МОДИФИЦИРОВАННЫЙ СИМПЛЕКС МЕТОД

Симплекс-метод – не самая эффективная компьютерная процедура, так как она вычисляет и хранит информацию, которая не нужна для текущей итерации и может вообще не использоваться для принятия решений при последующих итерациях. Для коэффициентов неосновных переменных в уравнении (0), коэффициентов введенных основных переменных в других уравнениях и правых частях уравнений при каждой итерации используется только релевантная информация. Поэтому нужна процедура, которая может получать эту информацию эффективно, без вычислений и хранения всех других коэффициентов (это и есть

Он вычисляет и хранит только информацию, необходимую на данный момент, а важные данные передает в более компактной форме.

Он использует *операции с матрицами,* поэтому необходимо описывать задачу используя матрицы.

ЗАГЛАВНЫЕ буквы, выделенные жирным шрифтом представляют **матрицы**, прописные буквы, выделенные жирным шрифтом представляют **векторы**.

Курсив – это скалярные величины, выделенный ноль (**0**) обозначает **нулевой вектор (***его элементы равны нулю, как строки, так и столбцы***)***,* ноль (0) представляет обычное число 0. С использованием матриц стандартная форма модели линейного программирования принимает форму:

Максимизировать *Z* = ***c***

***x*,**

согласно

A x ≤ b and x ≥ 0,

где **c** вектор-

строка $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \ldots, c_n]$,

x, b, и **0** векторы-

столбцы

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

A - матрица

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Для дополненной формы*, вектор-столбец фиктивных переменных:*

$$x_s = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$

Ограничения:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} = \mathbf{b} \qquad \text{and} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} \geq \mathbf{0},$$

I *= (m × m единичная матрица)*

0 *= (n + m элементы нулевого*

Нахождение базового допустимого решения

Общий подход симплекс-метода – получение последовательности *улучшающихся ОД решений до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение. Одна из ключевых особенностей модифицированного симплекс-метода* – то, как он находит новое ОД решение после определения его <u>основных (базисных)</u> и <u>неосновных (небазисных)</u> переменных. Имея эти переменные, получающееся основное решение – решение *m уравнений*

$$[\mathbf{A}, \mathbf{I}]\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{x}_s\end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

В котором *n* $\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{x}_s\end{bmatrix}$ *азисных переменных из n + m элементов* устанавливаются равными нулю.

Исключая эти *n переменных приравниванием к нулю, получаем систему* *уравнений* m с *m переменными (основными (базисными) переменными):*

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b},$$

где вектор базисных переменных

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{bmatrix}$$

получен исключением небазисных (неосновных) переменных:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix}$$

И **базисная матрица**

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mm} \end{bmatrix}$$

Полученная исключением столбцов, соответствующих коэффициентам небазисных переменных из [**A, I].**
(**В дополнение**, элементы х*B, и столбцы B* в разном порядке). Симплекс метод вводит только базисные переменные, такие что **B** - невырожденная***,*** *так что обратная матрица* $\boldsymbol{B^{-1}}$ всегда будет существовать**.**
Чтобы решить ***B* x *B* = *b*,** *обе стороны умножаются* на $\boldsymbol{B^{-1}}$ **:**
$\boldsymbol{B^{-1}B}$ x $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B^{-1}b}$

$$\boxed{\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}.}$$

c_B* – *вектор, чьи элементы - коэффициенты целевых функций* (_включая нули для фиктивных переменных_) для соответствующих элементов ***x_B*. *Целевая функция*** д[illegible]ешения:

$$\boxed{Z = \mathbf{c}_B\mathbf{x}_B = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}.}$$

Пример:

$$\mathbf{c} = [3, 5], \quad [\mathbf{A}, \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

- Итерация 0

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1},$$

so $$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B = [0, 0, 0]$$ so $$Z = [0, 0, 0] \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = 0$$

- Итерация 1

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

so

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B = [0, 5, 0]$$

so

$$Z = [0, 5, 0] \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 30$$

- *Итерация 2*

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

so

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B = [0, 5, 3]$$

so

$$Z = [0, 5, 3] \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 36$$

Матричная форма для текущего множества уравнений

Матричная форма для множества уравнений, появляющаяся в симплекс-таблице для любой итерации исходного симплекс-метода. Для исходной системы уравнений*, матричная форма такая:*

$$\begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{c} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

Алгебраические операции, выполняемые симплекс-методом (умножить уравнение на константу и прибавить произведение одного уравнения на другое) выражаются в виде матрицы, предварительно умножив обе части исходной системы уравнений на соответствующие матрицы

Iteration	Basic Variable	Eq.	Coefficient of: Z	Original Variables	Slack Variables	Right Side
0	Z	(0)	1	$-\mathbf{c}$	$\mathbf{0}$	0
	$\mathbf{x}_B$	$(1, 2, \ldots, m)$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{b}$
Any	Z	(0)	1	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}$	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
	$\mathbf{x}_B$	$(1, 2, \ldots\ m)$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Эта матрица будет иметь те же элементы, что и единичная матрица, *за исключением того*, что каждое произведение для определенной алгебраической операции займет место, необходимое для выполнения этой операции, используя перемножение матриц. Даже после серии алгебраических операций в течение нескольких итераций, мы все еще можем сделать вывод, что эта матрица должна быть для всей серии, используя то, что мы знаем о правой стороны новой системы уравнений. После любой итерации, $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ и $Z = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, поэтому правые стороны новой системы уравнен

$$\begin{bmatrix} Z \\ \mathbf{x}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}$$

Так как мы выполняем одни и те же серии алгебраических операций с обеими сторонами исходного множества, для умножения правой и левой части, мы используем одну и ту же матрицу. Следовательно,

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1} \\ 0 & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{c} & 0 \\ 0 & \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c} & \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1} \\ 0 & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix}$$

Желаемая матричная форма системы уравнений *после любой итерации:*

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c} & \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1} \\ 0 & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}.}$$

Example: матричная форма, полученная после итерации 2 для задачи о стекольном заводе, используя ***B**^-1^* и с*B:*

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1} = [0, 5, 3] \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = [0, \tfrac{3}{2}, 1],$$

$$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c} = [0, 5, 3] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - [3, 5] = [0, 0].$$

Используя величины $\mathbf{x}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$:

$$\left[\begin{array}{c|cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \begin{bmatrix} Z \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Только $\boldsymbol{B}^{-1}$ *должна быть получена для вычисления всех чисел симплекс-таблицы* из исходных параметров задачи (**A, b, c*B)***. Любое из этих чисел может быть получено индивидуально, как правило, выполняют только векторное умножение (одна строка на один столбец) вместо полного матричного умножения. Необходимые числа для выполнения итераций симплекс-метода можно получить по мере необходимости, не проводя ненужные вычисления, чтобы получить *все числа*.

Краткий обзор модифицированного симплекс метода

1. ***Инициализация:*** *Как в исходном симплекс методе.*

2. ***Итерация:*** *Шаг 1 Определить введенные базисные (основные) переменные: Как в исходном симплекс методе.*

Шаг *2 Определить уходящие базисные переменные: Как в исходном симплекс методе*, за исключением подсчета только *необходимых* для этого чисел [коэффициенты введенных базисных переменных в каждом уравнении за исключением Ур. (0), а затем, для каждого строго положительного коэффициента, правая часть этого уравнения].

Шаг 3 Определить новое ОД решение: Получить $\boldsymbol{B^{-1}}$ ***и задать*** $\boldsymbol{x_B=B^{-1}b}$.

3. ***Анализ на оптимальность:*** *Как в исходном симплекс методе,* за исключением подсчета только *необходимых* для этого анализа чисел, т.е., коэффициентов небазисных (неосновных) переменных в Уравнении (0).

На шаге 3 итерации, $\boldsymbol{B^{-1}}$ можно получить каждый раз используя стандартную компьютерную программу для обращения (инверсии) матрицы. Так как **B (**затем $\boldsymbol{B^{-1}}$**)** мало изменяется от одной итерации к другой, более эффективно получать новое $\boldsymbol{B^{-1}}$