НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Лекция 1

Направление обучения – «Архитектура»

- Чертеж – международный язык общения техников.
- Начертательная геометрия – грамматика этого языка (чертежа).
- Начертательная геометрия изучает методы построения изображений пространственных объектов на плоскости, а также способы преобразования полученных изображений для упрощения решения различных инженерных задач.

Базовые геометрические элементы начертательной геометрии

- **Точка** – абстрактное математическое понятие. Нульмерный объект (не имеет измерений).
- **Линия** – непрерывное одномерное множество точек (цепочка точек). Измерение : только длина. Толщины нет.
- **Поверхность** – непрерывное двумерное множество точек. Измерения : длина, ширина, площадь. Толщины и объема нет.

Проективное пространство

Для устранения неоднородности Евклидова пространства

условно принято,

что параллельные между собой прямые

пересекаются

в бесконечно удаленной точке F^∞ -

несобственной точке пространства.

$$(m \parallel n) \Rightarrow (m \cap n = F^\infty)$$

Евклидово пространство, дополненное несобственными элементами, называют проективным.

Метод проецирования

Перспективная проекция

Аксонометрическая проекция

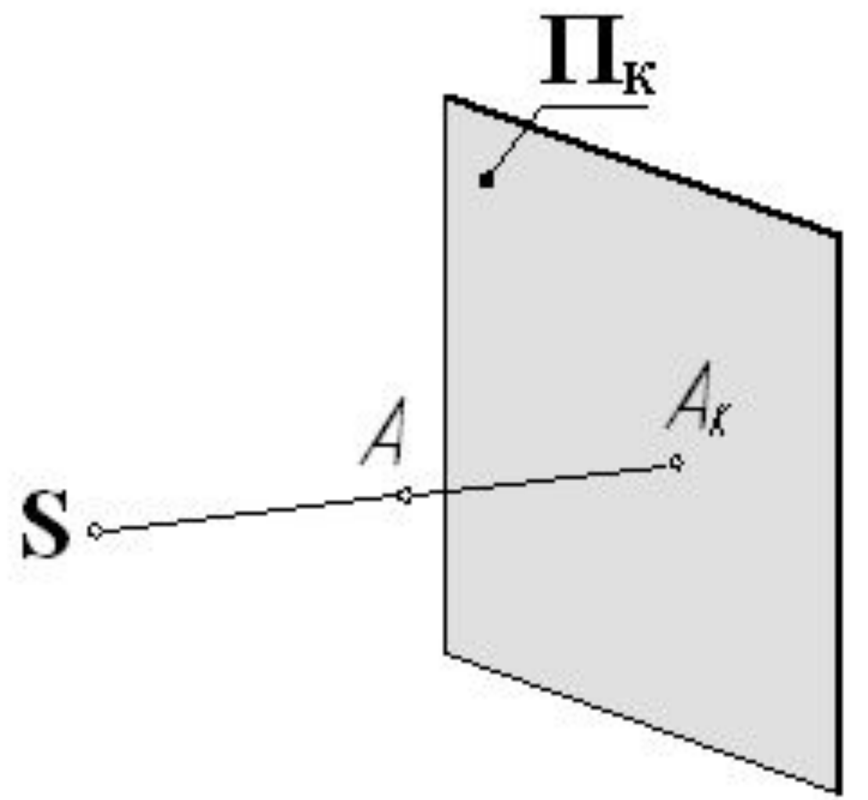
Ортогональные проекции

Все изображения разные, но их объединяет то, что в основе их построения лежит один и тот же метод – **метод проецирования**

Изображения, построенные на основе метода проецирования, называются **проекционными**

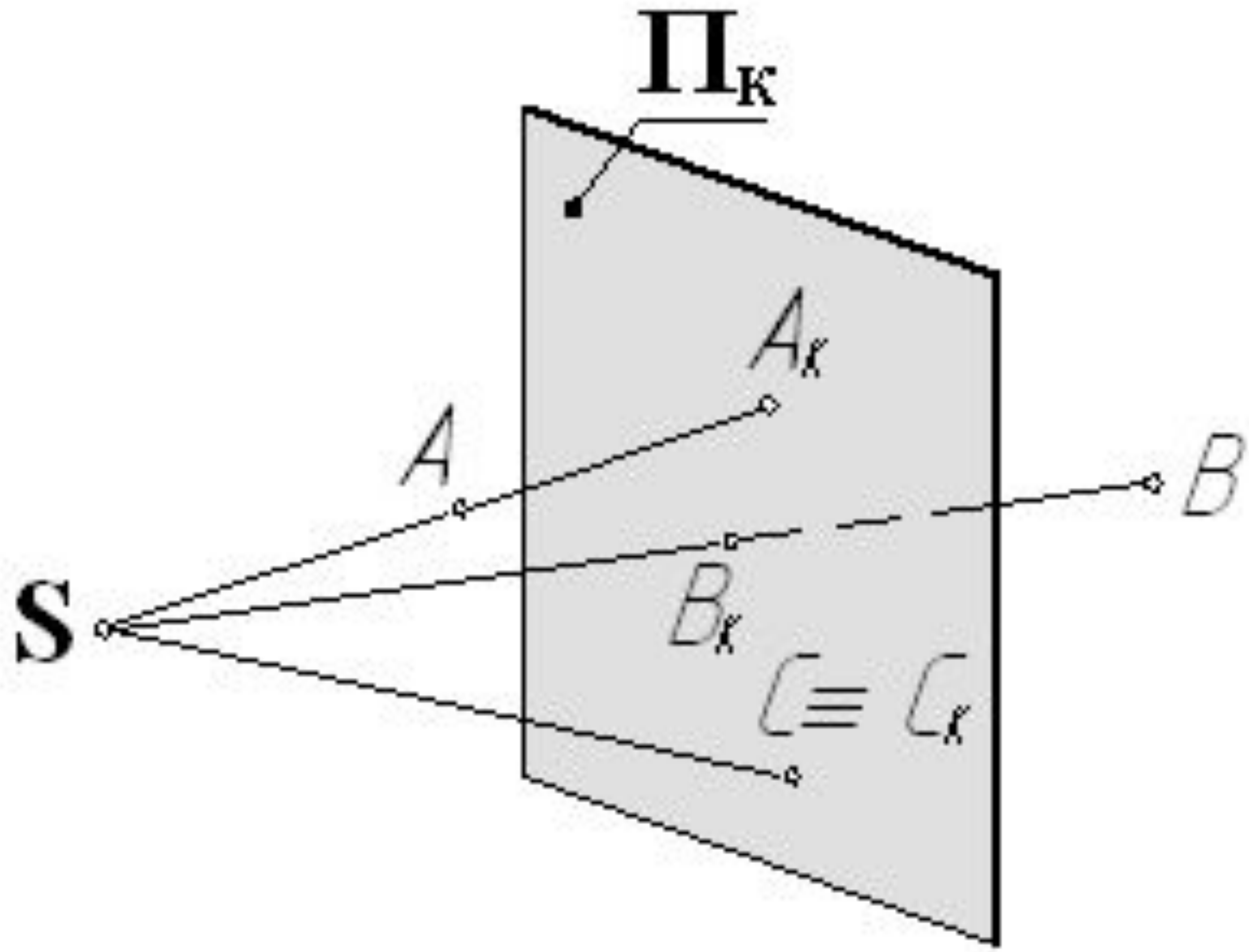
Метод проецирования

$П_к$ – плоскость проекций
S – центр проецирования
A – объект (точка)
SA – проецирующая прямая



$$SA \cap П_К = A_К$$

$A_К$ – проекция объекта (точки) *A* на плоскости проекций $П_к$



Для любой точки пространства

$$SA \cap П_к = A_к \quad SB \cap П_к = B_к \quad SC \cap П_к = C_к$$

$$SA \cap SB \cap SC \cap \ldots = S$$

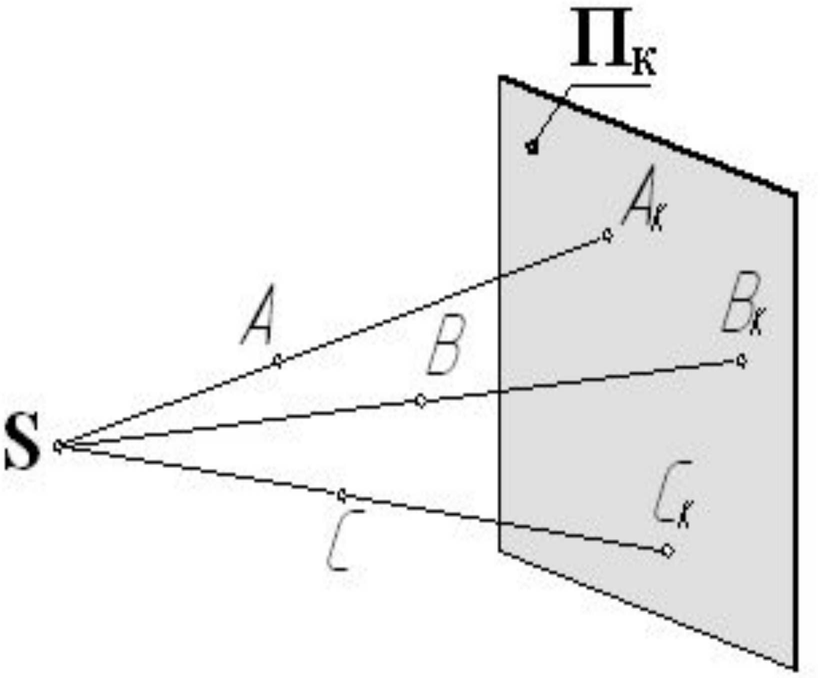
Варианты метода проецирования

Центральное проецирование
(коническое)

Расстояние от $\mathbf{S}$ до плоскости проекций $\Pi_к$ измеримая величина.

$\mathbf{S}$ (*центр проецирования*) -– **<u>реальная точка</u>**.

$$SA \cap SB \cap SC \ldots = S$$

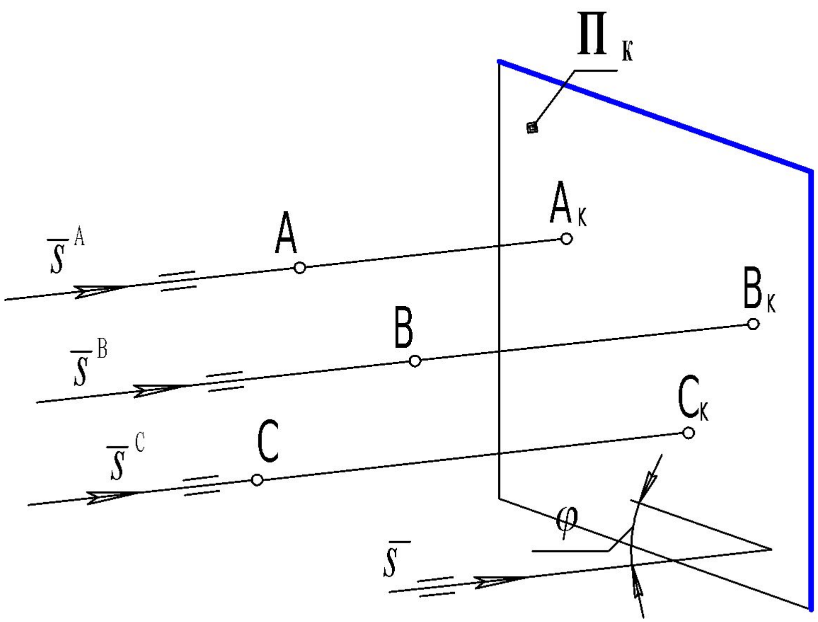


Параллельное проецирование
(цилиндрическое)

S (*центр проецирования*) – **<u>несобственная точка</u>**.

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{S}^{\infty}$$

$$SA \cap SB \cap SC \ldots = S^{\infty}$$

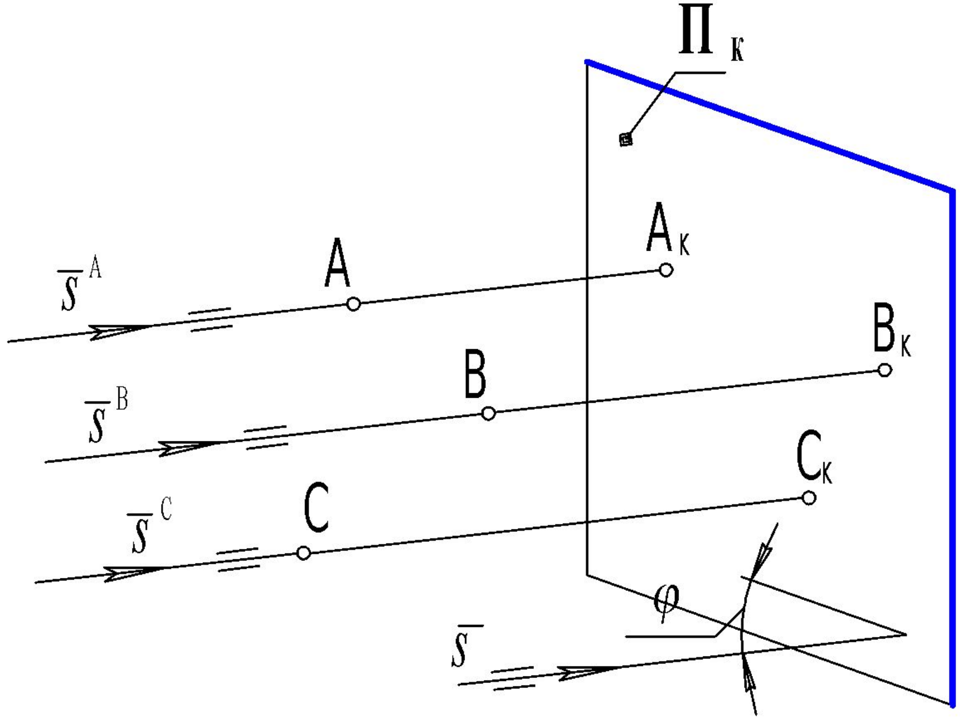


следовательно

$$S^{\infty}A \parallel S^{\infty}B \parallel S^{\infty}C \parallel \ldots \parallel s$$

s – *направление проецирования;* $S^{\infty} \in s$

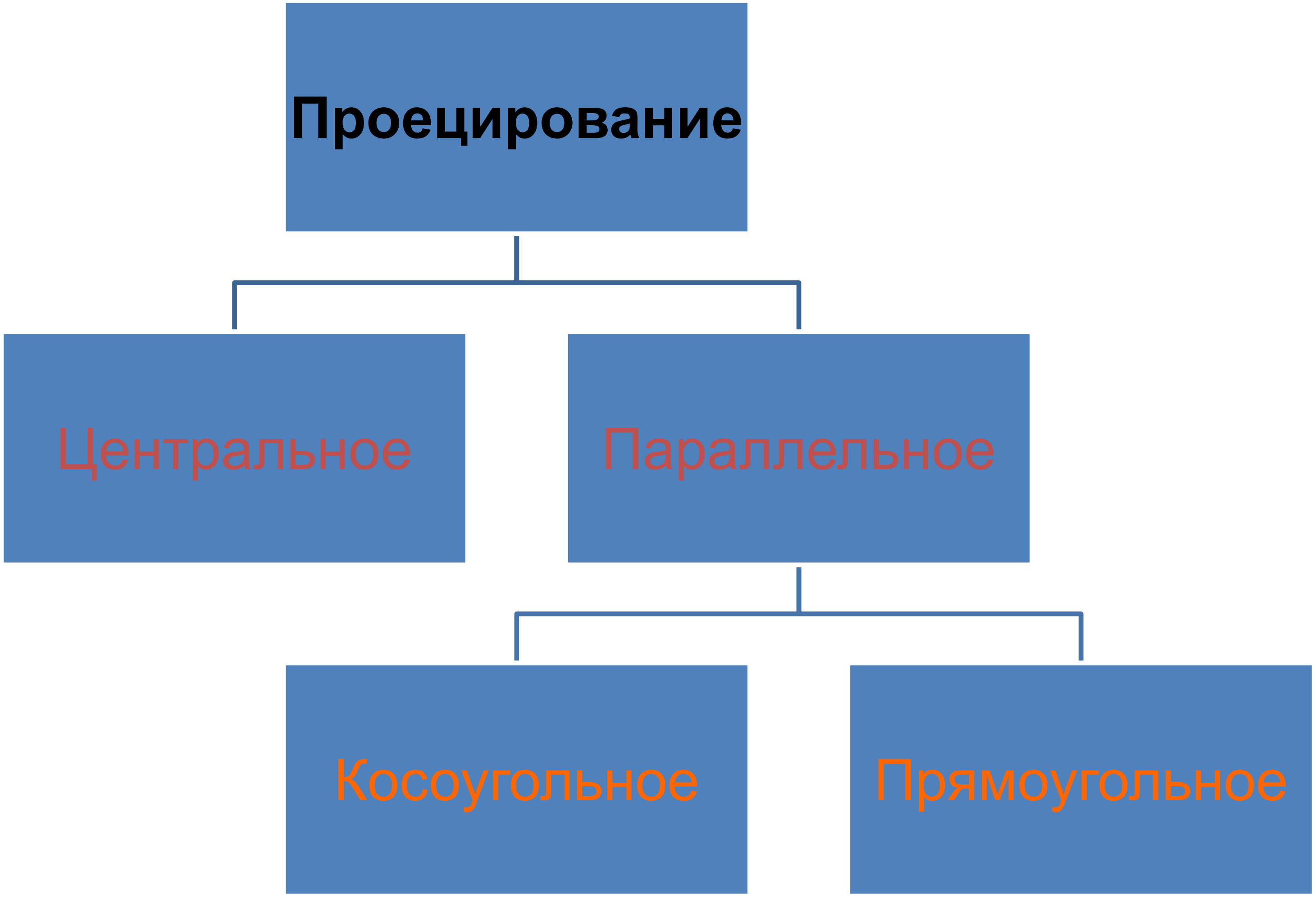
Параллельное проецирование

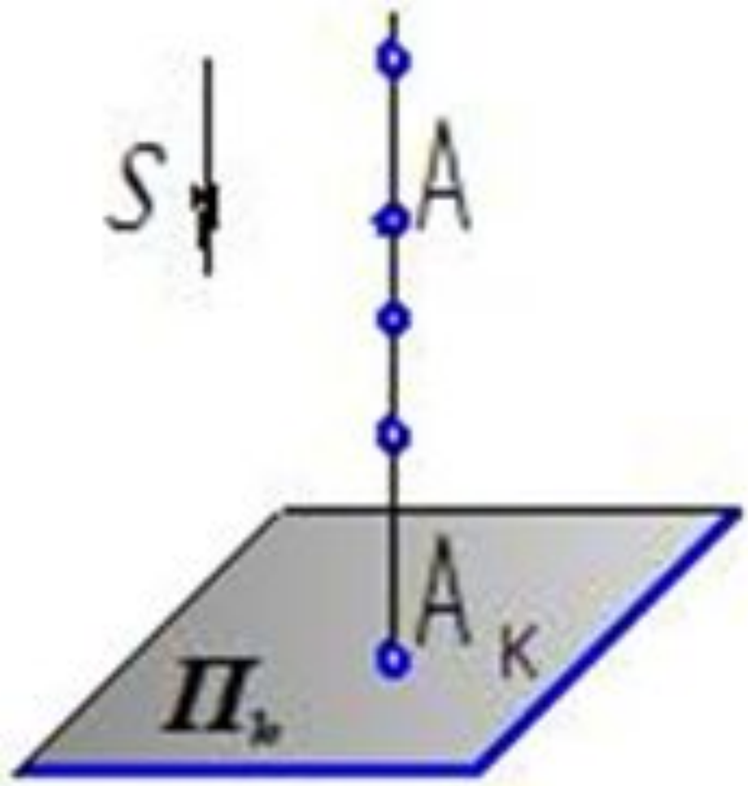


$(s \wedge \Pi_к) = \angle\ \varphi$

$\angle\varphi = 90^\circ \vee (s \perp \Pi_к) \Rightarrow$ проецирование прямоугольное (ортогональное)

$\angle\varphi \neq 90^\circ \vee (s \not\perp \Pi_к) \Rightarrow$ проецирование косоугольное


Проецирование
Центральное
Параллельное
Косоугольное
Прямоугольное



Проекции $A_к$ соответствует любая точка на проецирующей прямой, проходящей через точку A.

Одна проекция точки без каких-либо дополнительных условий однозначно не определяет ее положение в пространстве.

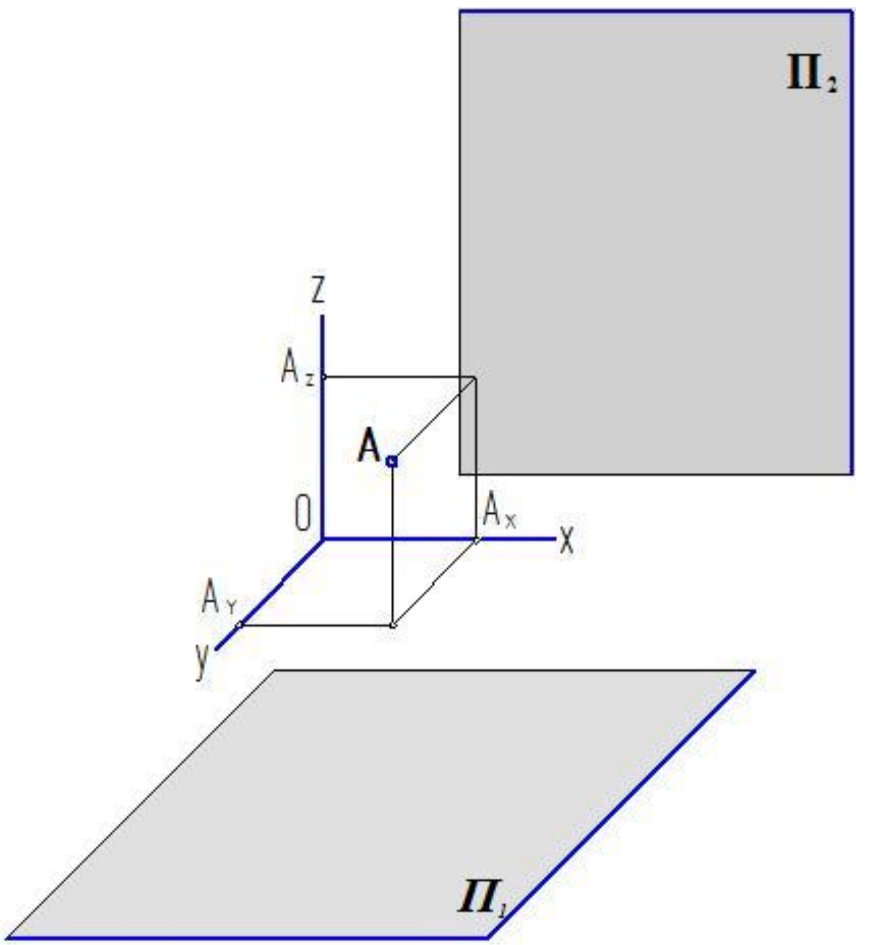
Введем дополнительные условия:

−Рассматриваем только прямоугольное проецирование.

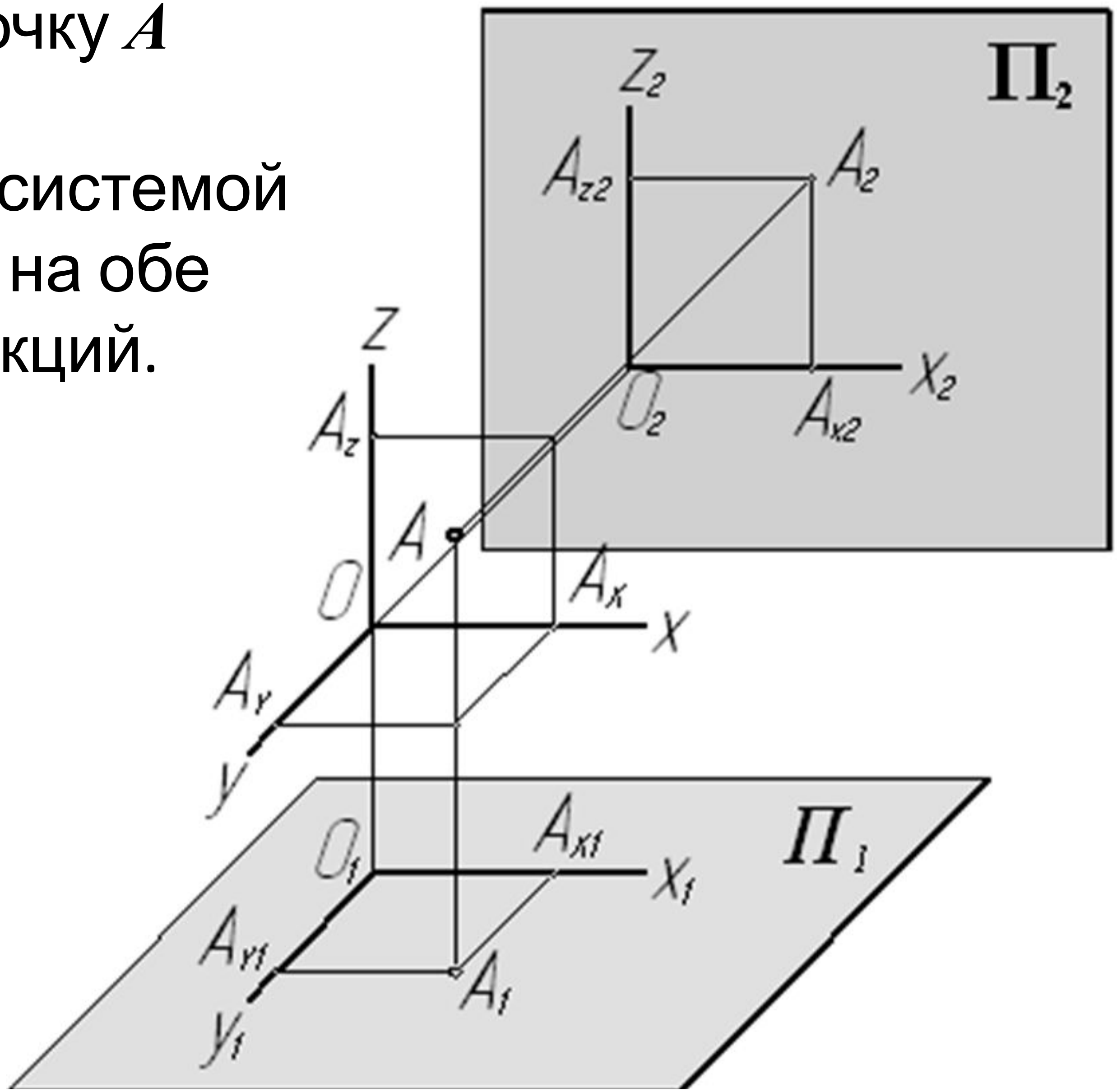
−Вводим пространственную систему координат ***Oxyz***, и задаем положение точки, например, ***A*** в этой системе.

−Заменяем обозначение плоскости проекций $\mathbf{П_к}$ на $\mathbf{П_1}$ и вводим вторую плоскость проекций $\mathbf{П_2}$, перпендикулярную $\mathbf{П_1}$ ($\mathbf{П_1} \perp \mathbf{П_2}$).

−Ориентируем пространственную систему координат так, чтобы две координатные плоскости ***Oxy*** и ***Oxz*** расположились параллельно плоскостям проекций $\mathbf{П_1}$ и $\mathbf{П_2}$ соответственно (***Oxy*** ∥ $\mathbf{П_1}$; ***Oxz*** ∥ $\mathbf{П_2}$).

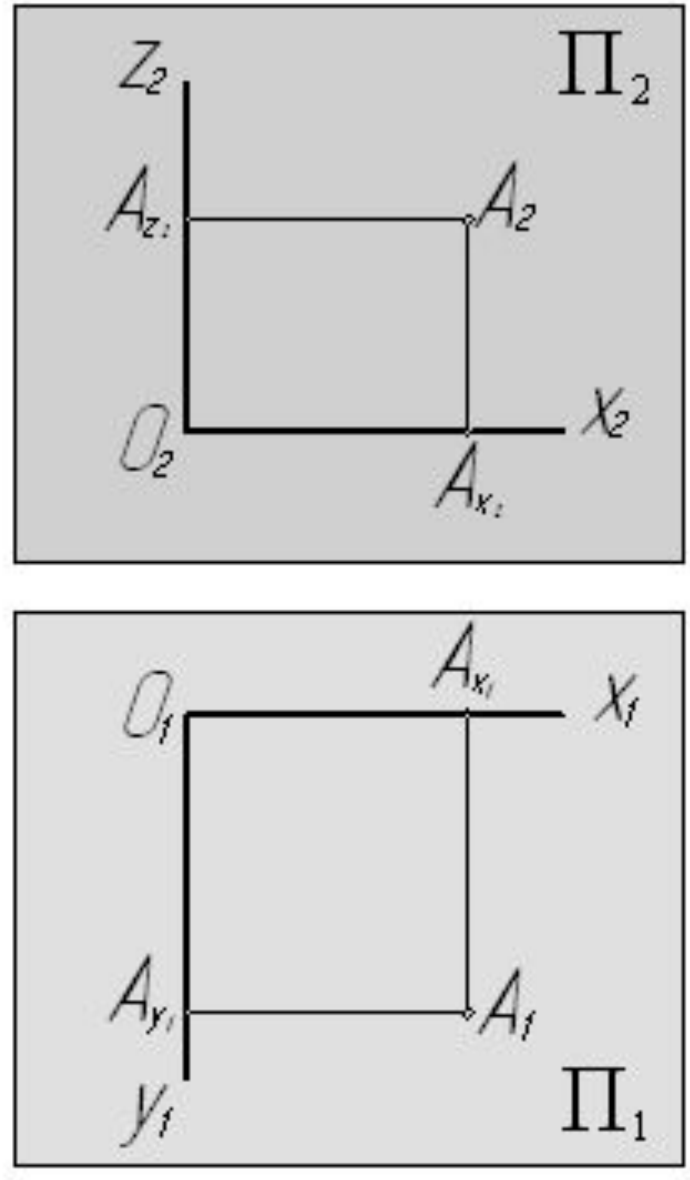


Ортогонально спроецируем точку *A* совместно с ортогональной системой координат ***Oxyz*** на обе плоскости проекций.



В этом случае на полученных проекциях мы имеем все три координаты точки А относительно выбранной системы координат, которые отображаются в истинную величину.

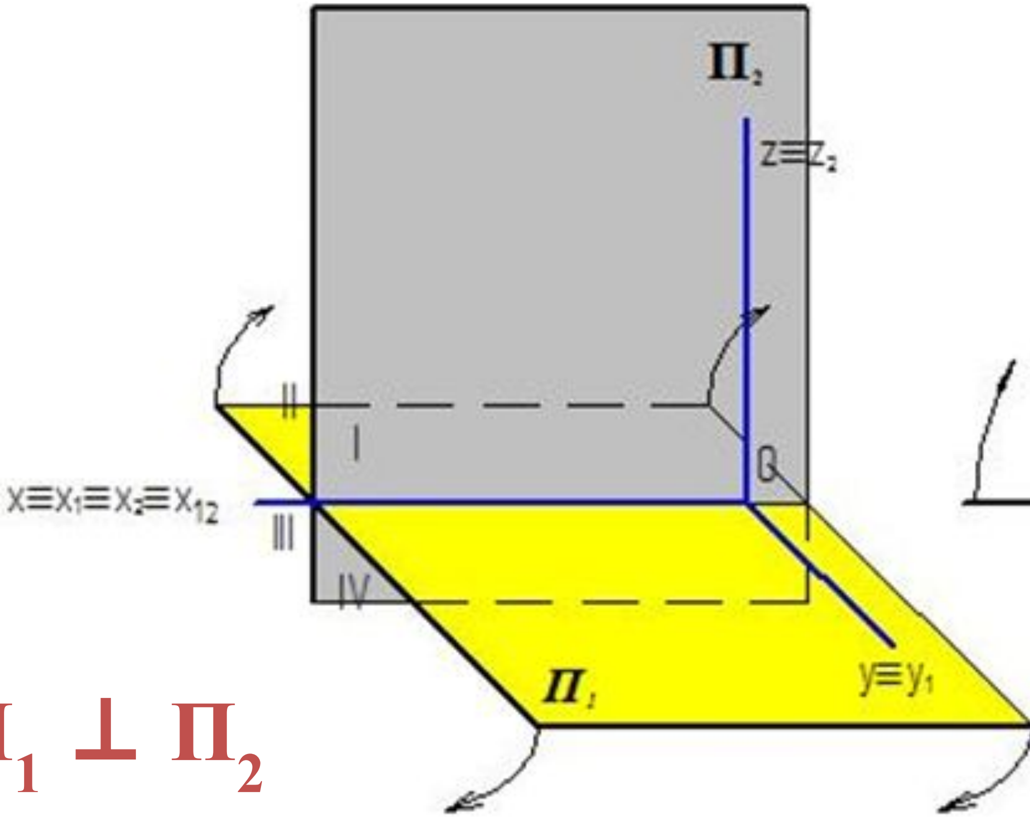
Следовательно:

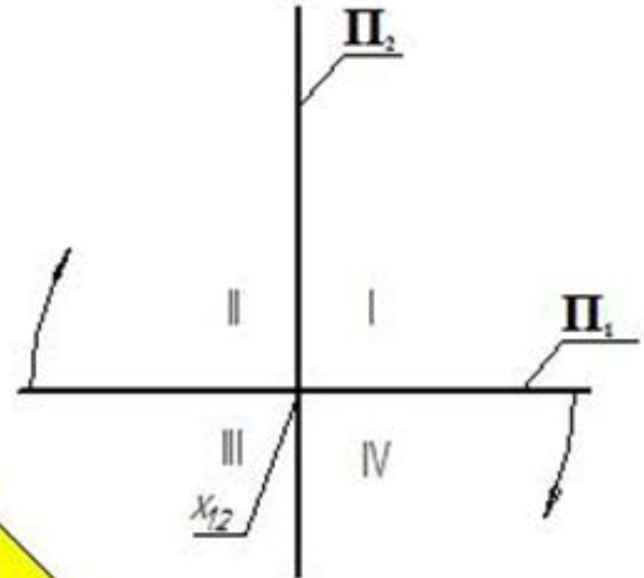


Ортогональные проекции точки на две взаимно перпендикулярные плоскости однозначно определяют положение точки в пространстве и делают изображения обратимыми.

Метод Монжа

Ортогональная система двух плоскостей проекций





$$\Pi_1 \perp \Pi_2$$

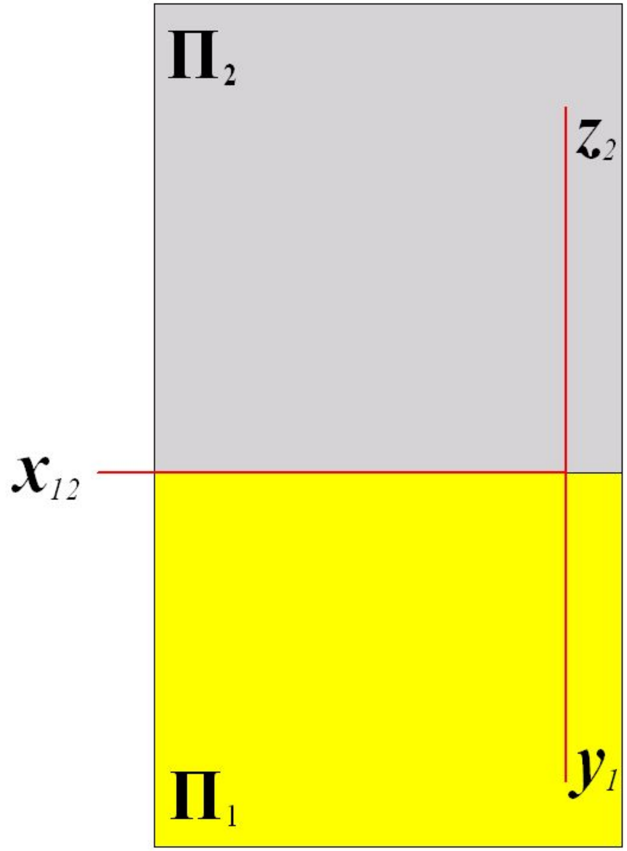
$$\Pi_1 \cap \Pi_2 = (1,2)$$

Π_1 – горизонтальная плоскость проекций

Π_2 – фронтальная плоскость проекций

I, II, III, IV – четверти пространства

Плоскости проекций Π_1 и Π_2 совмещены в одну общую плоскость.

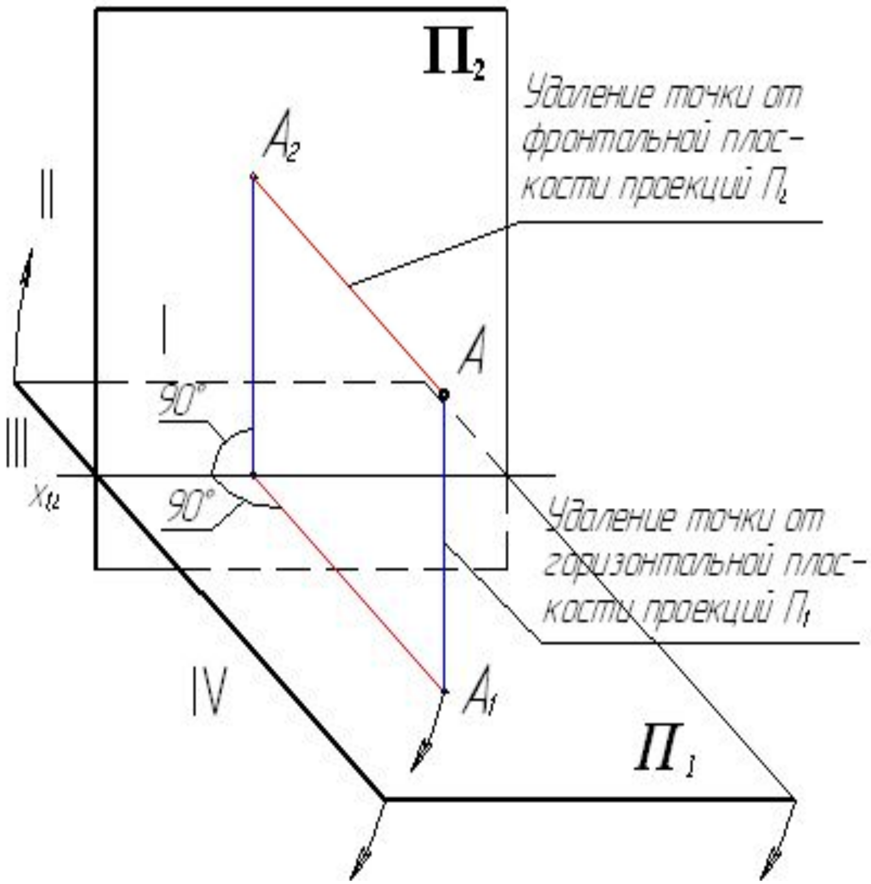


Так как плоскости проекций бесконечны, то их границы не показывают и координатные оси y и z также не показывают.

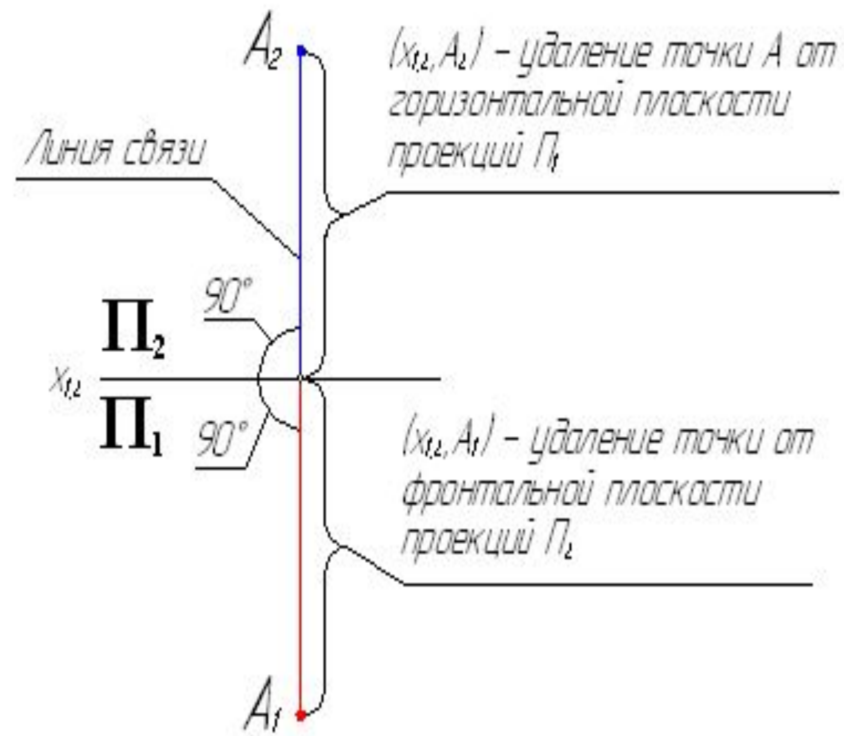
Проецирование точки

Точка в I-ой четверти

Наглядное изображение



Плоскостное изображение - **Эпюр**



Горизонтальная и фронтальная проекции точки располагаются на одной прямой, перпендикулярной оси x_{12}

$$A_1A_2 \perp x_{12}$$

Расстояние от оси x_{12} до горизонтальной проекции точки определяет расстояние от самой точки до фронтальной плоскости проекций.

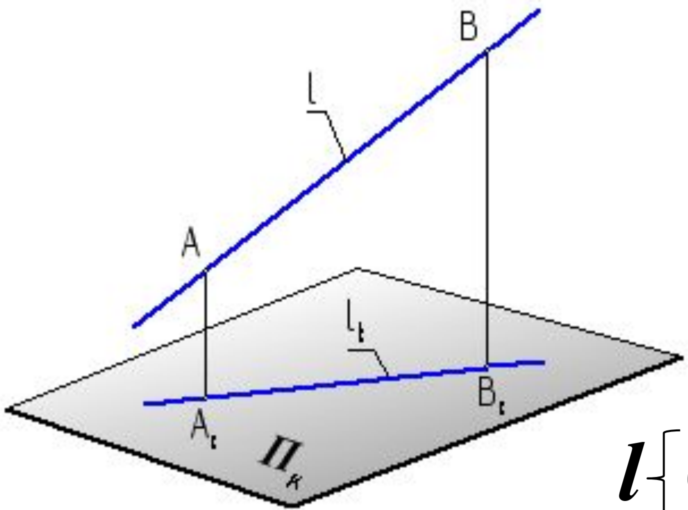
$$(x_{12}, A_1) = (A, \Pi_2) \text{ - } \underline{\textit{глубина}}$$

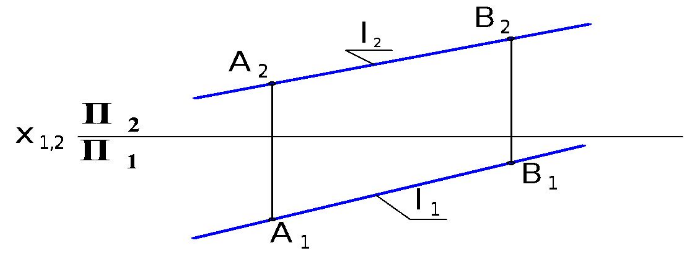
Расстояние от оси x_{12} до фронтальной проекции точки определяет расстояние от самой точки до горизонтальной плоскости проекций.

$$(x_{12}, A_2) = (A, \Pi_1) \text{ - } \underline{\textit{высота}}$$

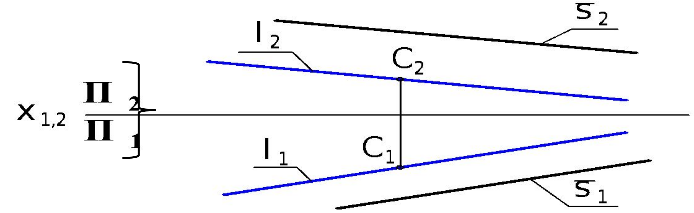
Проецирование прямой линии

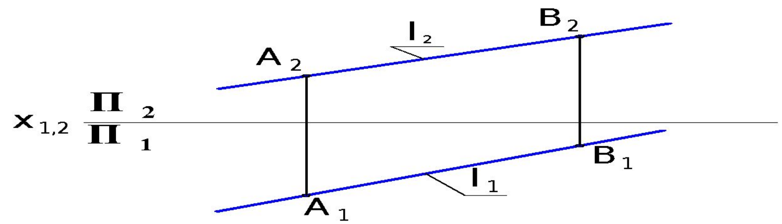
Способы задания прямой на эпюре

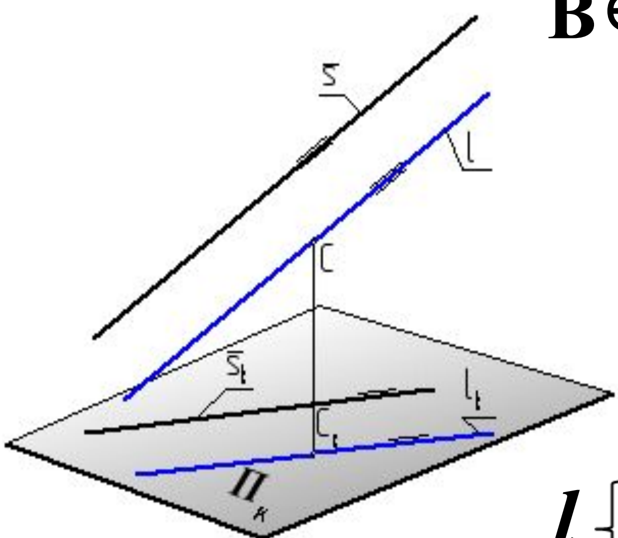


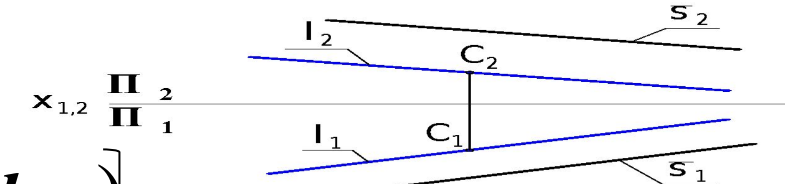


$$l\left\{(\mathbf{A},\mathbf{B})(\mathbf{A}\in l;\ \mathbf{B}\in l)\right.$$







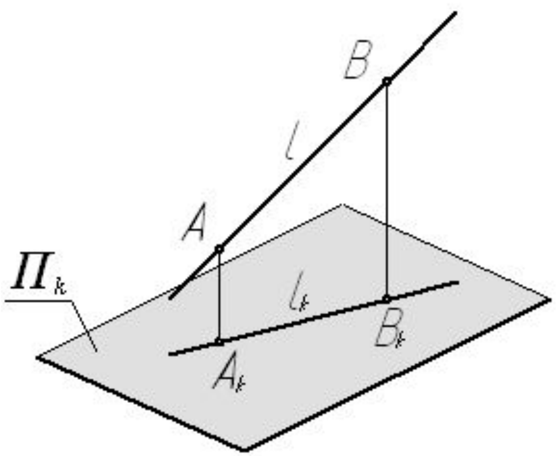


$$l\left\{(\mathbf{C},s)(\mathbf{C}\in l;\ l \parallel s)\right\}$$

Положение прямой относительно плоскости проекций

Прямая
общего положения

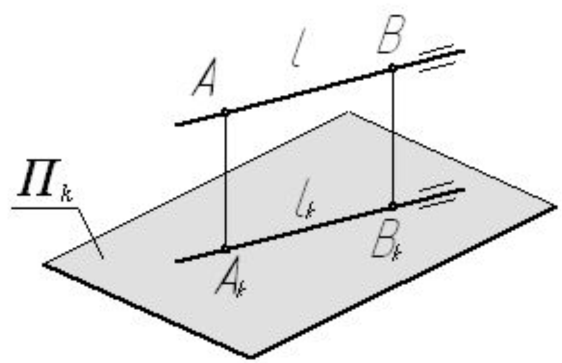
$l \nparallel \Pi_k$ и $l \not\perp \Pi_k$



Прямые частного положения

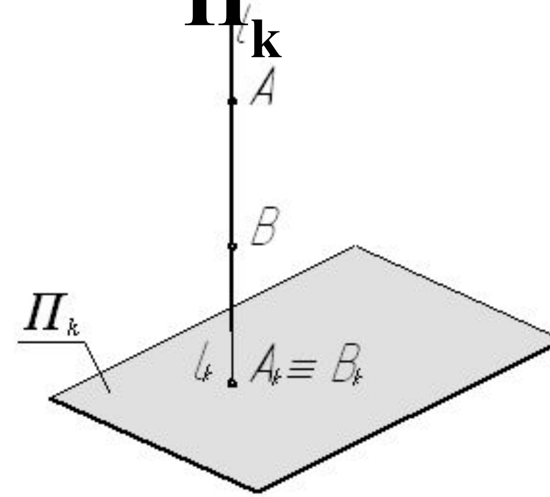
Прямая уровня

$l \parallel \Pi_k$



Проецирующая
прямая

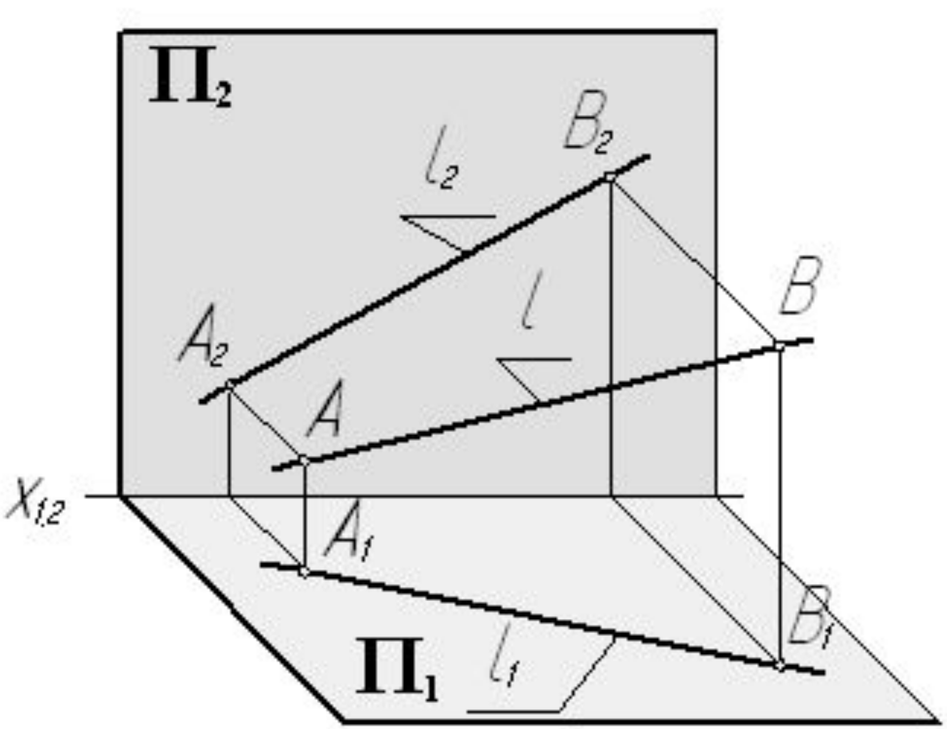
$l \perp \Pi_k$

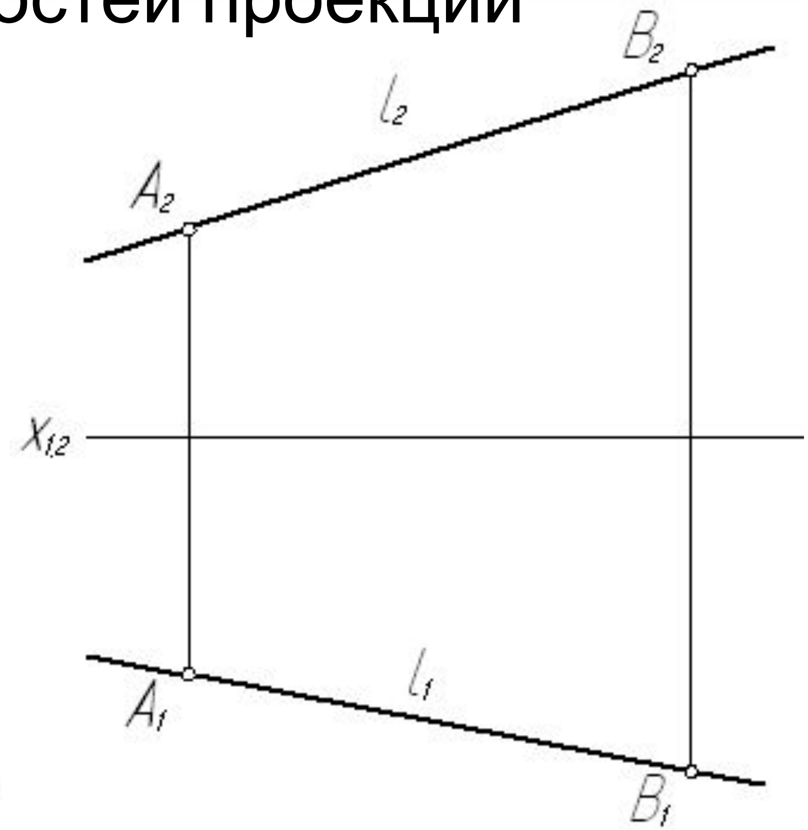


- ПРЯМЫЕ
  - ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ
  - ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ
    - УРОВНЯ
    - ПРОЕЦИРУЮЩИЕ

Прямая общего положения

Это прямая не параллельная и не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций





$l \nparallel \Pi_1$ и $l \nparallel \Pi_2$

$l \not\perp \Pi_1$ и $l \not\perp \Pi_2$

$l_1 \nparallel x_{1,2}$ и $l_2 \nparallel x_{1,2}$

$l_1 \not\perp x_{1,2}$ и $l_2 \not\perp$ x

Характерная особенность эпюра прямой общего положения – **горизонтальная и фронтальная проекции прямой не параллельны и не перпендикулярны координатной оси** x_{12}

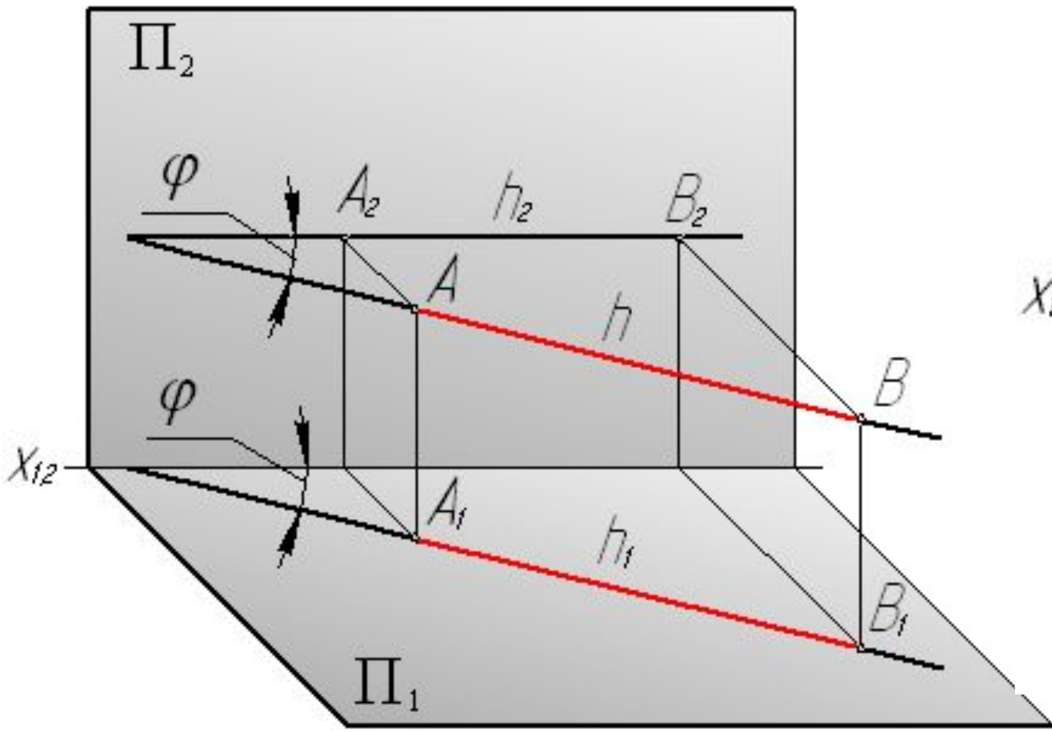
Прямая уровня

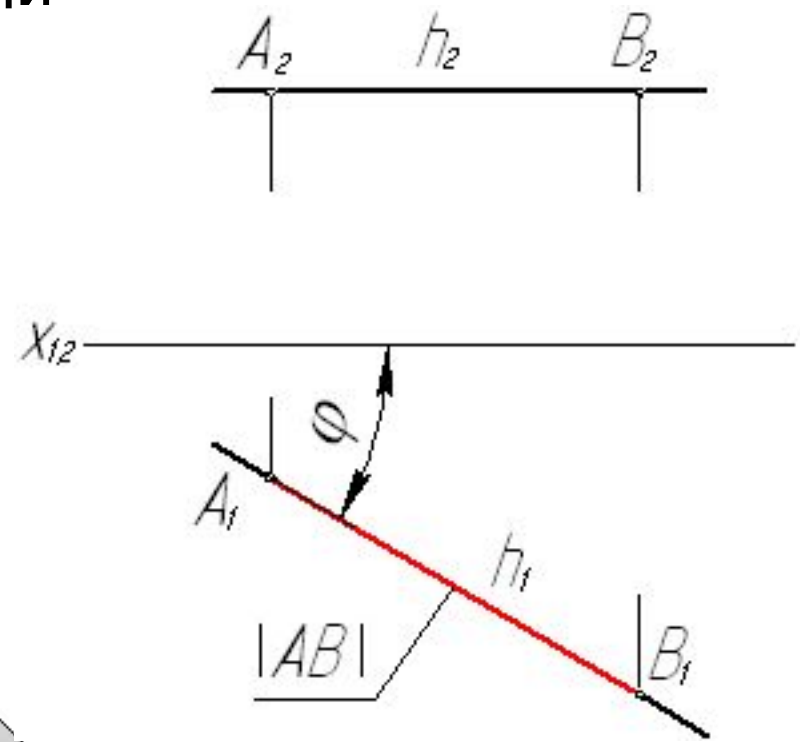
Это прямая параллельная какой-либо одной плоскости проекций

$$l \parallel \Pi_к$$

Горизонталь – *h*

Это прямая параллельная горизонтальной плоскости проекций





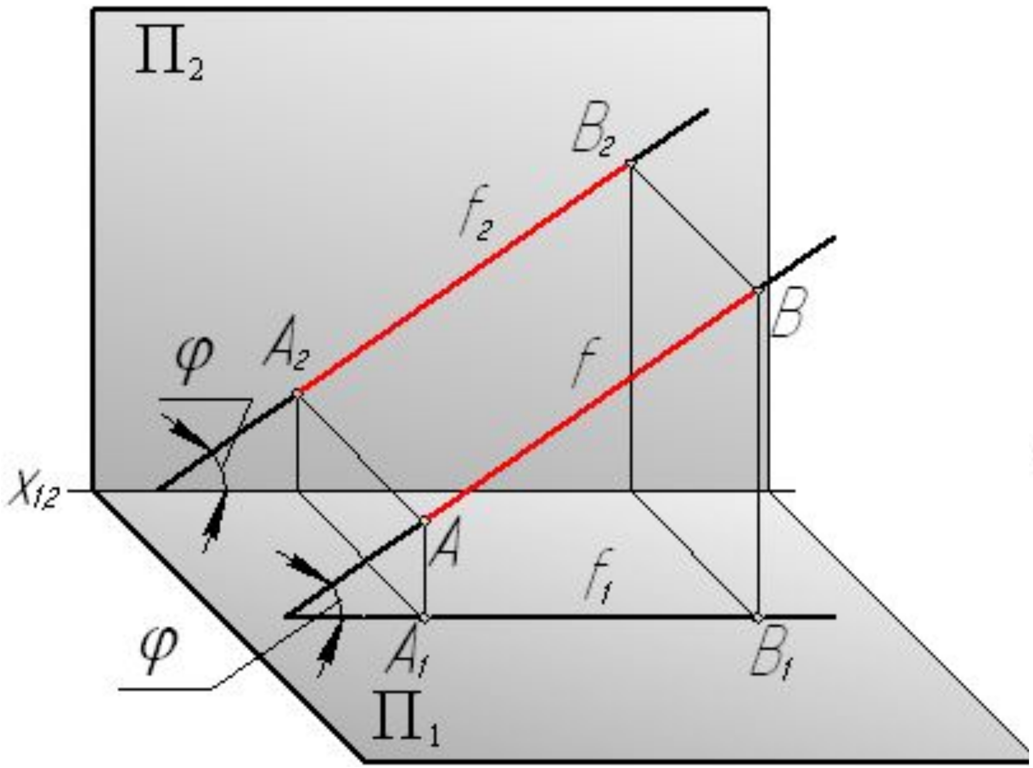
$h \parallel \Pi_1 \Rightarrow h_2 \parallel x_{1,2}$

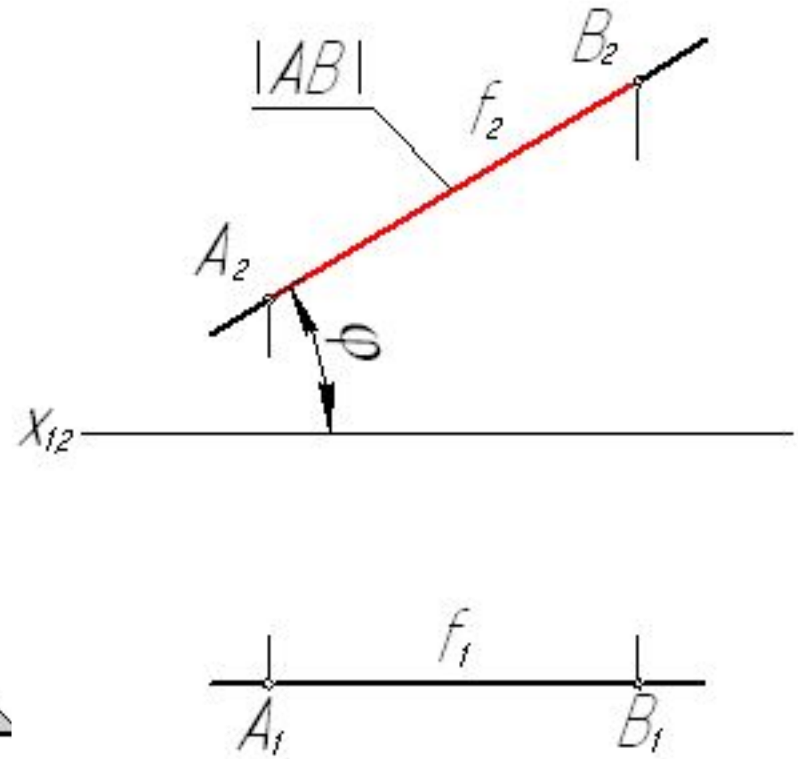
$AB \subset h \Rightarrow AB \parallel \Pi_1 \Rightarrow A_1B_1 \cong |AB|$

$\angle\phi = h_1(A_1B_1)\wedge$

Фронталь – *f*

Это прямая параллельная фронтальной плоскости проекций





$$f \parallel \Pi_2 \qquad \Rightarrow \qquad f_1 \parallel x_{1,2}$$

$$AB \subset f \Rightarrow AB \parallel \Pi_2 \Rightarrow \quad A_2B_2 \cong |AB|$$

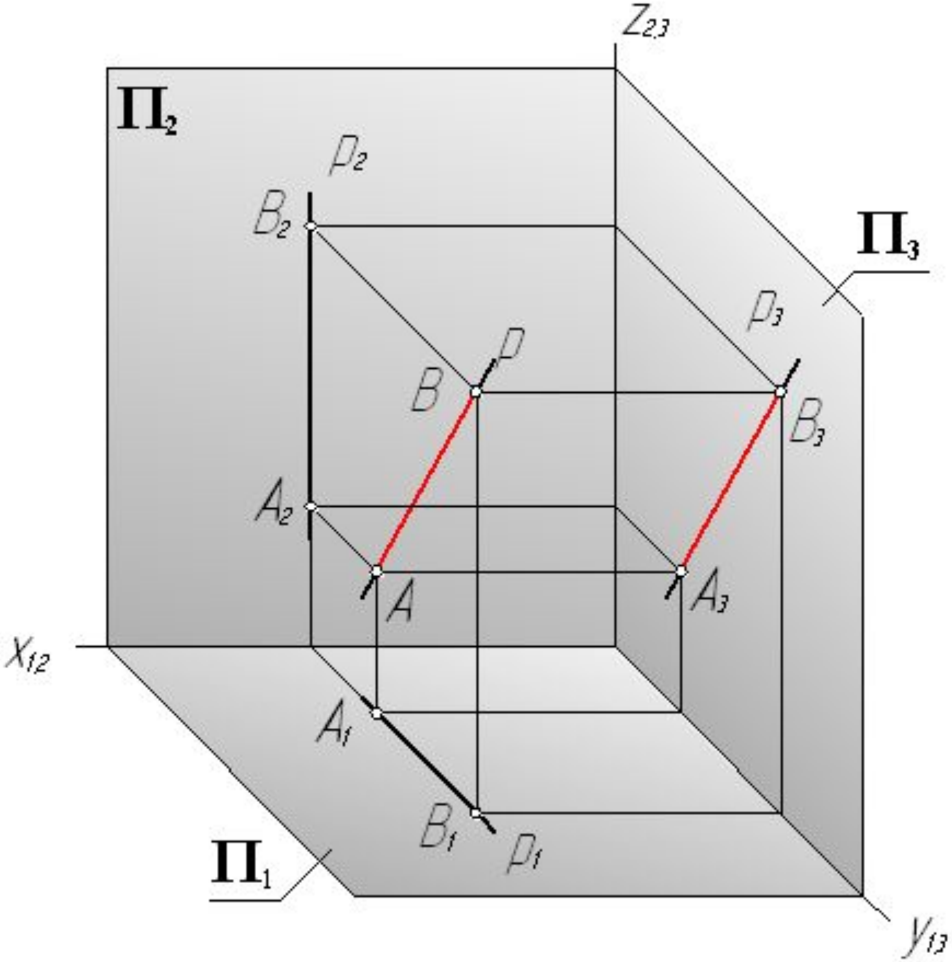
$$\angle\phi = f(AB)\wedge\Pi_1 \qquad \angle\phi = f_2(A_2B_2) \wedge x_{1,2}$$

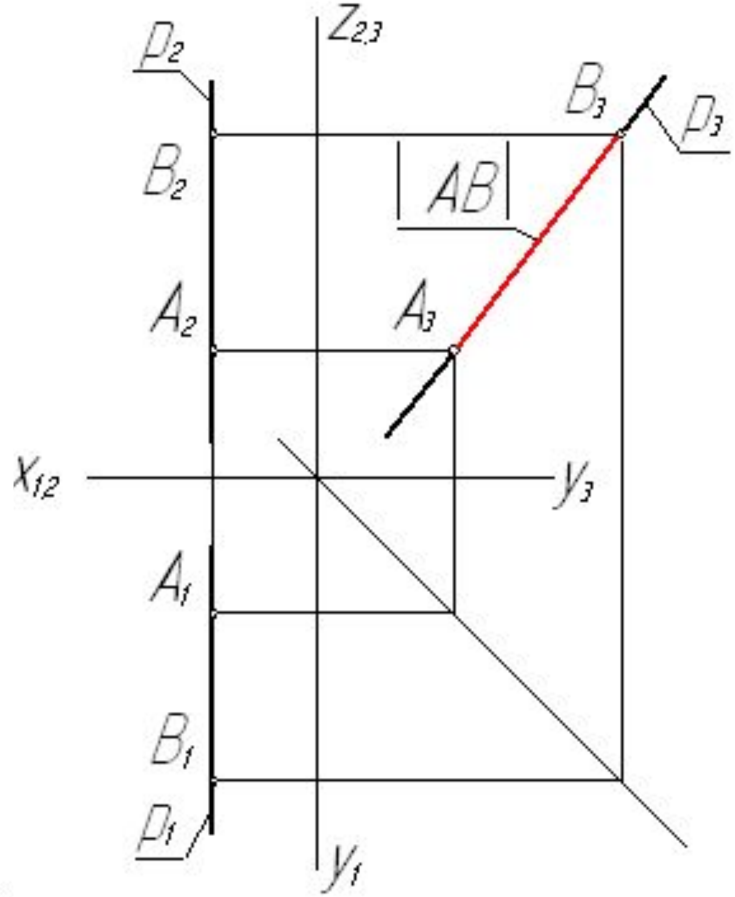
Характерная особенность эпюра горизонтали и фронтали –

одна из проекций параллельна координатной оси $x_{1,2}$

Профильная прямая - *p*

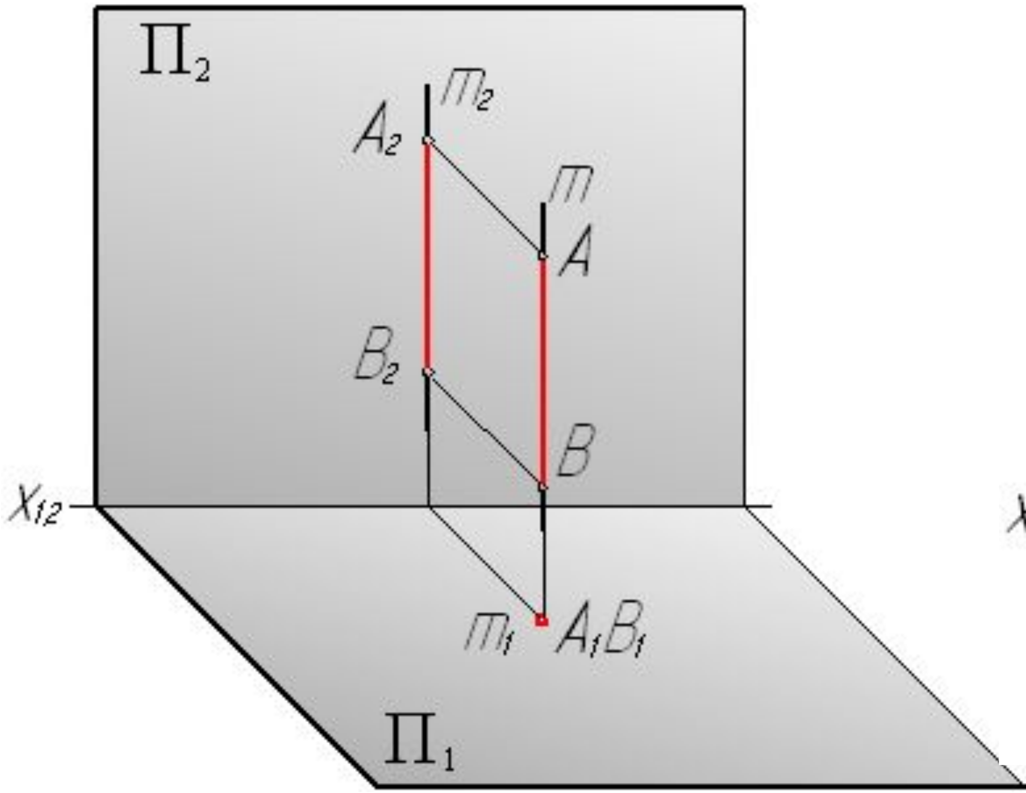
Это прямая параллельная профильной плоскости проекций Π_3

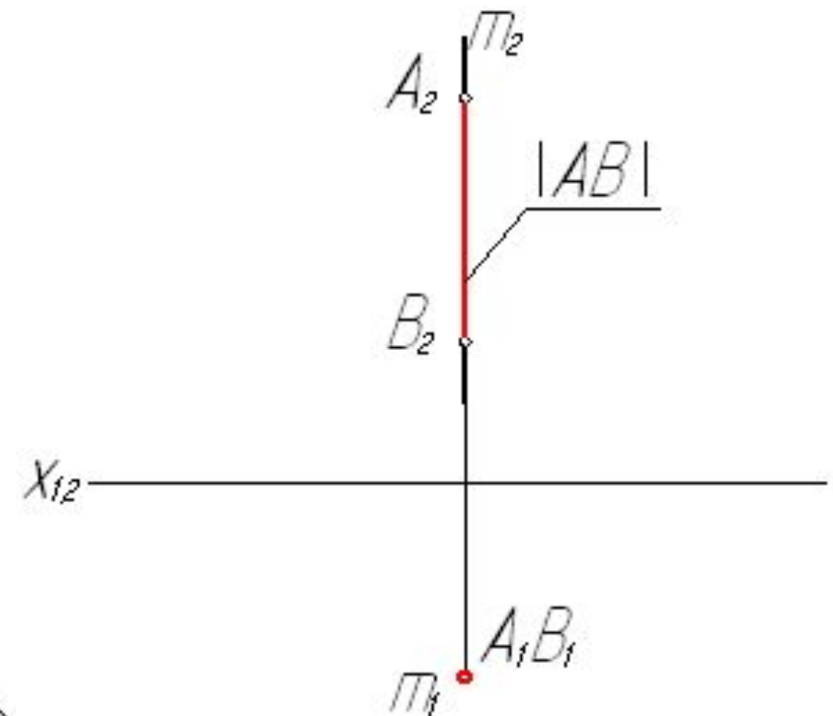




Горизонтально-проецирующая прямая

Это прямая перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций





$\boldsymbol{m \perp \Pi_1 \wedge m \parallel \Pi_2}$

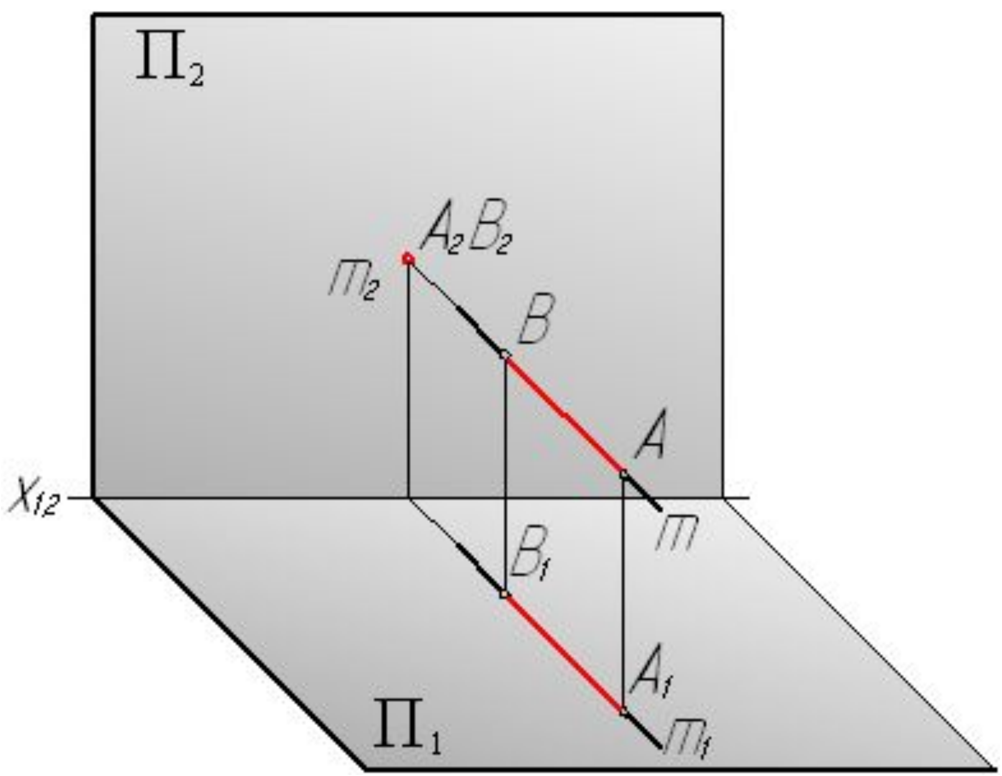
$\boldsymbol{AB \subset m \Rightarrow AB \parallel \Pi_2}$

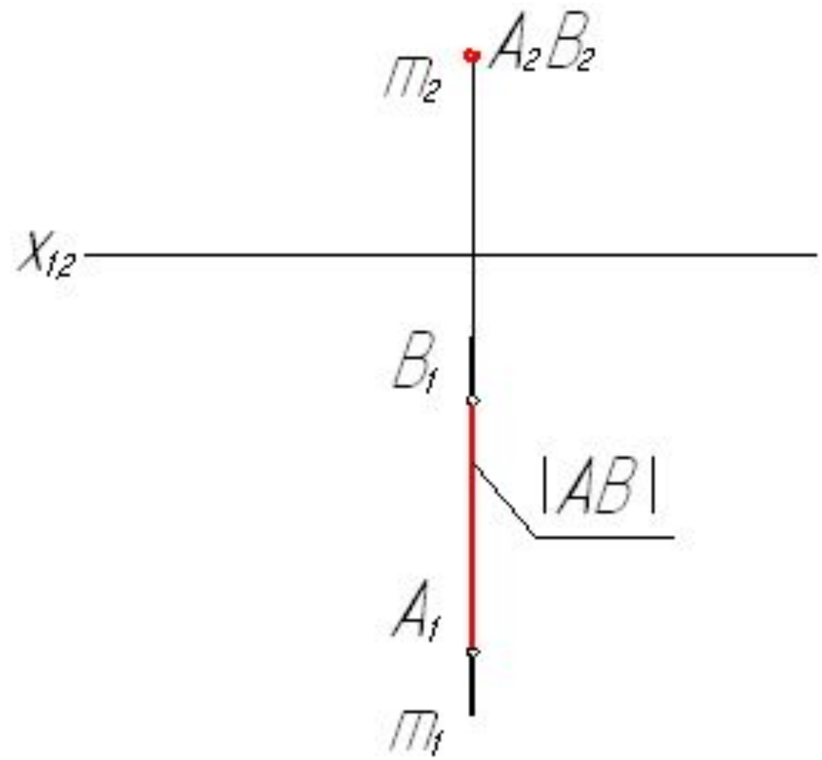
$\Rightarrow m_1$ – точка $\wedge$ $m_2 \perp x_{1,2}$

$\Rightarrow A_1B_1$ - точка $\wedge$ $A_2B_2 \cong |AB|$

Фронтально-проецирующая прямая

Это прямая перпендикулярная фронтальной плоскости проекций





$m \perp \Pi_2 \wedge m \parallel \Pi_1$

$AB \subset m \Rightarrow AB \parallel \Pi_1$

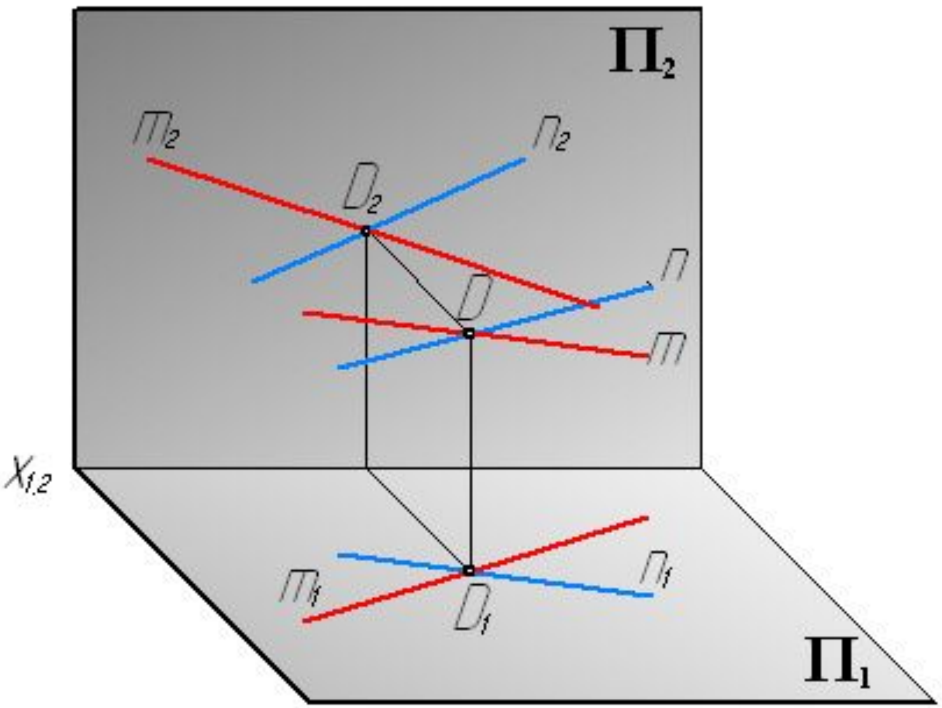
$\Rightarrow m_2$ – точка $\wedge$ $m_1 \perp x_{1,2}$

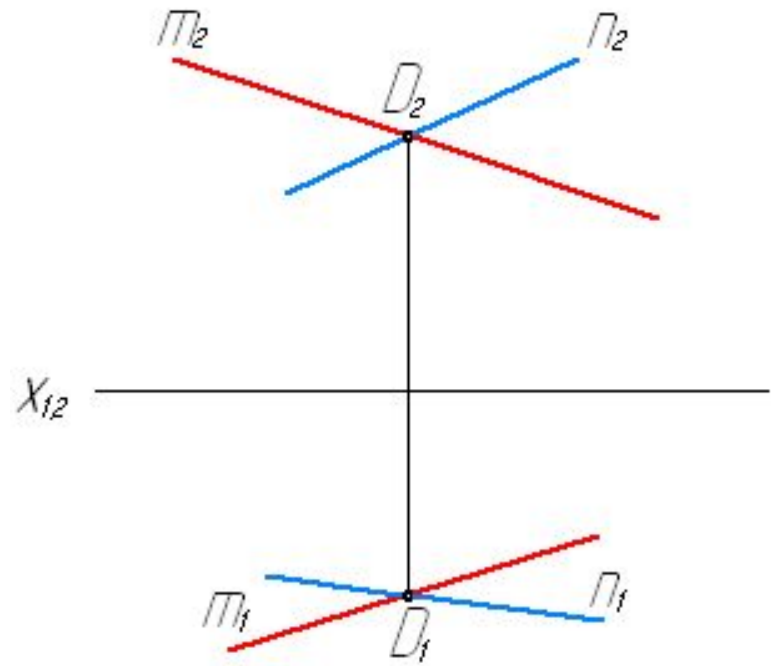
$\Rightarrow A_2B_2$ - точка $\wedge$ $A_1B_1 \cong |AB|$

Характерная особенность эпюра проецирующей прямой – **одна из проекций прямой точка**

Взаимное положение двух прямых

Пересекающиеся прямые





$m \cap n = D \Rightarrow$

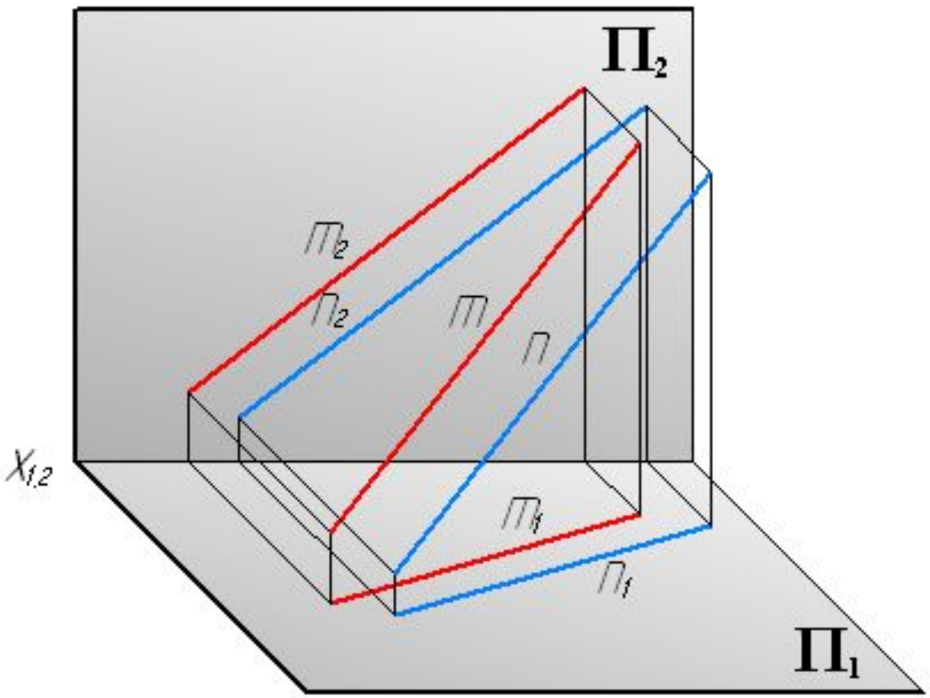
$\Rightarrow m_k \cap n_k = D_k$

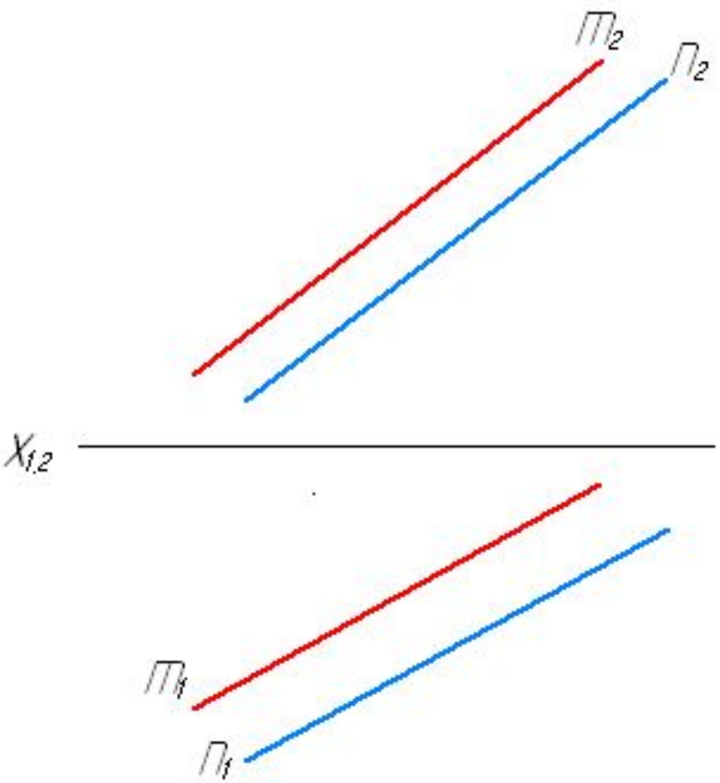
$m_1 \cap n_1 = D_1$

$m_2 \cap n_2 = D_2$

$D_1D_2 \perp x_{1,2}$

Параллельные прямые





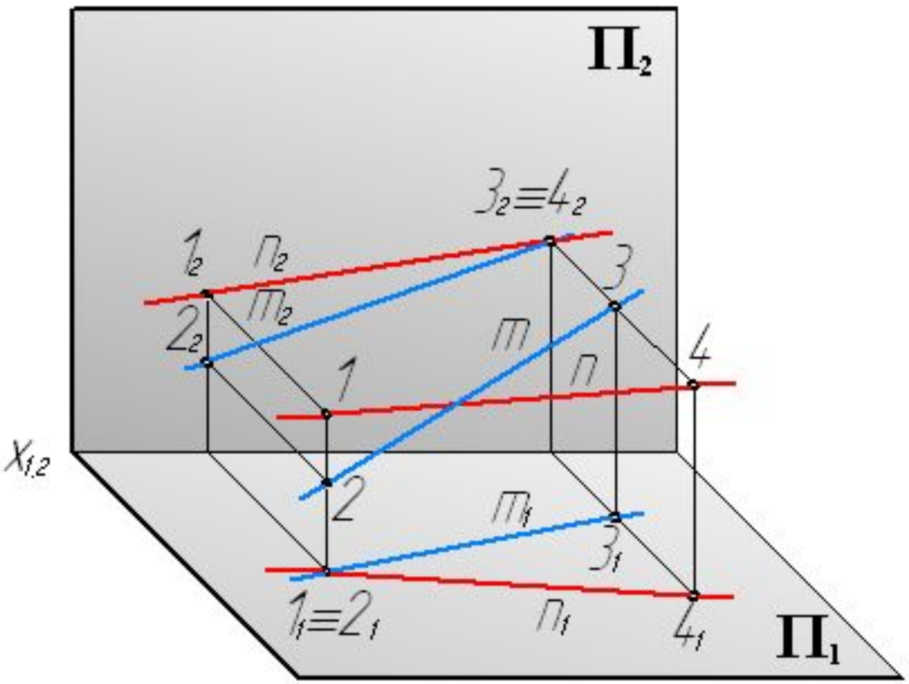
$m \parallel n \Rightarrow$

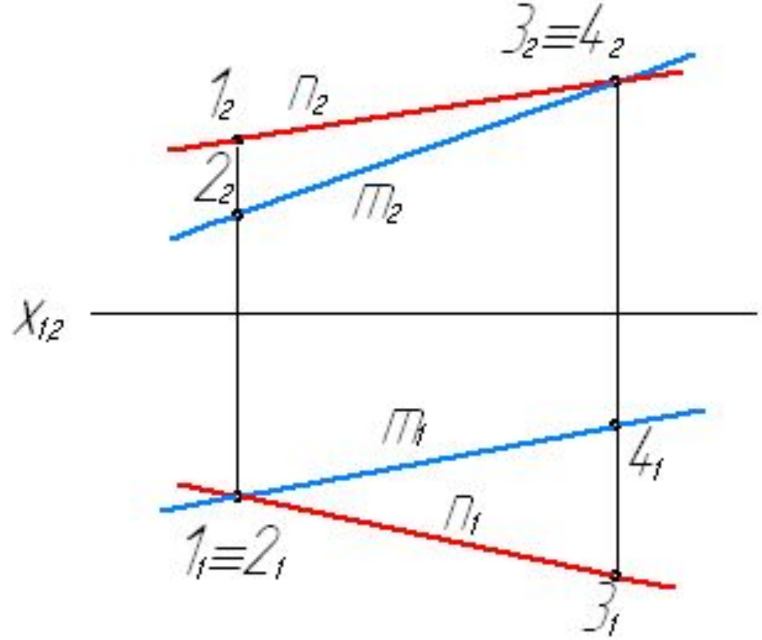
$\Rightarrow m_k \parallel n_k$

$m_1 \parallel n_1$

$m_2 \parallel n_2$

Скрещивающиеся прямые





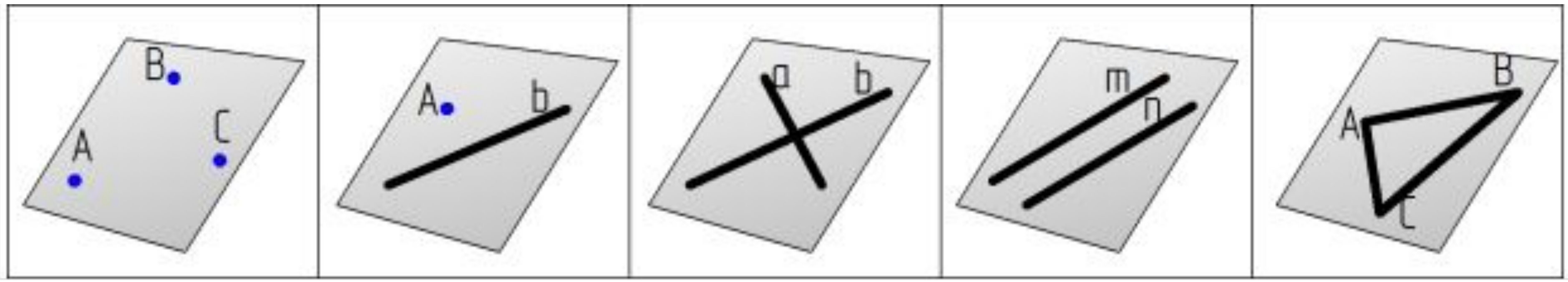
$$m \dot{-} n \Rightarrow m \not\parallel n \wedge m \cancel{\cap} n$$

Пары точек (1,2) и (3,4) – конкурирующие точки

Плоскость

Плоскость - это один из видов поверхности (плоская поверхность).

Способы задания плоскости



Три точки
α(A,B,C)

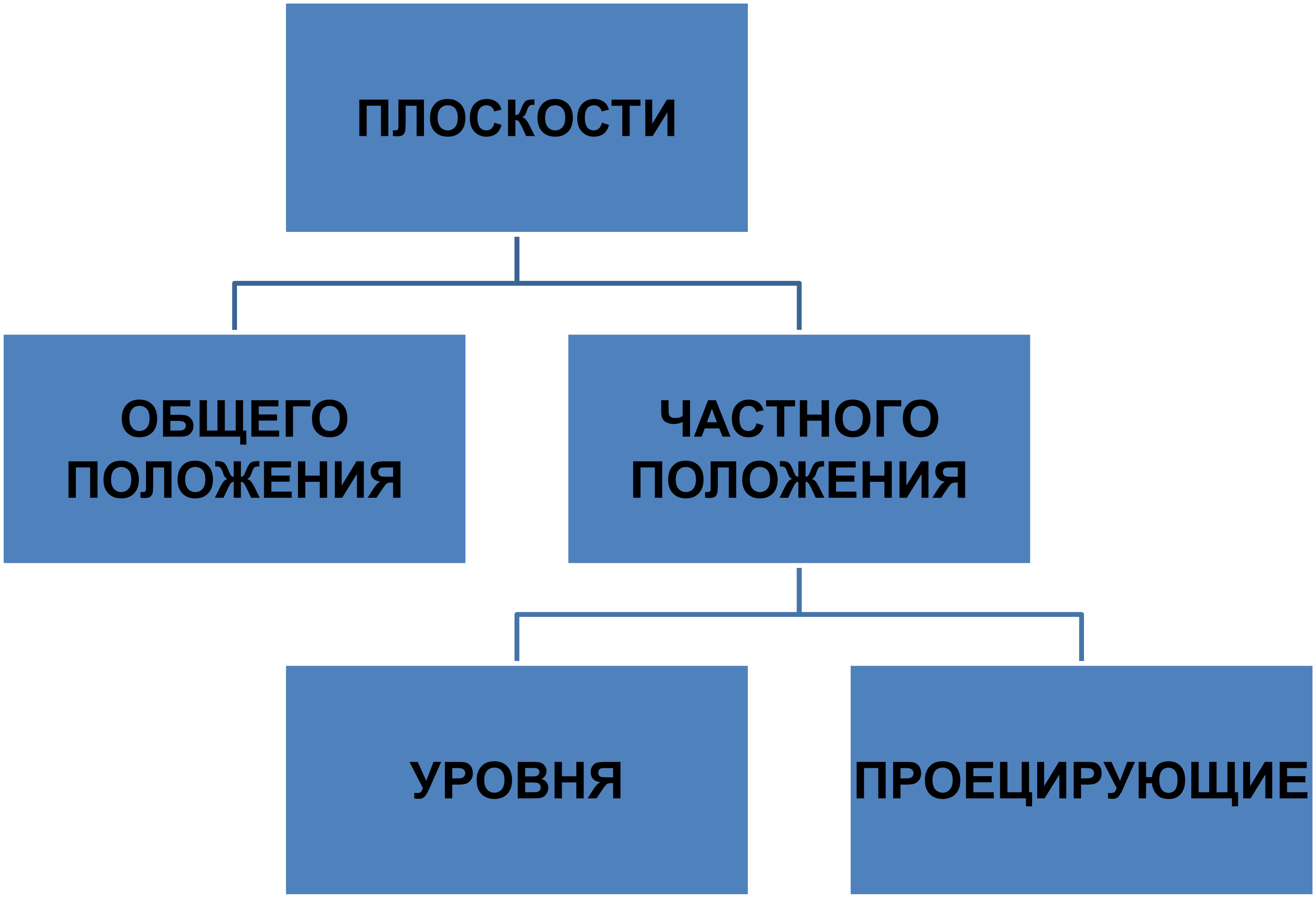
Точка и прямая
β(A,b)

Две пересекающиеся прямые
$\gamma(a \cap b)$

Две параллельные прямые
$\delta(m \parallel n)$

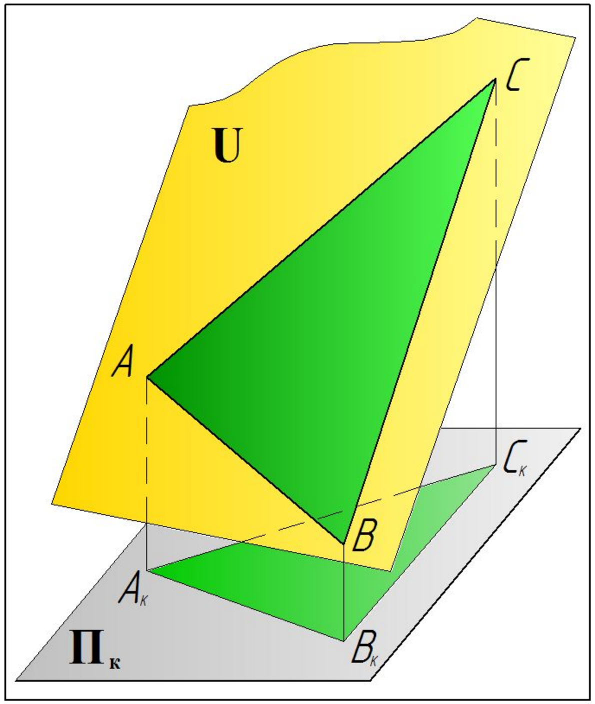
Плоская фигура
$\varepsilon(\triangle ABC)$

Положение плоскости относительно плоскостей проекций



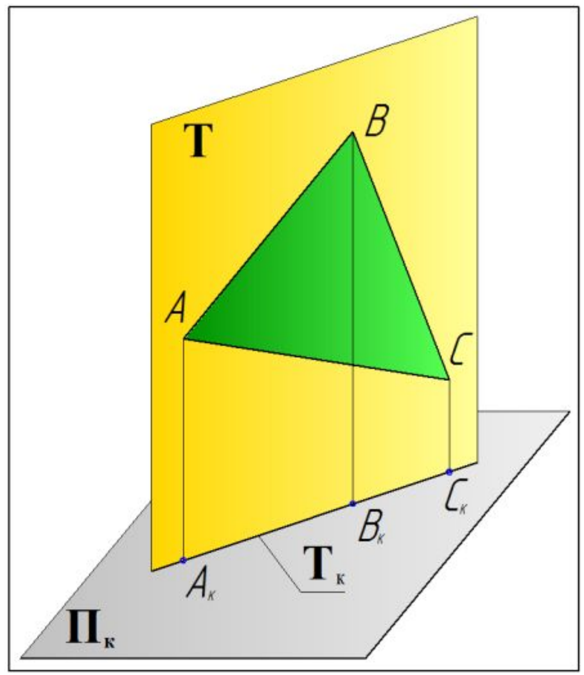
Общее положение

Частное положение



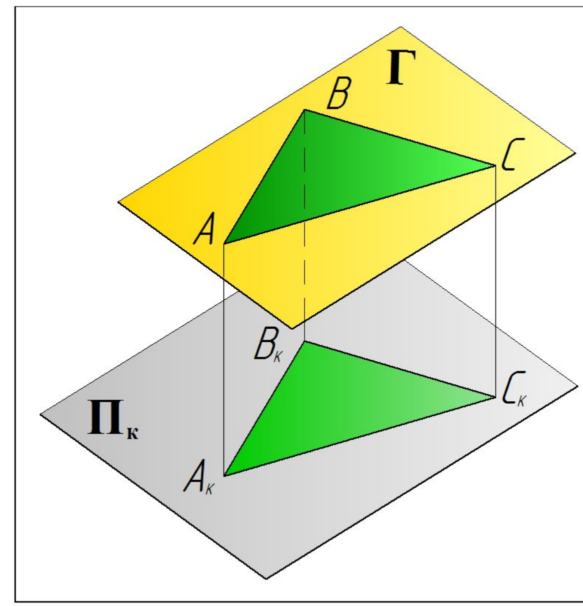
$\alpha \nparallel П_к \wedge \alpha \not\perp П_к$

Проецирующая плоскость



$\beta \perp П_к$

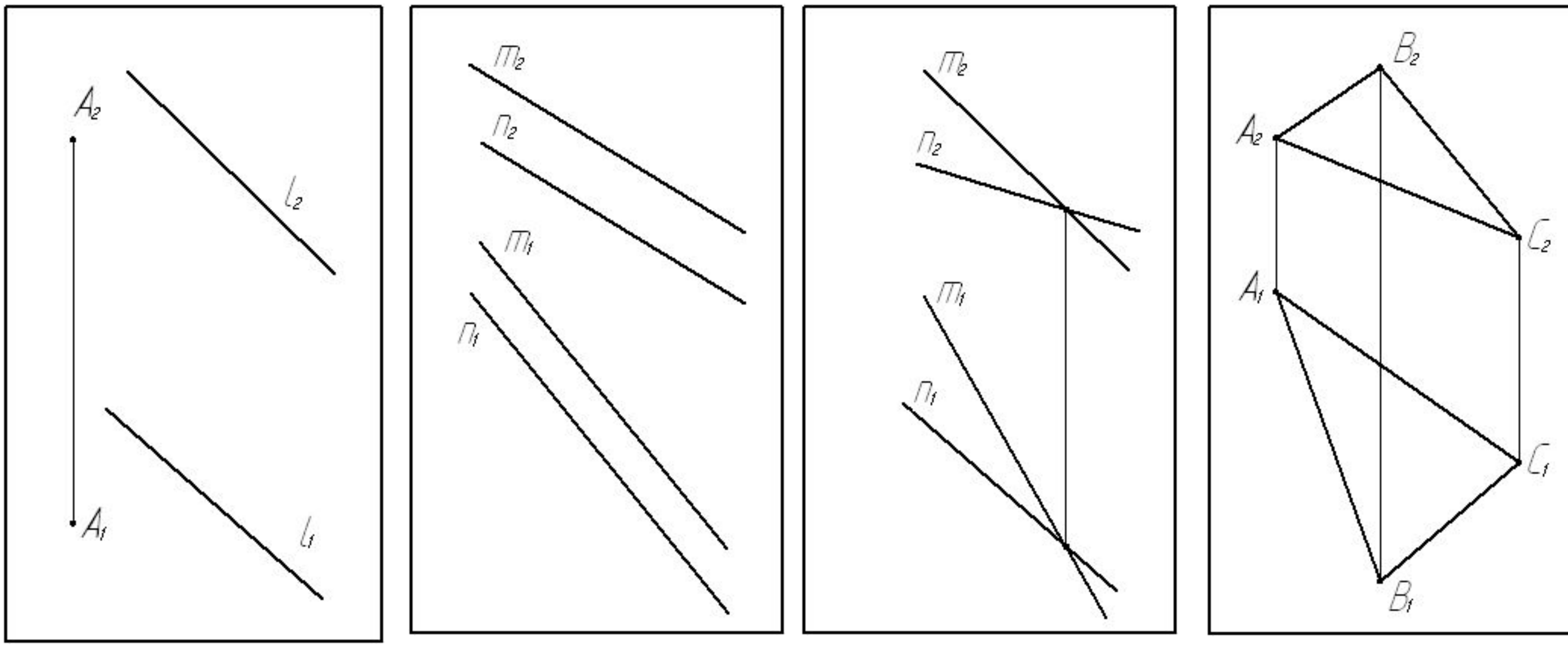
Плоскость уровня



$\gamma \parallel П_к$

Плоскость общего положения

Плоскость непараллельная и неперпендикулярная плоскостям проекций



Вывод: Ни одна из проекций плоскости не имеет форму прямой линии

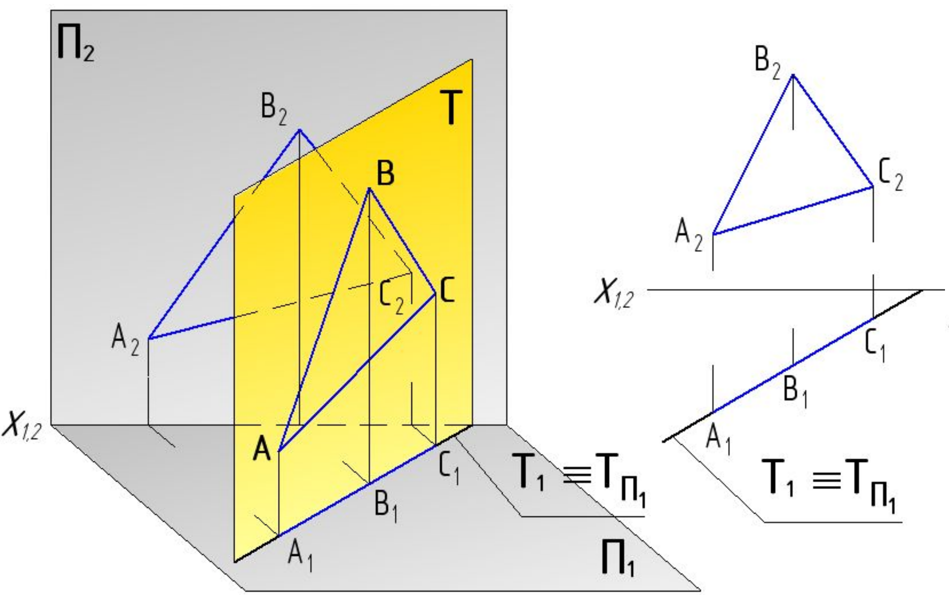
Плоскости частного положения

Проецирующие плоскости

Это плоскости перпендикулярные одной из плоскостей проекций

Горизонтально-проецирующая

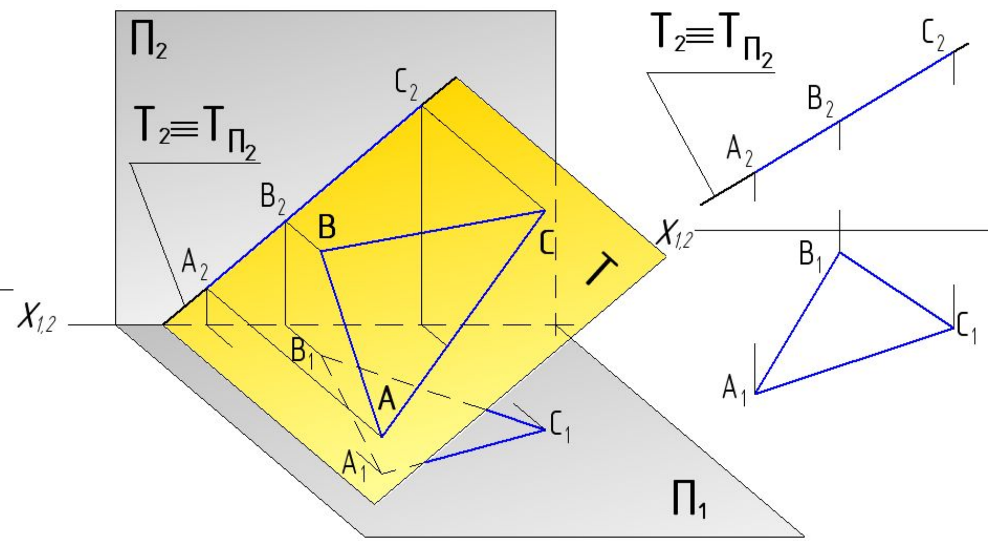
$T \perp$



T_1 – прямая и $T_1 \equiv T_{П^1}$

Фронтально-проецирующая

$T \perp$



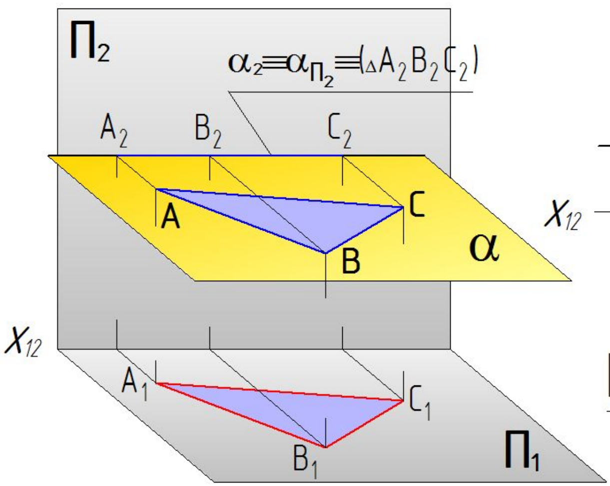
T_2 – прямая и $T_2 \equiv T_{П^2}$

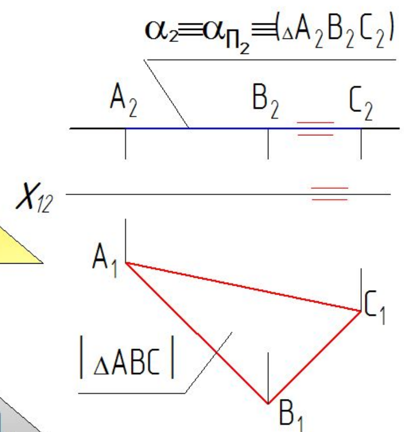
Плоскости уровня

Это плоскости параллельные одной из плоскостей проекций

Горизонтальная плоскость

$\alpha \parallel П_1$



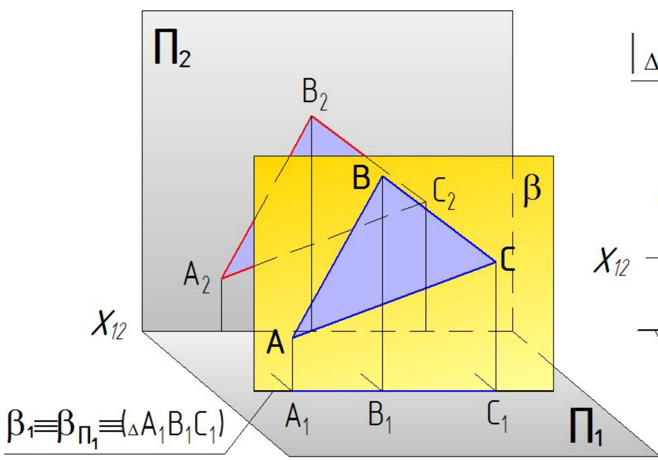


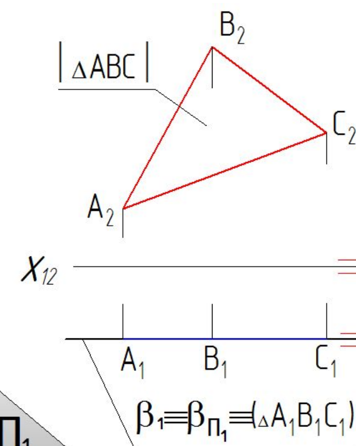
α_2 – прямая и $\alpha_2 \equiv \alpha_{П^2}$ и $\alpha_2 \parallel x_{1,2}$

$\Delta ABC \subset \alpha \Rightarrow \Delta ABC \parallel П_1 \Rightarrow A_1B_1C_1 \cong ABC$

Фронтальная плоскость

$\beta \parallel П_2$





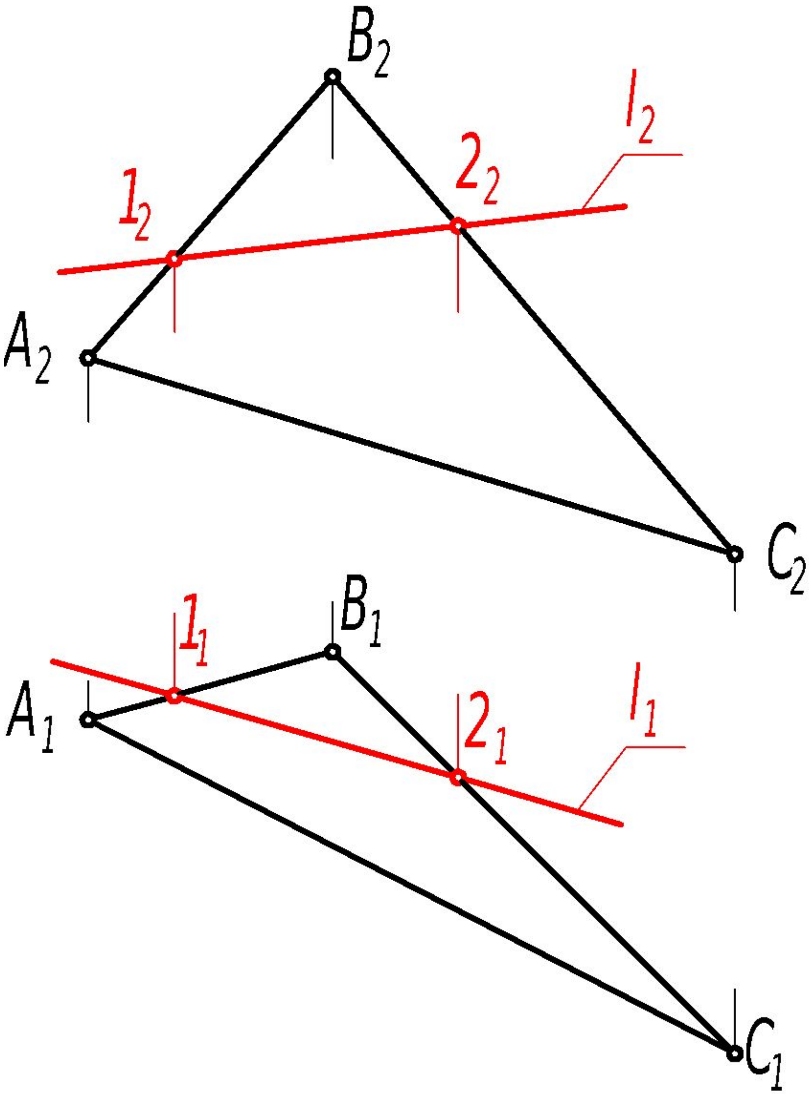
β_1 – прямая и $\beta_1 \equiv \beta_{П^1}$ и $\beta_1 \parallel x_{1,2}$

$\Delta ABC \subset \beta \Rightarrow \Delta ABC \parallel П_2 \Rightarrow A_2B_2C_2 \cong ABC$

Вывод:

У плоскости частного положения одна из проекций обязательно имеет форму прямой линии.

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В ПЛОСКОСТИ



Прямая принадлежит плоскости, если две точки прямой принадлежат этой плоскости.

$\boldsymbol{l}\,(1{,}2);\ (1 \in \boldsymbol{T})\ \wedge\ (2 \in \boldsymbol{T}) \Leftrightarrow \boldsymbol{l} \subset \boldsymbol{T}$

<u>Дано</u>: плоскость $\boldsymbol{\alpha}(\Delta ABC)$.

<u>Построить</u>: $\boldsymbol{l} \subset \boldsymbol{\alpha}$.

Первый вариант

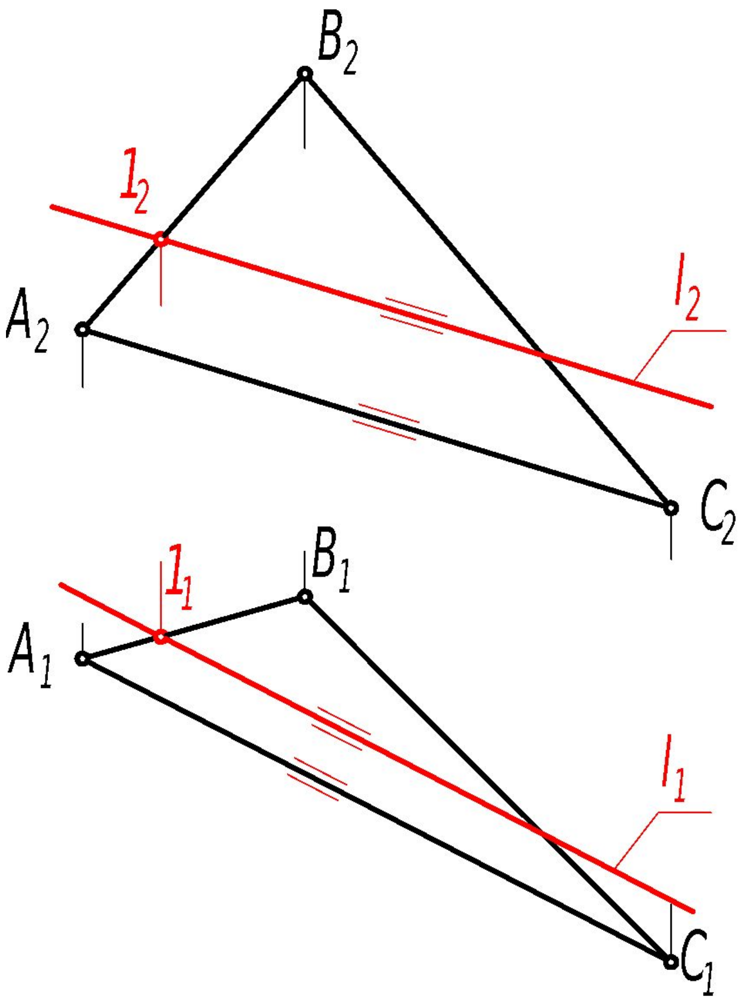
Задаем:

точка 1 принадлежит стороне AB,

точка 2 принадлежит стороне BC.

$(1 \in AB) \wedge (2 \in BC)$

Строим $\boldsymbol{l}\,(1{,}2)$



Второй вариант

Задаем: точка 1 принадлежит стороне AB, а точка 2 принадлежит стороне AC, но является ее несобственной точкой.

$(1 \in AB)$; $(2 \in AC;\ 2 \equiv 2^{\infty})$

Следовательно, прямая $\boldsymbol{l}$ параллельна стороне AC. $(\boldsymbol{l} \parallel AC)$

Данный вариант построения прямой следует рассматривать как задание прямой одной точкой и направлением

$$\boldsymbol{l}\,(1,s) \Rightarrow 1 \in \boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{l} \parallel s$$

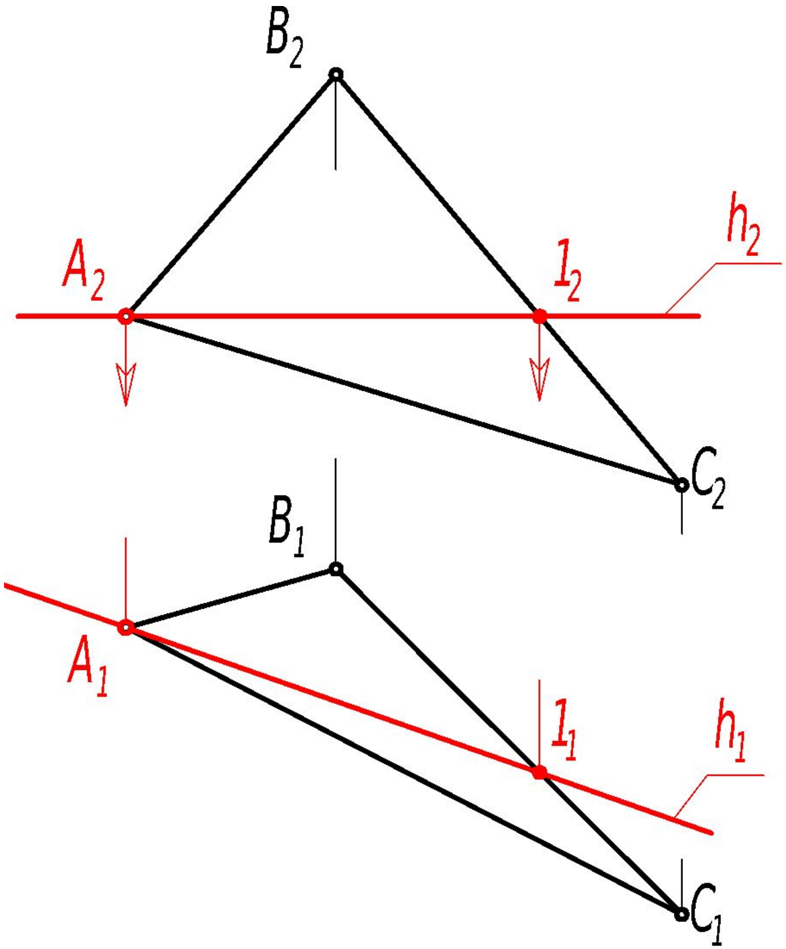
В качестве направления может быть выбрана любая прямая, принадлежащая плоскости.

В нашем примере $s \equiv AC$, т.е. $\boldsymbol{l} \parallel AC$

Прямые уровня плоскости

Горизонталь плоскости

Это прямая, принадлежащая плоскости, и параллельная горизонтальной плоскости проекций



Дано: Плоскость α (ΔABC)

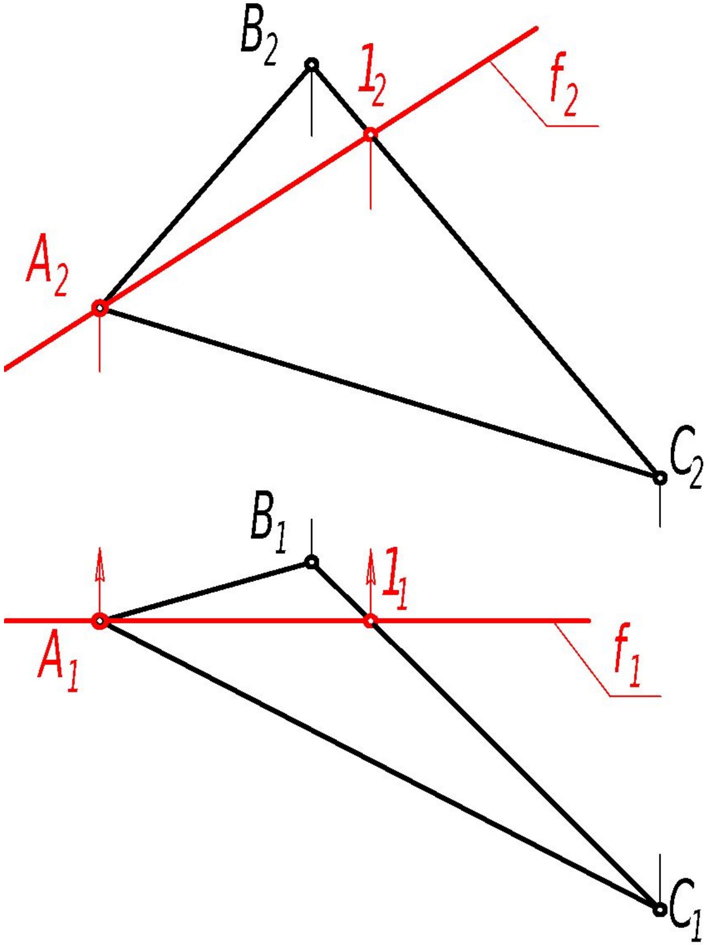
Построить: $h \subset \alpha$

Задаем $h\ (A,1);\ 1 \in BC$

$h \parallel \Pi_1 \Rightarrow h_2 \parallel x_{1,2}$

Фронталь плоскости

Это прямая, принадлежащая плоскости, и параллельная фронтальной плоскости проекций



<u>Дано</u>: Плоскость α (ΔABC)

<u>Построить</u>: $f \subset \alpha$

Задаем $f\,(A,1)$; $1 \in BC$

$f \parallel \Pi_2 \Rightarrow f_1 \parallel x_{1,2}$

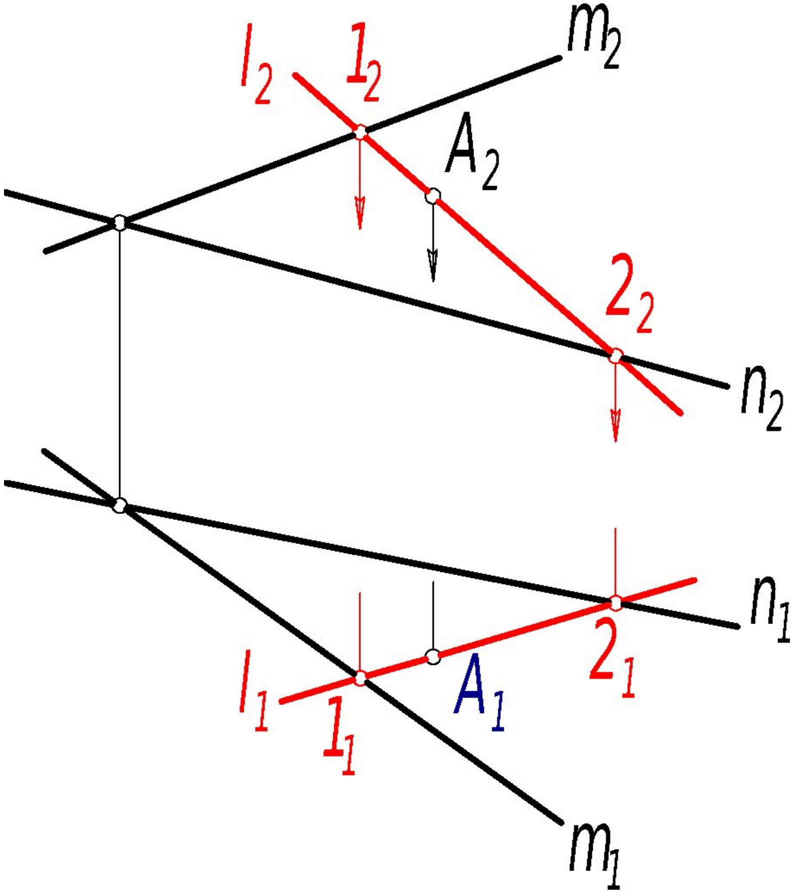
ТОЧКА В ПЛОСКОСТИ

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, принадлежащей этой плоскости

$$\mathbf{A} \in \alpha \Leftrightarrow \mathbf{A} \in l, l \subset \alpha$$

Дано: плоскость $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})$; точка $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A_2}) \in \boldsymbol{\alpha}$.
Построить $\boldsymbol{A_1}$.

$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{l}$; $\boldsymbol{l}$ (1,2) $\subset \boldsymbol{\alpha}$; задаем (1 $\in \boldsymbol{m}$) ; (2 $\in \boldsymbol{n}$)



$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{l}$; $\boldsymbol{l}$ (1,s); задаем (1 $\in \boldsymbol{n}$) ; ($\boldsymbol{l} \parallel \boldsymbol{m}$)