Мощность множества

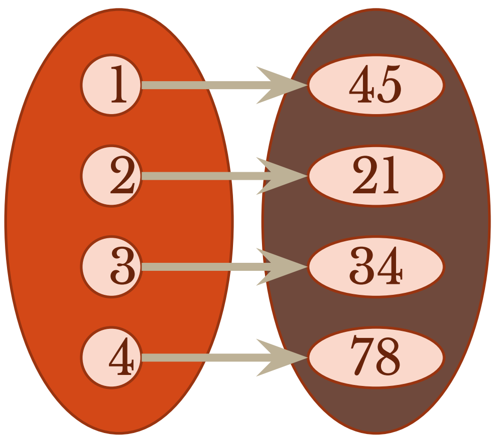
Элементы комбинаторики.

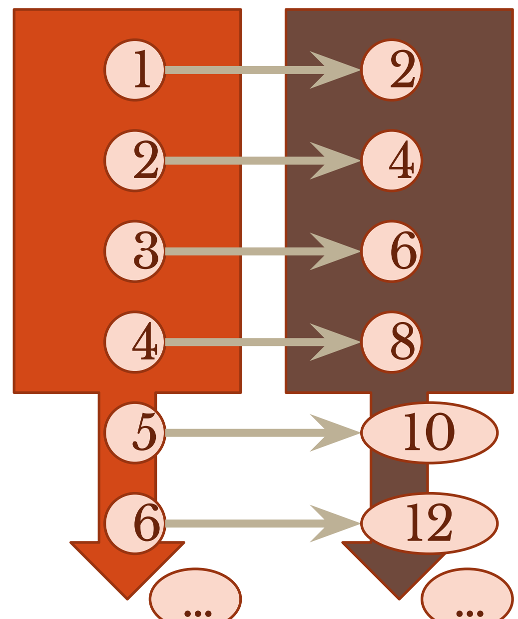
Счетные и континуальные множества

Отношение равномощности множеств

- Множества A и B называются ***равномощными***, если между ними **можно** установить взаимно-однозначное соответствие (биекцию).

$A \sim B$ ⟷ $(\exists \varphi : A \to B)\ \varphi$ – биекция





Примеры равномощных множеств

{1; 2; 3; 4}~{45;21;34;78}

- Чисел 45, 21, 34, 78 **столько же**, сколько чисел 1, 2, 3, 4.
- Букв a, b, c, d **столько же**, сколько чисел 1, 2, 3, 4.
- ...

Очевидно!

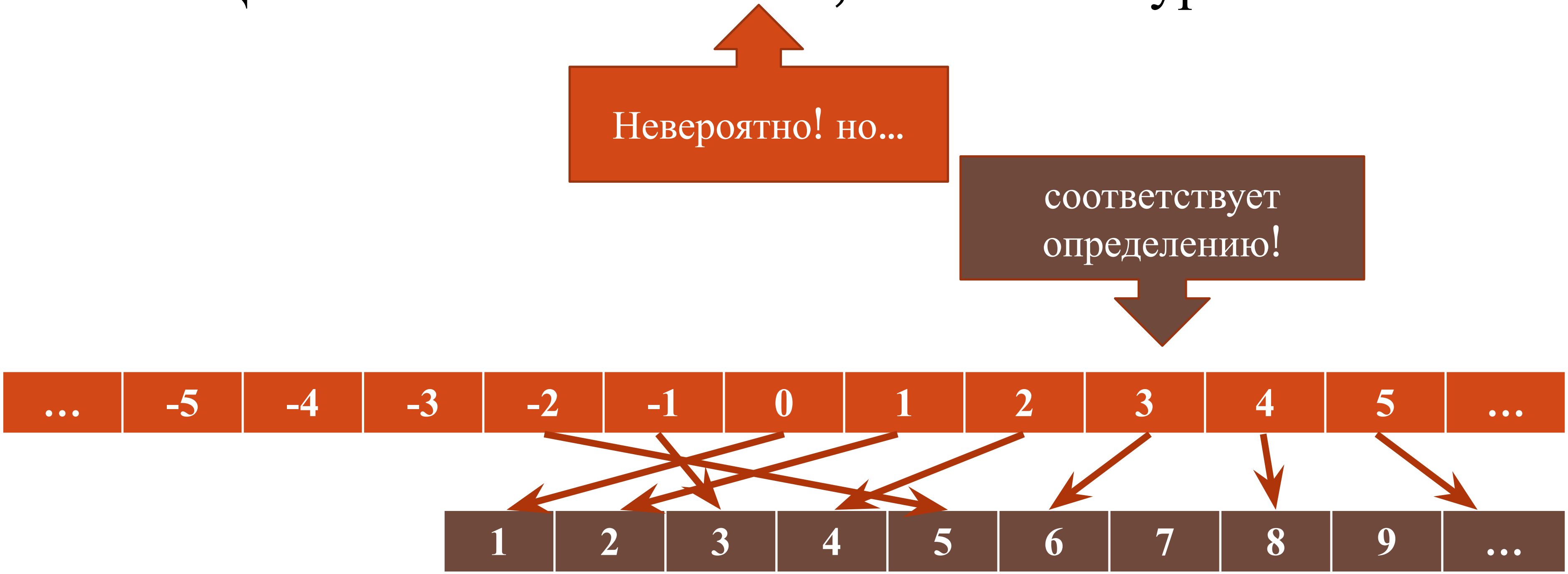
N ~ {2n| n∈N}

- Натуральных чисел **столько же**, сколько четных чисел.
- Целых чисел **столько же**, сколько натуральных чисел.
- ...

Невероятно! но...

Парадоксы бесконечного

- Целых чисел **столько же**, сколько натуральных.



Парадоксы бесконечного

- Рациональных чисел (целых и дробных) **столько же**, сколько целых.

Невероятно! но…

соответствует определению!

…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
…	-3/2		-1/2		1/2		3/2	…
…		-2/3	-1/3		1/3	2/3		…
…	-3/4		-1/4		1/4		3/4	…
…	-3/5	-2/5	-1/5		1/5	2/5	3/5	…
	…	…	…		…	…	…	…

Получили взаимно-однозначное соответствие между множеством Z и множеством Q

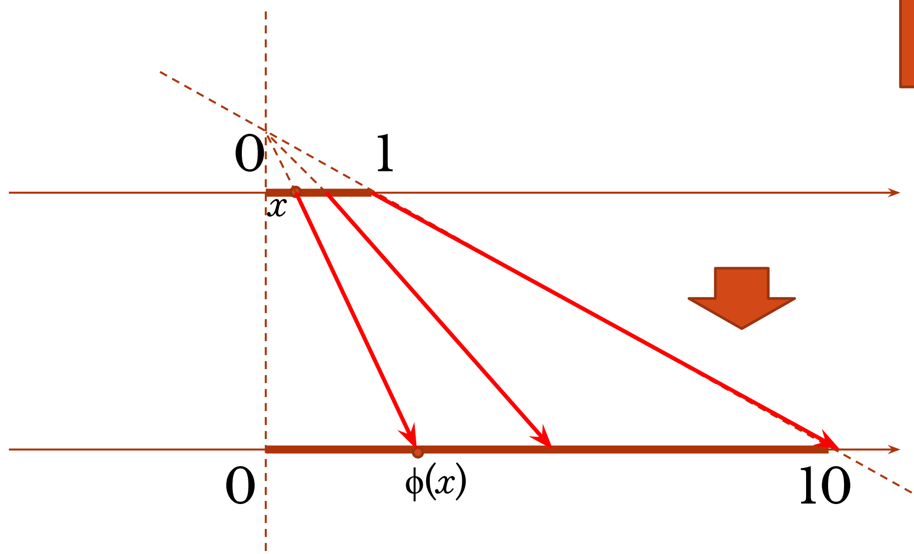
…	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
…	-3	-1/3	-2	-1/2	-1	0	1	1/2	2	1/3	3	1/4	2/3	3/2	…

Парадоксы бесконечного

- Действительных чисел на отрезке [0;10] **столько же**, сколько на отрезке [0;1].

Невероятно! но…

соответствует определению!



Будем проектировать точки отрезка [0;1] на отрезок [0;10] из центра проекции, полученного на пересечении прямых, соединяющих концы отрезков

$[0;1]\sim[0;10]$

$$(\exists\varphi\colon [0;1]\to[0;10])\ \varphi(x)=10x,$$

φ – биекция

Парадоксы бесконечного

- Действительных чисел **столько же**, сколько чисел на интервале (-π/2; π/2).

соответствует определению!

Невероятно! но…

Получили взаимно-однозначное соответствие между множеством (-π/2; π/2) и множеством R

$$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\sim\mathbf{R}$$

$$(\exists\varphi\colon[0;1]\to[0;10])\ \varphi(x)=\mathrm{tg}\,x,$$

$$\varphi - \text{биекция}$$