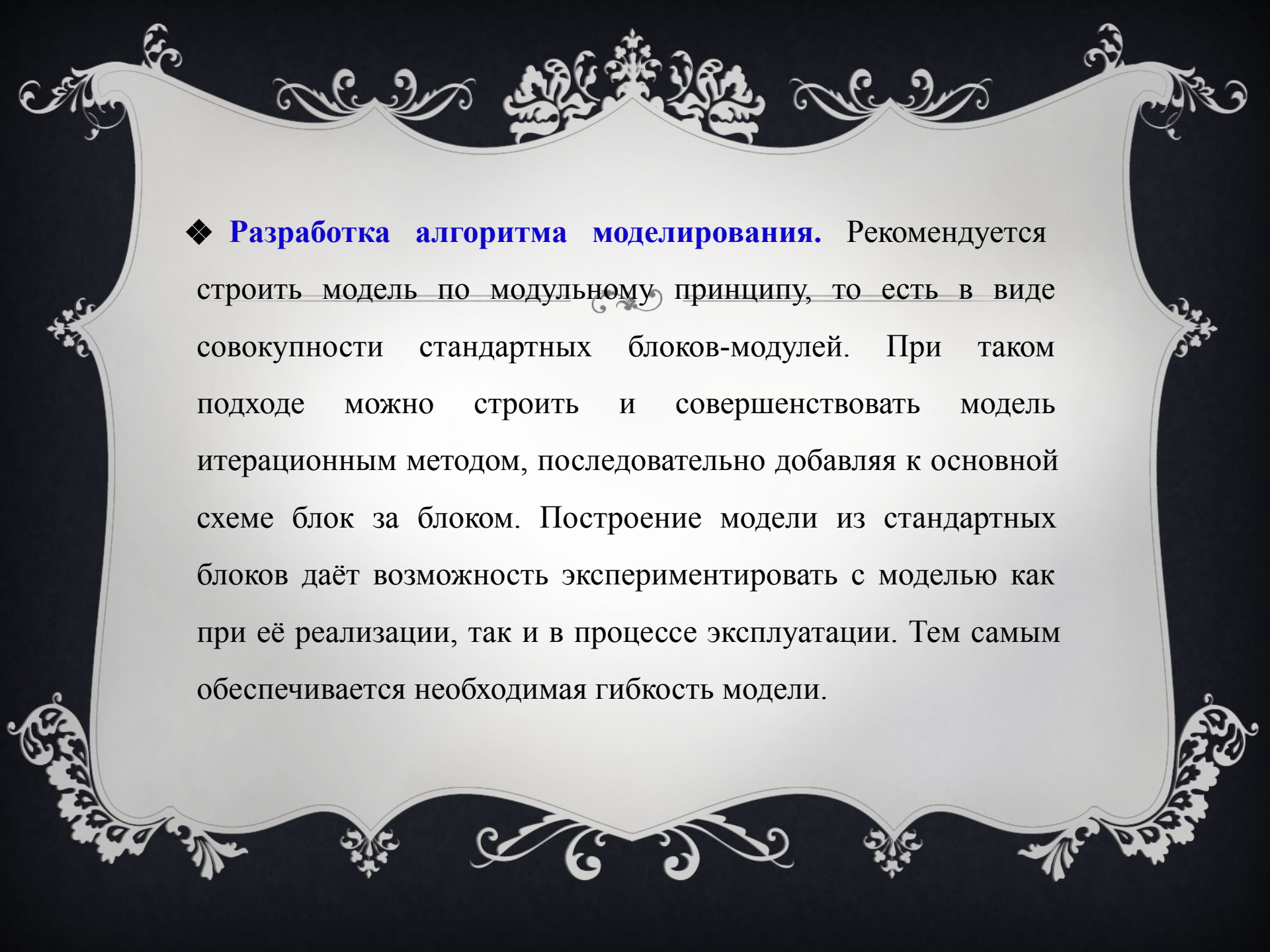
## ❖ Предварительная проверка достоверности модели.

Предварительная проверка достоверности модели состоит из следующих этапов:

1. Исследование допустимости применения принятых аппроксимирующих функций для описания реальных процессов.
2. Рассмотрение критериев эффективности.
3. Исследование обоснованности принятых предположений и гипотез.
4. Проверка достоверности информации и её источников.
5. Рассмотрение корректности общей формулировки задачи.



❖ **Реализация модели.** На втором этапе общий замысел модели, сформировавшийся при постановке задачи, воплощается в конкретную модель. Составляются схемы алгоритма моделирования, выводятся детальные математические уравнения, разрабатываются программы, и модель реализуется на соответствующей ЭВМ. Реализация модели требует около **40 %** всех затрат на моделирование.



❖ **Разработка алгоритма моделирования.** Рекомендуется строить модель по модульному принципу, то есть в виде совокупности стандартных блоков-модулей. При таком подходе можно строить и совершенствовать модель итерационным методом, последовательно добавляя к основной схеме блок за блоком. Построение модели из стандартных блоков даёт возможность экспериментировать с моделью как при её реализации, так и в процессе эксплуатации. Тем самым обеспечивается необходимая гибкость модели.

❖ Различают модули двух типов:

- *Основные;*
- *Вспомогательные.*

Основные модули моделируют специфические функции системы, а вспомогательные представляют собой составную часть модели, но не отражают непосредственно функции системы. Вспомогательные модули часто могут быть использованы не только в данной модели, но и в других.

❖ При составлении блок-схем должны применяться ясные формулировки и символы. Предложения должны содержать информацию, достаточную для их недвусмысленного толкования. Каждый модуль должен иметь заголовок, отражающий его содержание. Для обеспечения непрерывности описания и отражения связи между отдельными модулями необходимо принять определённую систему нумерации блоков.

### ◆ **Получение математических уравнений в явном виде.**

Одновременно с разработкой алгоритма моделирования необходимо получать математические уравнения в виде явных функций. Функции в явном виде получаются либо аналитическим путём, либо посредством регрессивного анализа эмпирических данных и вводятся в блок-схему алгоритма.

❖ **Проверка адекватности модели.** До тех пор пока не доказана адекватность модели, нельзя с уверенностью утверждать, что с её помощью получаются интересующие нас результаты. Поэтому необходимо установить, насколько близко к действительности модель отражает реальные процессы и насколько точными получаются результаты моделирования. При проверке адекватности модели необходимо ответить на следующие вопросы:

- Верно ли сформулирована постановка задачи?
- Насколько точно отражена эта постановка в алгоритме моделирования?
- Достаточно ли полным является алгоритм моделирования?
- Правильны ли используемые математические уравнения?

❖ На все эти вопросы должен быть получен утвердительный ответ. Только после этого можно продолжать работу с моделью.



❖ **Выбор вычислительных средств.** После того, как разработан алгоритм моделирования и приближённо известен объем вычислений, а также известны входные и выходные величины, можно выбрать вычислительную машину, на которой будет проводиться моделирование технологического процесса. При выборе ЭВМ необходимо учитывать следующие факторы:

- ✓ сложность программирования;
- ✓ быстродействие;
- ✓ стоимость ЭВМ;
- ✓ ее доступность.

❖ **Программирование.** Состоит из следующих этапов:

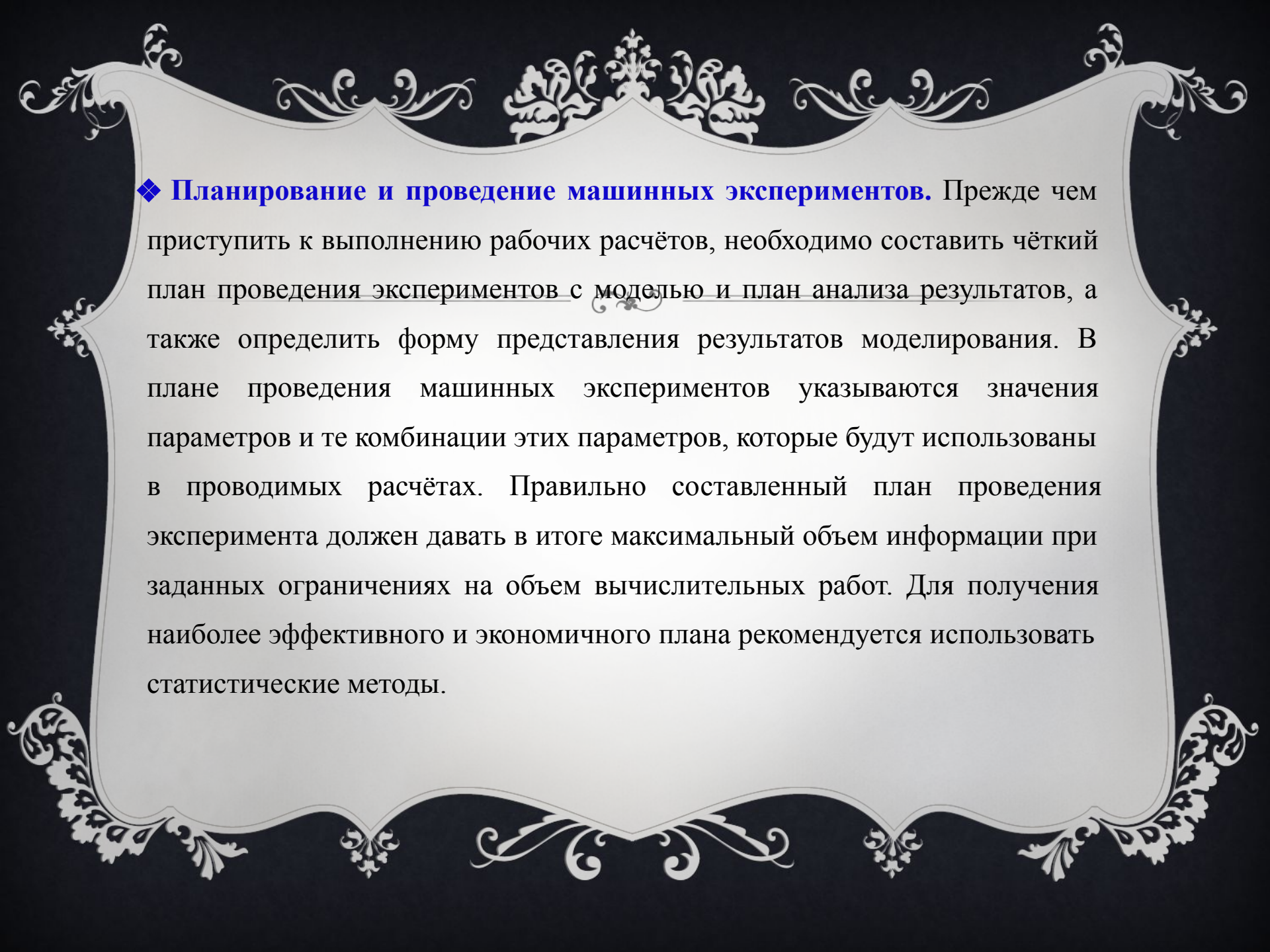
- написание программы на языке ЭВМ;
- оценка работоспособности программы с использованием тестов;
- оценка затрат машинного времени на один цикл работы модели;
- подготовка формы представления входных и выходных данных.

❖ Для моделирования могут использоваться как универсальные алгоритмические языки, так и специализированные языки. После написания программы сначала отдельные её части проверяются путём решения на ЭВМ задач-тестов. Затем все части программы объединяются и проверяется работоспособность модели в целом.

❖ **Техническая документация на этапе реализации модели.** В конце этапа реализации модели должна быть составлена следующая документация:

- ❖ полная схема алгоритма моделирования технологического процесса, куда включены подробные математические выражения;
- ❖ описание программы с указанием системы принятых обозначений;
- ❖ свод входных выходных величин с указанием обозначения, размерности, масштаба, диапазона изменения;
- ❖ инструкция по работе с программой;
- ❖ оценка затрат машинного времени на один цикл работы модели.

◆ **Результаты моделирования.** На третьем этапе моделирования - этапе получения и анализа результатов - ЭВМ используется для проведения рабочих расчётов. Результаты этих расчётов подвергаются анализу, который приводит к определённым выводам. На этом этапе достигается конечная цель решения задачи: определяется эффективный технологический режим или оптимальная схема технологического процесса, а также исследуются будущие приложения и возможности расширения модели.

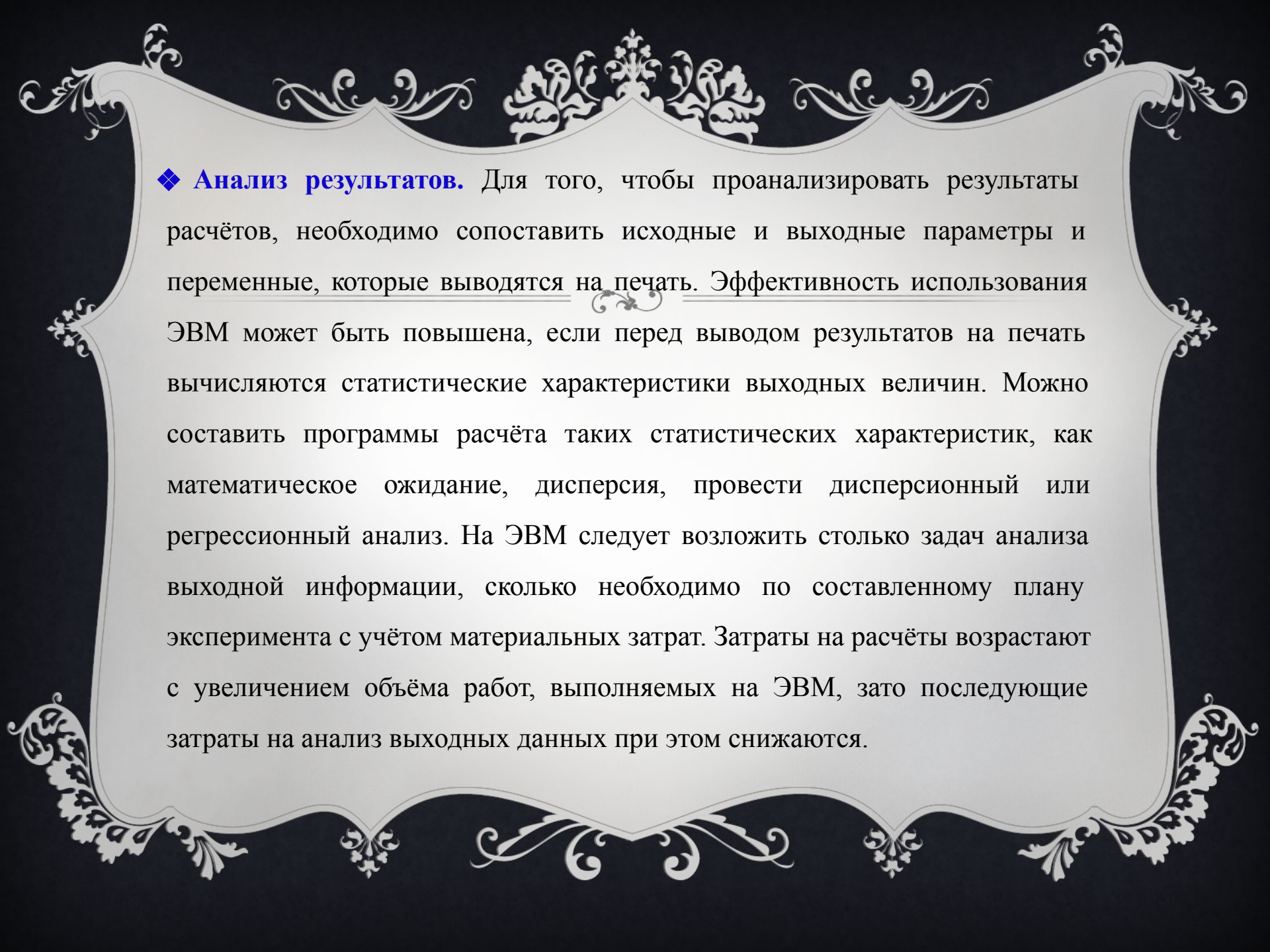


◆ **Планирование и проведение машинных экспериментов.** Прежде чем приступить к выполнению рабочих расчётов, необходимо составить чёткий план проведения экспериментов с моделью и план анализа результатов, а также определить форму представления результатов моделирования. В плане проведения машинных экспериментов указываются значения параметров и те комбинации этих параметров, которые будут использованы в проводимых расчётах. Правильно составленный план проведения эксперимента должен давать в итоге максимальный объем информации при заданных ограничениях на объем вычислительных работ. Для получения наиболее эффективного и экономичного плана рекомендуется использовать статистические методы.

❖ **Проведение расчётов на ЭВМ.** После разработки плана проведения машинного эксперимента приступают к расчётам на ЭВМ. Последовательность выполнения расчётов следующая:

- *формирование наборов исходных данных;*
- *подготовка исходных данных к выводу в ЭВМ;*
- *собственно расчёты;*
- *получение выходных данных.*

❖ Моделирование обычно производится в два этапа: контрольные, а затем рабочие расчёты. Контрольные расчёты проводят с целью проверки модели и определения чувствительности результатов, т. е. выходных данных, к изменению исходных параметров. Существуют различные методы проведения анализа чувствительности. Один из них состоит в использовании статистического планирования, например, рандомизированных планов или дробных факторных экспериментов. Другой метод заключается в вычислении частных производных каждой переменной в каждом уравнении. В результате получают совокупность выражений для величины изменения каждой переменной на выходе в зависимости от изменения входных переменных.



❖ **Анализ результатов.** Для того, чтобы проанализировать результаты расчётов, необходимо сопоставить исходные и выходные параметры и переменные, которые выводятся на печать. Эффективность использования ЭВМ может быть повышена, если перед выводом результатов на печать вычисляются статистические характеристики выходных величин. Можно составить программы расчёта таких статистических характеристик, как математическое ожидание, дисперсия, провести дисперсионный или регрессионный анализ. На ЭВМ следует возложить столько задач анализа выходной информации, сколько необходимо по составленному плану эксперимента с учётом материальных затрат. Затраты на расчёты возрастают с увеличением объёма работ, выполняемых на ЭВМ, зато последующие затраты на анализ выходных данных при этом снижаются.

❖ **Наглядное представление результатов моделирования.** Результаты моделирования могут быть представлены в виде таблиц, графиков, поверхностей отклика, диаграмм. Таблица должна составляться в простой форме и содержать только одну главную идею. Попытки отразить в одной таблице несколько основных связей приводят к затруднению интерпретации. Более наглядную иллюстрацию дают графики.

❖ Наряду с графическим изображением или вместо него, можно приводить поверхности отклика. Они представляются аналитически с помощью уравнений поверхности отклика, то есть аналитических выражений зависимости функции от двух или более параметров. Для получения уравнений поверхности отклика используют стандартные численные методы аппроксимации, позволяющие представить критерии эффективности в виде различных функций. Выбор формы представления результатов моделирования зависит от конкретной задачи.



❖ **Оценка результатов, подведение итогов и рекомендации.** После анализа результатов моделирования появляется возможность оценить, насколько эти результаты способствуют решению поставленной задачи. Проанализировав и оценив результаты, необходимо кратко их подытожить. Следует отметить главные особенности результатов эксперимента, полученных по плану эксперимента.

❖ Заключение должно быть ясным, конкретным и основываться на полученных в результате моделирования данных. Сделанные выводы должны логически вытекать из полученных результатов моделирования, и поэтому какие-либо другие выводы являются неприемлемыми.

❖ На основе результатов моделирования и полученных выводов даются определённые рекомендации относительно решения поставленной задачи. Их следует представлять в таком виде, который позволяет принять правильное решение на основе полученной в процессе моделирования информации. Однако рекомендации не ограничиваются рамками одной конкретной задачи. В них должно быть указано на вновь возникшие проблемы и намечены возможные пути их решения.

❖ **Документальное оформление результатов моделирования.** В конце этапа получение результатов моделирования составляются следующие отчётные документы:

- ❖ *план проведения машинных экспериментов;*
- ❖ *значения исходных данных по отдельным циклам расчётов;*
- ❖ *анализ и оценка результатов моделирования;*
- ❖ *выводы с обоснованиями;*
- ❖ *пути дальнейшего совершенствования модели и возможные ее приложения.*

❖ Полная отчётная документация по всей модели должна содержать документацию по каждому из трёх этапов моделирования.

❖ **Математические модели объектов управления.** Различают математические модели *статики* и *динамики*.

❖ **Статическая ММ** описывает установившиеся режимы работы и не содержит производных по времени от составляющих векторов  $X$  и  $U$ .

❖ **Динамическая ММ** описывает переходные режимы работы и содержат производные по времени от составляющих вектора  $U$ .

◆ **Экспериментальные методы построения статических моделей.** Построение статических моделей технологических процессов сводится к определению вида и параметров функции  $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , которая описывает зависимость выходной переменной “у” от входных:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Как правило, эта зависимость записывается алгебраическим уравнением, вид которого предположительно определяется исследователем, а наиболее вероятные значения коэффициентов находят соответствующим математическим методом.

❖ **Графические методы аппроксимации.** В некоторых частных случаях можно подобрать эмпирическую формулу, описывающую результаты эксперимента, непосредственно по графику  $y=f(x)$ . Для этого на графике в прямоугольной системе координат откладывают точки с координатами  $x_i$  и  $y_i$ , где  $x_i$  и  $y_i$  - значения соответственно входного и выходного параметров технологического процесса в каждом измерении. По этим точкам строят график функции, которая наилучшим образом описывает результаты эксперимента. При этом пользуются следующими правилами: число точек над и под кривой должно быть примерно одинаковым; по мере возрастания "X" точки должны по возможности поочередно появляться над и под кривой, построенной кривой для точек, расположенных сверху от неё, должна быть примерно равна сумме отклонений нижних точек. Соблюдая, по возможности, эти правила и сообразуясь с предполагаемым видом зависимости, нужно от руки провести кривую и найти её уравнение.

❖ **Построение графика прямой линии.** Уравнение прямой, выходящей из начала координат, имеет вид:  $y=a*x$ , где  $a$ - коэффициент, характеризующий наклон прямой

❖ **Построение графика параболы.** Парабола является экстремальной функцией и имеет минимум, если  $y=a*x^2$   $a>0$ , и максимум, если  $a<0$ .

❖ **Построение графика кубической параболы.** Этот график по уравнению  $y=a*x^3$  представляет собой кривую с перегибом, который принимается в рассматриваемом методе за условное начало координат  $(x_1, y_1)$

❖ **Построение графика обращённой кубической параболы (“сигмоиды”).** График этой функции ( $y=a*^3 x$ ) также представляет собой кривую с перегибом .

❖ **Определение значимости выбранной аппроксимирующей функции.**

❖ Выбранная функция, описывающая результаты эксперимента для того или иного процесса, может быть значимой или незначимой. Если функция значима, то диапазон её изменения не выходит за пределы допустимого разброса результатов эксперимента, каждый называется допустимым интервалом.

❖ Значимость или незначимость функции можно установить, пользуясь коэффициентом нелинейной корреляции  $R$  и его значимостью, определяемой по критерию Стьюдента  $t_R$

◆ **Метод наименьших квадратов.** Этот метод является наиболее распространённым при построении статических моделей технологических процессов. Исследователь выбирает вид функции:  $y = f(x, a_0, a_1, \dots, a_m)$ . Для описания зависимости выходной переменной  $y$  от входной переменной  $x$  определяют коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_m$  этой функции, исходя из условия: . Численные значения коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_m$  могут быть найдены при решении системы уравнений.



❖ **Определение значимости факторов.** Для оценки влияния каждого фактора на анализируемый показатель в относительных единицах вводятся частные коэффициенты эластичности,

$$\text{Эл} = \Delta X / \Delta Y$$

❖ где  $\Delta X$  – отклонение исследуемого фактора от начального значения, %;

❖  $\Delta Y$  - отклонение анализируемой величины от начального значения, %.

Эти коэффициенты показывают, насколько процентов в среднем изменяется функция с изменением фактора на 1% при фиксированном значении других факторов.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРОИЗВОДСТВА САХАРА

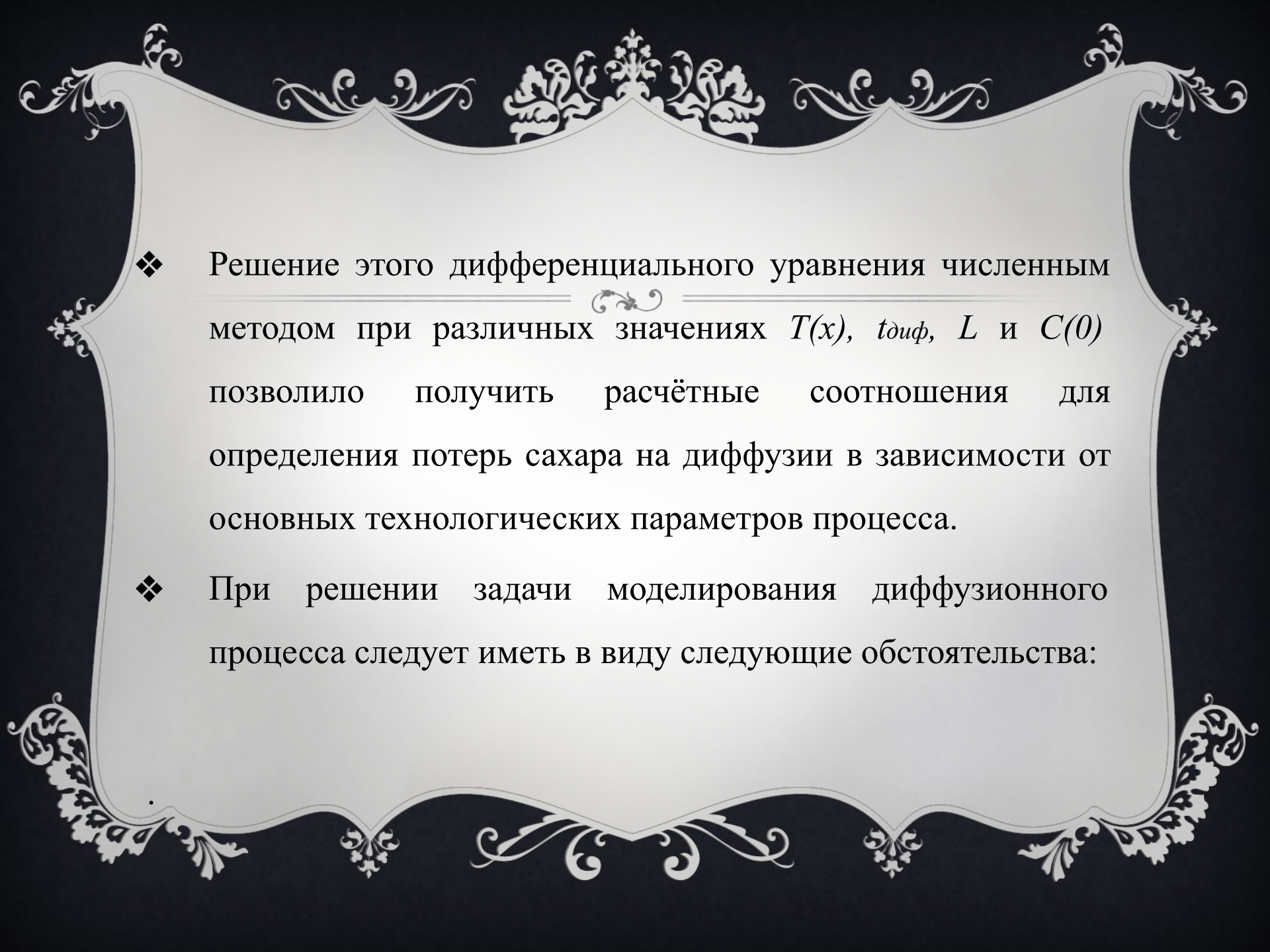
❖ **Математическая модель процесса диффузии.** Одной из важнейших стадий технологии свеклосахарного производства является измельчение (резание свёклы) в стружку, и получение из неё сока диффузионным способом. Полученный диффузионный сок на последующих участках подвергают очистке и обработке в целях получения товарного сахара-песка. Параметры полученного диффузионного сока, его технологические свойства, а также потери сахара в жоме определяют в дальнейшем ход процесса и показатели работы всего завода. Математическое описание процесса экстракции сахара из свекловичной стружки, а также работы всей диффузионной установки в её взаимосвязи, может быть представлено в виде:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -V \frac{\partial C}{\partial x} + D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

где:  $C$  – концентрация сахара в свекловичной стружке;  $V$  – линейная скорость потока (принимается постоянной);  $t$  – время;  $x$  – координата по длине аппарата (концентрация сахара в данном сечении принимается постоянной);  $D$  – коэффициент диффузии.

$$D = (2,05 \cdot T(x) - 60) \cdot L \cdot K_k \quad (3.2)$$

где:  $T(x)$  – температура по длине аппарата;  $L$  – длина 100 г стружки;  $K_k$  – конструктивный коэффициент (определяется экспериментально для каждой конкретной установки).

- 
- ❖ Решение этого дифференциального уравнения численным методом при различных значениях  $T(x)$ ,  $t_{диф}$ ,  $L$  и  $C(0)$  позволило получить расчётные соотношения для определения потерь сахара на диффузии в зависимости от основных технологических параметров процесса.
  - ❖ При решении задачи моделирования диффузионного процесса следует иметь в виду следующие обстоятельства:

❖ *Температурный режим.* Снижение температуры в головной части и середине диффузионного аппарата приводит к недостаточному ошпариванию стружки и повышенному разложению сахарозы под действием инвертазы и микроорганизмов, а, следовательно, резко возрастают потери сахара с жомом и неучтённые потери. Повышение температуры в хвостовой части диффузионного аппарата приводит к значительному переходу несхаров в сок, а, следовательно, к снижению чистоты сока. Поэтому в головной части аппарата необходимо поддерживать температуру  $69...70^{\circ}\text{C}$ , в середине –  $74...75^{\circ}\text{C}$ , в хвостовой части –  $65...68^{\circ}\text{C}$ .

❖ *Продолжительность пребывания сокоотружечной смеси в диффузионном аппарате.* На продолжительность пребывания свекловичной стружки в диффузионном аппарате сильно влияет на производительность аппарата. При работе с полной загрузкой стружка в аппарате находится 80...90 мин. С уменьшением производительности по сравнению с номинальной продолжительность пребывания сокоотружечной смеси в аппарате возрастает. Это приводит к снижению потерь сахара с жомом и увеличению неучтённых потерь сахара от разложения сахарозы под действием инвертазы.

❖ *Отбор (откачка) диффузионного сока.* Отбор сока должен изменяться в пределах 105...130 % к м. св. в зависимости от её качества. ~~Отбор сока может быть вычислен в любой период работы диффузионного аппарата из уравнения баланса сахарозы.~~

❖ *pH питательной воды для диффузии.* Оптимальное значение pH сульфитированной воды на диффузию находится в пределах pH 5,8...6,5. pH воды значительно влияет на переход пектиновых веществ в сок и на образование редуцируемых веществ в соке.

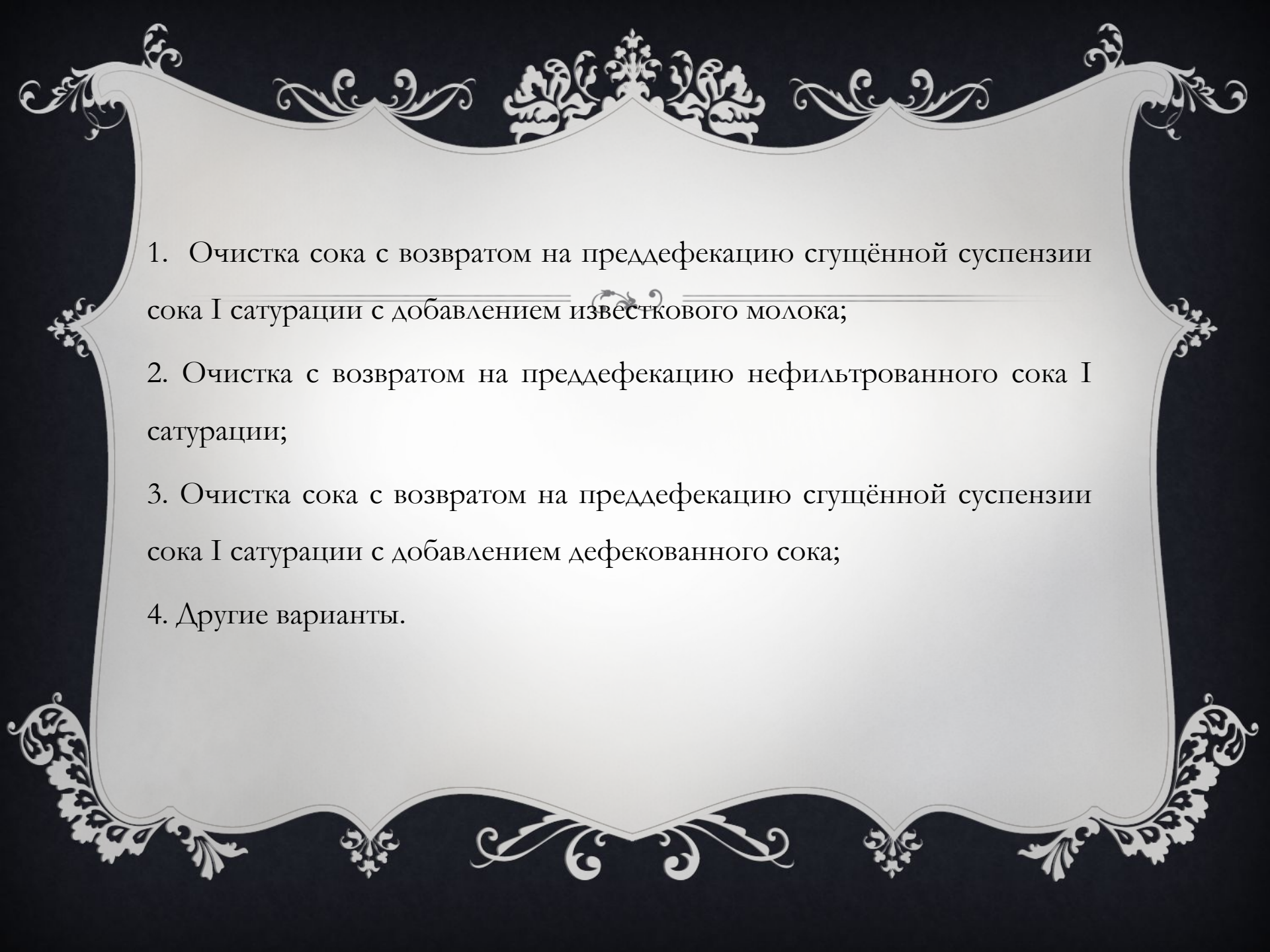
❖ *pH среды диффузионного сока.* В активной части диффузионного аппарата значение pH среды должно быть близко к значению pH свекловичного («нормального») сока свёклы (pH 6,2...6,5). Резкое снижение pH в середине диффузионного аппарата свидетельствует об инфицированности диффузионной установки.



❖ Чтобы оценить степень влияния основных технологических параметров процесса диффузии (коэффициент возврата жомпрессовой воды, коэффициент откачки, дигестия стружки, длина 100 г стружки, средняя температура диффузии) на величину потерь сахара на диффузии, надо представить степень влияния каждого фактора на анализируемый показатель в относительных единицах, для чего вводим частные коэффициенты эластичности:  $E = Y1/Y2$ , где:  $Y1$  - отклонение исследуемого фактора от начального значения, %;  $Y2$  - отклонение анализируемой величины от начального значения, %. Эти коэффициенты показывают, на сколько процентов в среднем изменяется функция с приращением фактора на 1 % при фиксированном значении других факторов.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ОЧИСТКИ

❖ К основным материальным потокам отделения очистки относятся: диффузионный сок, известковое молоко и сатурационный газ, а также сульфитированный сок, являющийся конечным продуктом процесса очистки. Уместно заметить, что процесс очистки диффузионного сока характеризуется большим разнообразием всевозможных схем. К ним следует отнести такие, как :

- 
1. Очистка сока с возвратом на преддефекацию сгущённой суспензии сока I сатурации с добавлением известкового молока;
  2. Очистка с возвратом на преддефекацию нефильтрованного сока I сатурации;
  3. Очистка сока с возвратом на преддефекацию сгущённой суспензии сока I сатурации с добавлением дефекованного сока;
  4. Другие варианты.

## Рассмотрим некоторые варианты схем очистки.

- ❖ *Вариант I.* Очистка сока с возвратом на преддефекацию гущённой суспензии сока I сатурации с добавлением известкового молока.
- ❖ *Вариант II.* Очистка с возвратом на преддефекацию нефильтрованного сока I сатурации.
- ❖ *Вариант III.* Очистка сока с возвратом на преддефекацию гущённой суспензии сока I сатурации с добавлением дефекованного сока.

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ВЫПАРИВАНИЯ**

❖ С помощью данной математической модели рассчитывают параметры рационального управления работой 4...5 корпусных выпарных установок на основе расчёта количества паров самоиспарения и конденсатов. Количество корпусов:  $n=1...5$ . Количество поверхностей нагрева:  $m=1...5$ .

❖ Данные математические модели выполнены дипломниками 2010 и 2011 уч. года Е. Прокофьевым и А. Кобзевым

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ИЗОБАРИЧЕСКОЙ ИСПАРИТЕЛЬНОЙ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ САХАРА

❖ Анализ существующих режимов процесса и синтез оптимальных режимов невозможны без рассмотрения этого процесса как подсистемы, без учёта взаимодействия всех её элементов. Для этого требуется высокая степень формализации функционирования подсистемы с использованием количественных оценок.