НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

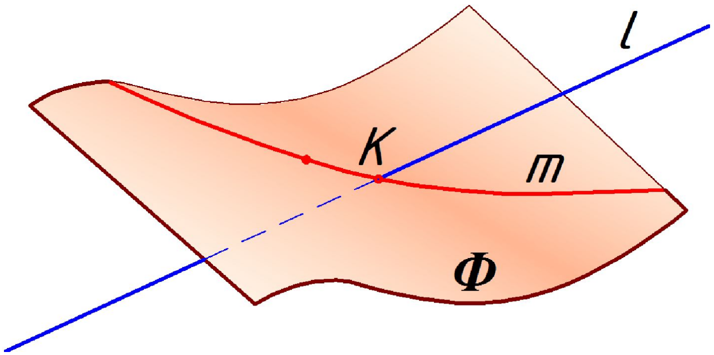
Лекция 3

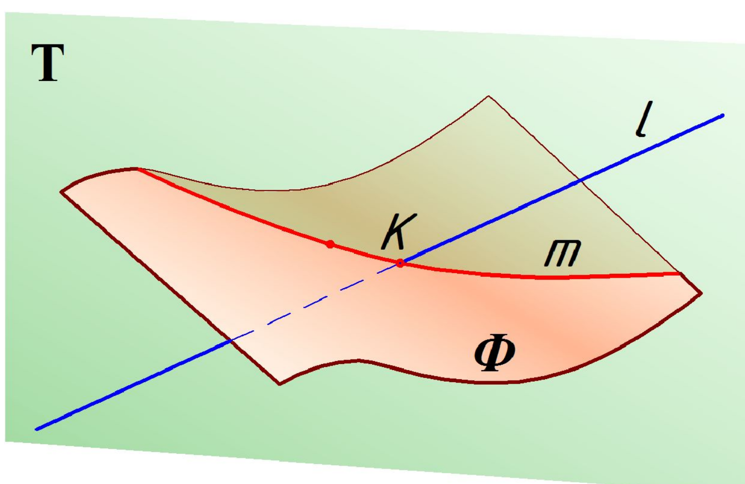
Направление обучения – «Архитектура»

Пересечение прямой линии с поверхностью

Прямая пересекает поверхность, если она пересекает какую-либо линию, принадлежащую этой поверхности

$$l \cap \Phi = \{K^1, K^2, \ldots\}, \quad \{K^1, K^2, \ldots\} = l \cap m \; ; \; m \subset \Phi$$





Линию ***m***, принадлежащую поверхности ***Ф***, следует рассматривать как линию пересечения самой поверхности ***Ф*** с какой-то плоскостью, например, ***T***, в которую заключена прямая ***l***.

Плоскость ***T*** может быть какой угодно плоскостью, но ее положение в пространстве следует выбирать так, чтобы проекции линии пересечения ***m*** по возможности имели наиболее простую геометрическую форму – прямой (ломаной) или окружности.

Общий (краткий) алгоритм построения точки пересечения прямой с поверхностью

1. **Прямую l заключаем в плоскость T** $\quad (l \cup T)$
с условием,
что $T \cap \Phi = m$ – **линия на проекциях по возможности наиболее простой геометрической формы.**

Если $T \perp \Pi_к$, то $\Rightarrow m_к \equiv T_к \equiv l_к$

2. **Строим проекции линии m.**
3. **Так как** $(l \subset T) \wedge (m \subset T)$, **то**

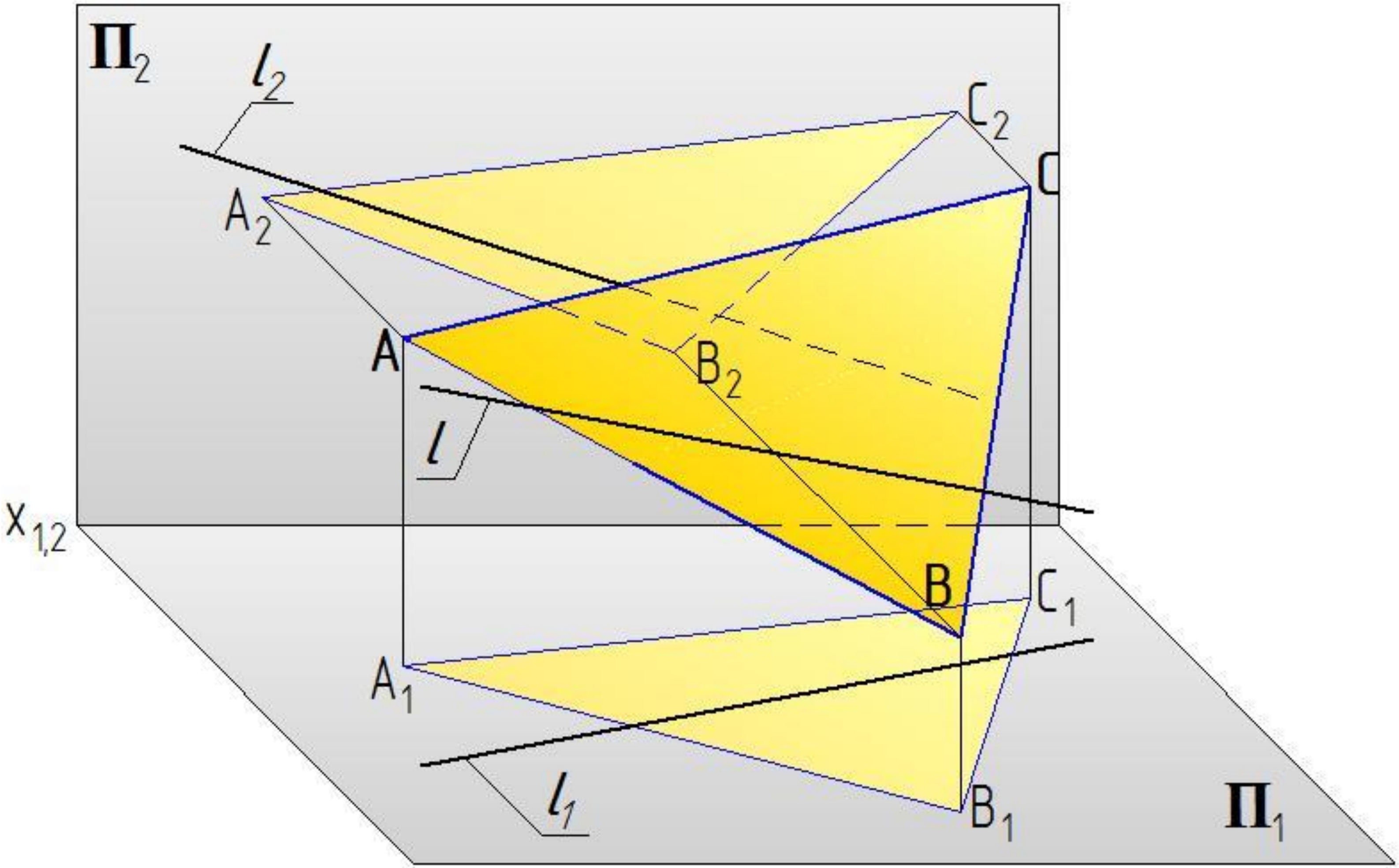
$$l \cap m = \{K^1, K^2, \ldots\}$$

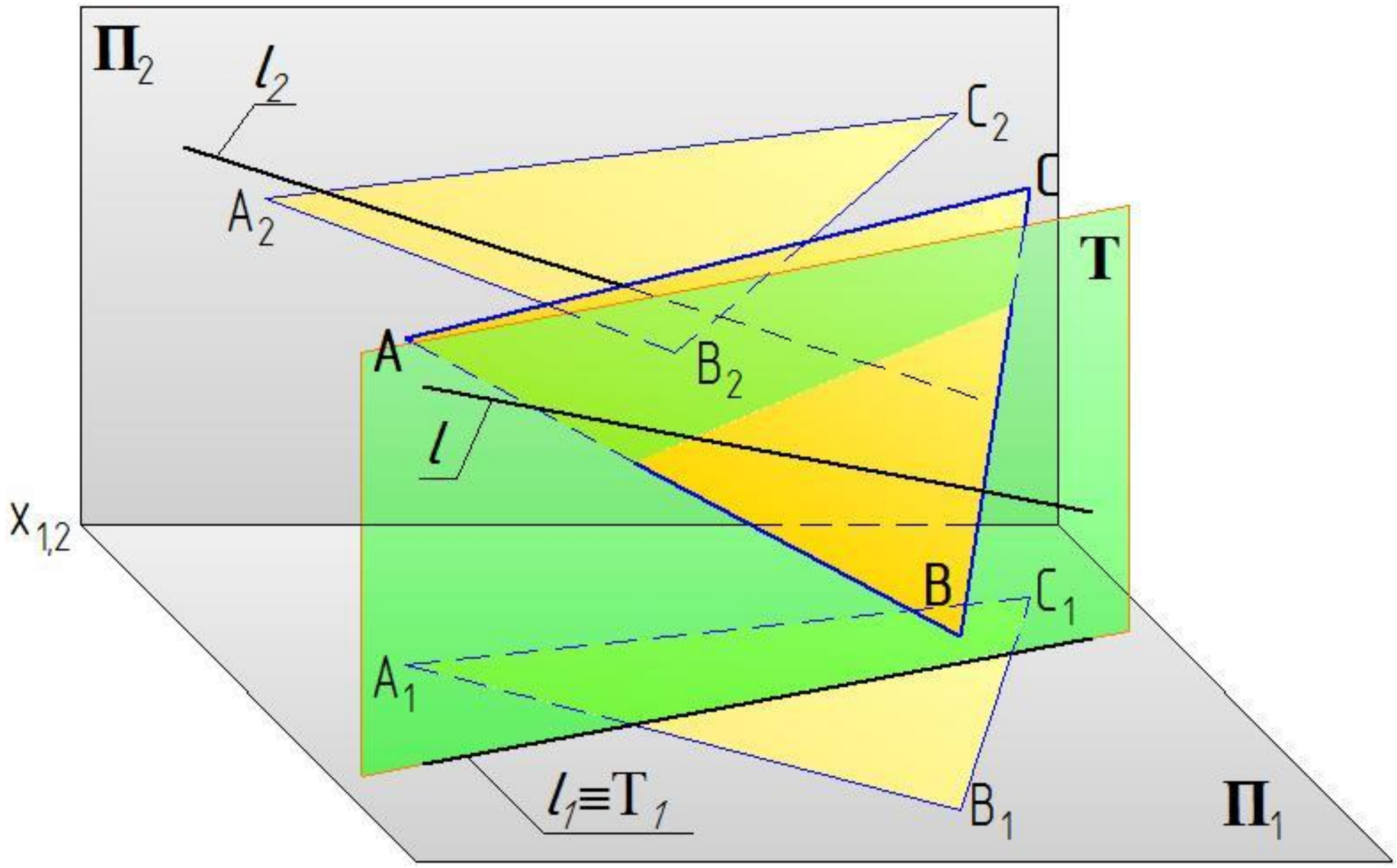
$$\Rightarrow \{K^1, K^2, \ldots\} \subset m;\ m \subset \Phi \Rightarrow \{K^1, K^2, \ldots\} \subset \Phi$$

$$\Rightarrow \{K^1, K^2, \ldots\} = l \cap \Phi$$

Пересечение прямой линии с плоскостью

Дано: прямая l и
плоскость $\alpha(\Delta ABC)$.
Определить: взаимное положение прямой l и плоскости α

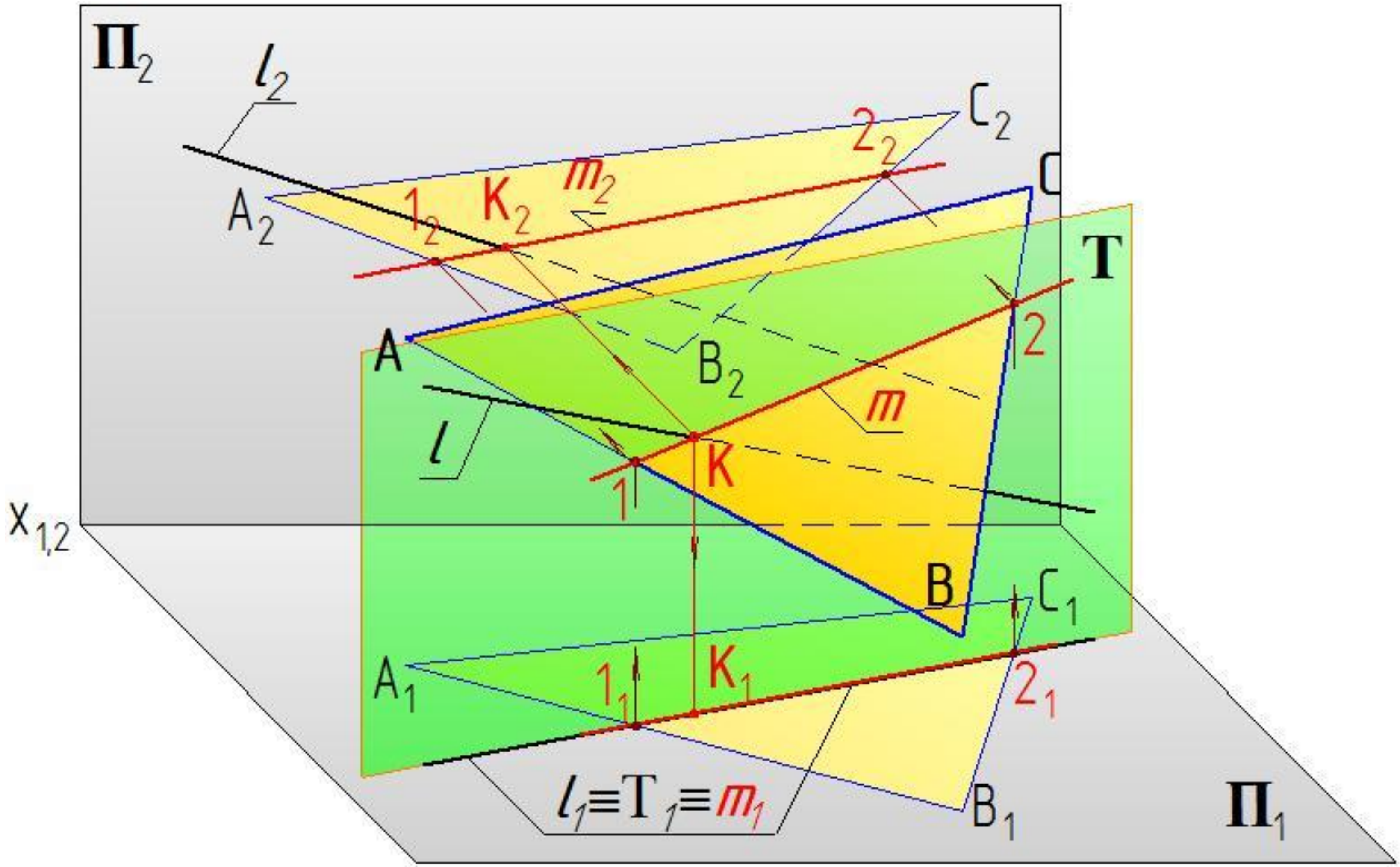




1. Прямую *l*, заключаем в какую-либо вспомогательную **проецирующую** плоскость.

$l \cup T;\ T \perp \Pi_к$. Тогда $T_к \equiv l_к$

На примере $T \perp \Pi_1 \Rightarrow T_1 \equiv l_1$



2. Строим линию пересечения заданной плоскости α и вспомогательной T.

$$m = \alpha \cap T$$

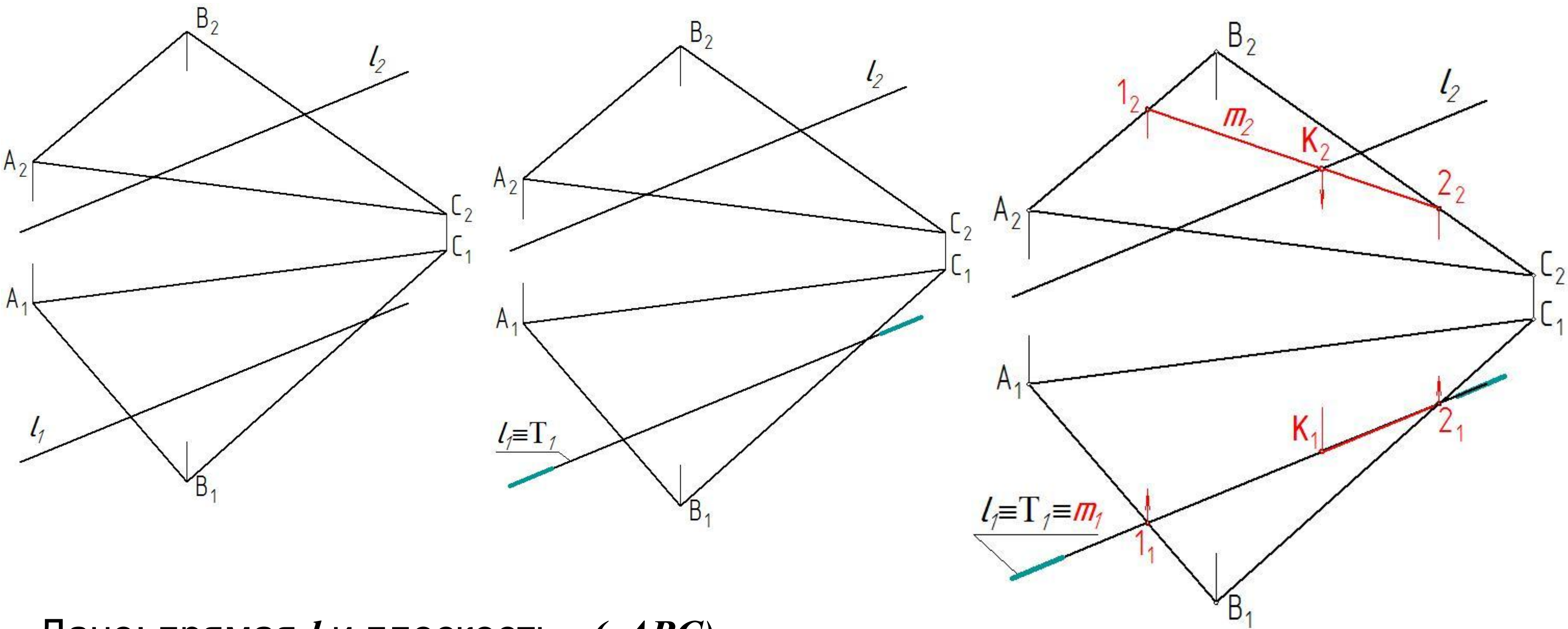
$$m \subset T \Rightarrow m_k \equiv T_k ; \quad m \subset \alpha \Rightarrow m\ (1,2)$$

На примере. $m_1 \equiv T_1 ; \quad m \subset \alpha \Rightarrow m\ (1,2),\ 1 = m \cap AB,\ 2 = m \cap CB$

3. Определяем точку K пересечения прямых l и m, которая является точкой пересечения прямой l с плоскостью α.

Решение рассмотренной задачи на эпюре

Пример 1



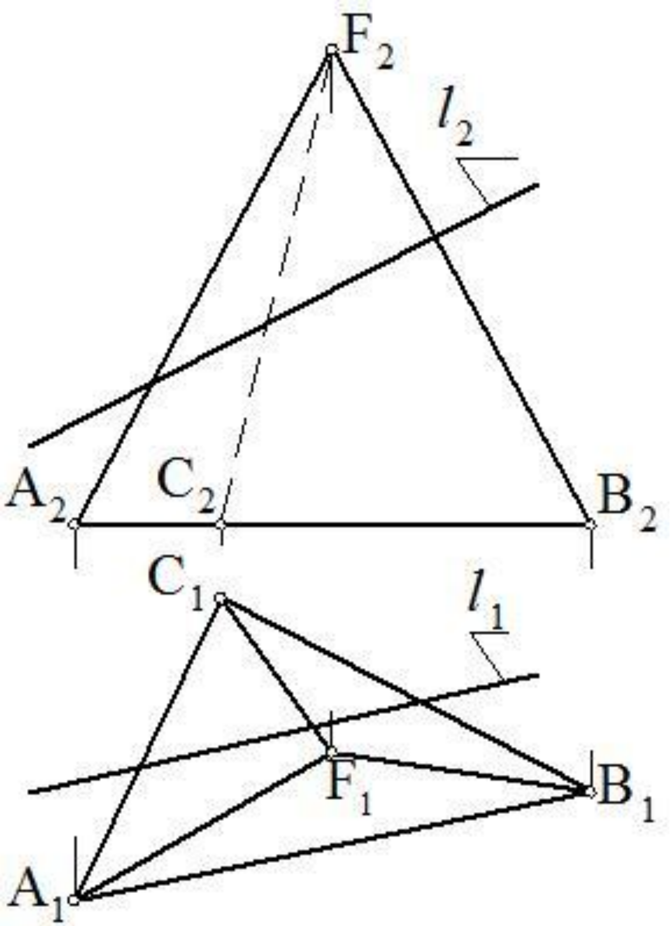
<u>Дано</u>: прямая l и плоскость $\alpha(\Delta ABC)$.
<u>Определить:</u> точку пересечения прямой l с плоскостью α

1. $l \cup T;\ T \perp \Pi_1 \Rightarrow T_1 \equiv l_1$
2. $m = \alpha \cap T \Rightarrow m \subset T \Rightarrow m_1 \equiv T_1 \equiv l_1$;
   $m \subset \alpha\ (\Delta\ ABC) \Rightarrow m(1,2);\ 1 = m \cap AB;\ 2 = m \cap BC;$
3. $l_2 \cap m_2 = K_2 \Rightarrow l \cap m = K, \Rightarrow K = l \cap \alpha$

Пересечение прямой линии с гранной поверхностью

(на примере пирамидальной поверхности)

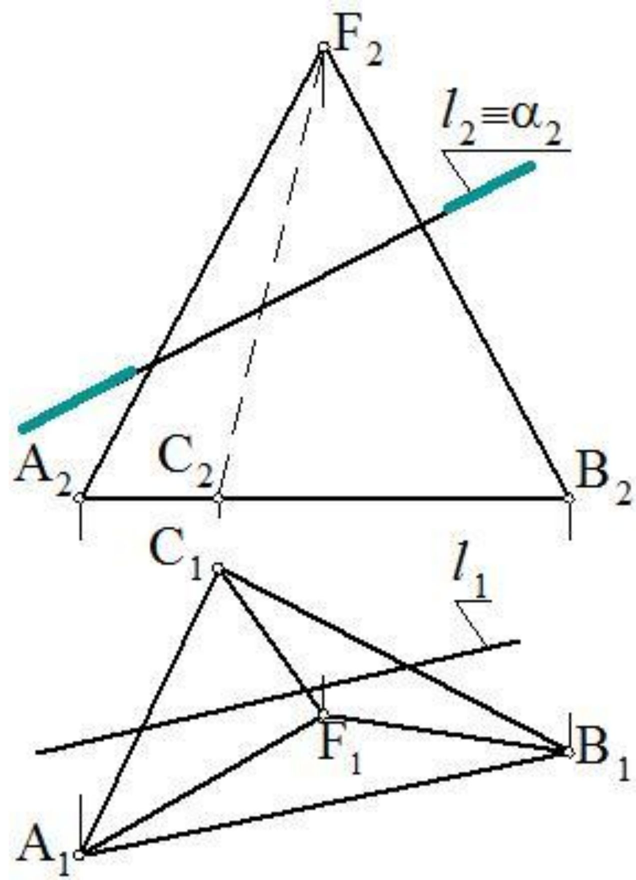
FABC – трехгранная пирамида. Определить точки ***К***[1] и ***К***[2] пересечения прямой ***l*** с поверхностью пирамиды.



Так как при пересечении гранной поверхности плоскостью всегда образуется ломаная линия, то выбор положения вспомогательной плоскости α ($\alpha \perp \Pi_1$ или $\alpha \perp \Pi_2$) *не имеет значения.*

Выбираем фронтально-проецирующую плоскость $\alpha \perp \Pi_2$.

Следовательно $\alpha_2 \equiv l_2$



Строим линию $\boldsymbol{m}$ пересечения плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ с поверхностью пирамиды $\boldsymbol{FABC}$

$m = \alpha \cap FABC$

$\alpha_2 \equiv l_2 \equiv m_2$

$m\{1,2,3\}$

$\alpha \cap FA = 1;$

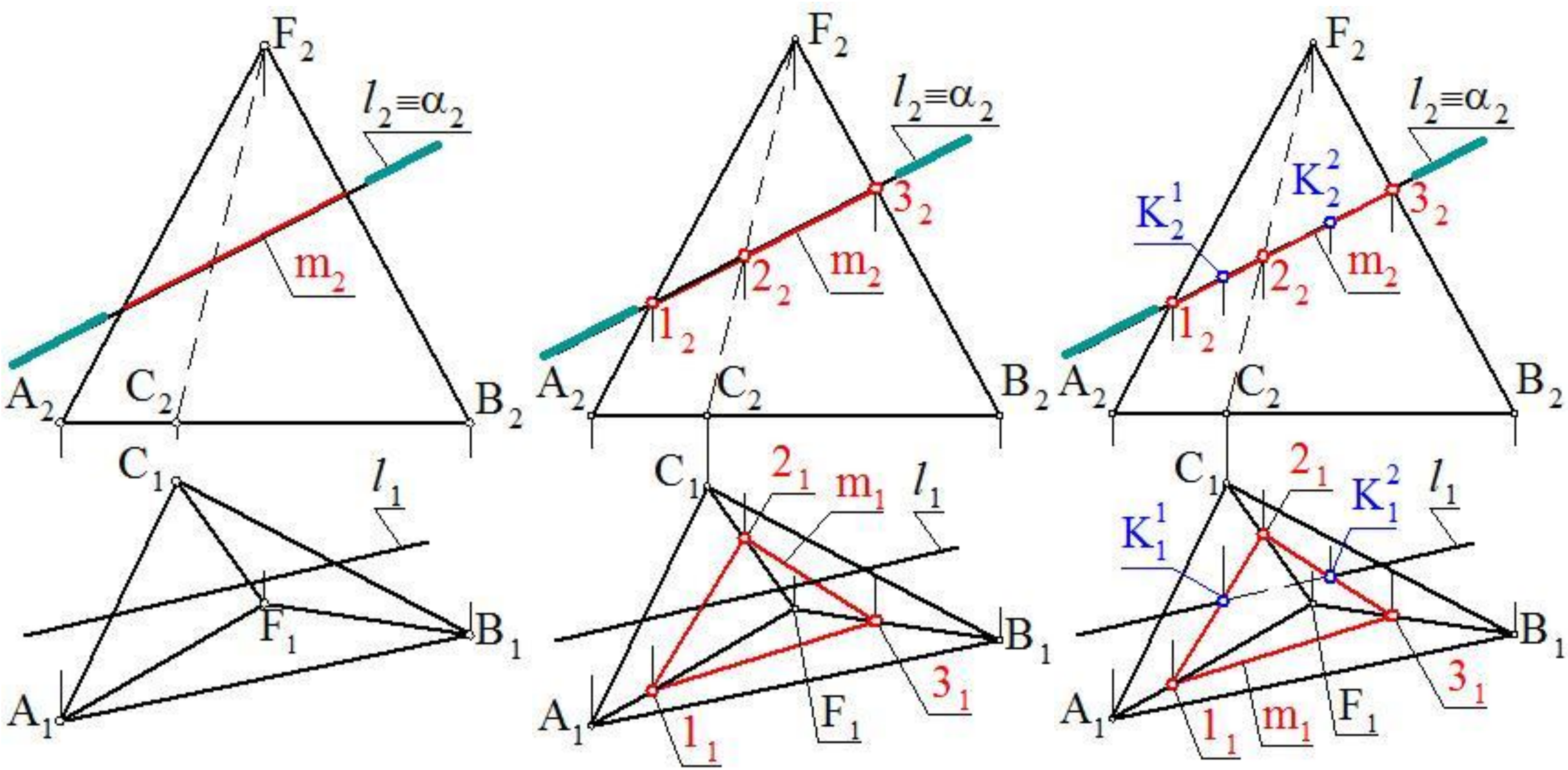
$\alpha \cap FB = 3;$

$\alpha \cap FC = 2$

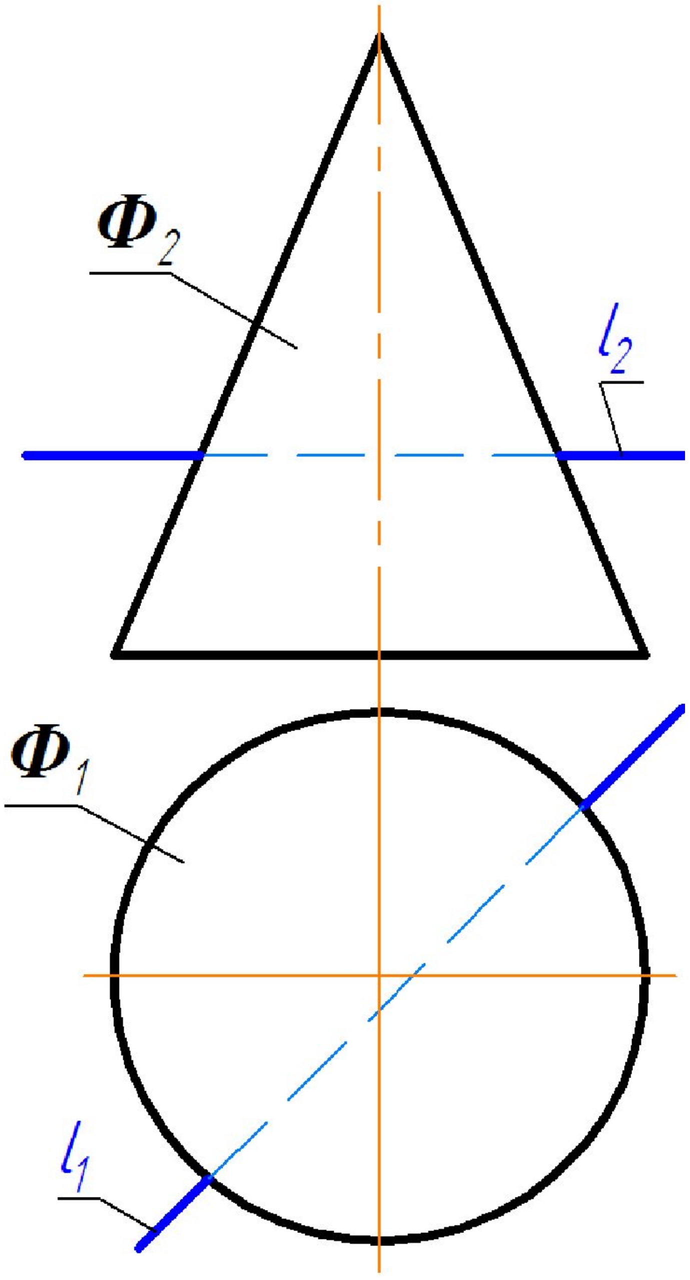
Определяем точки $\boldsymbol{K^1}$ и $\boldsymbol{K^2}$ пересечения линии $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{l}$

$m_1 \cap l_1 = \{K^1{}_1, K^2{}_1\}$

Определяем видимость прямой $\boldsymbol{l}$



Пересечение прямой линии с конической поверхностью



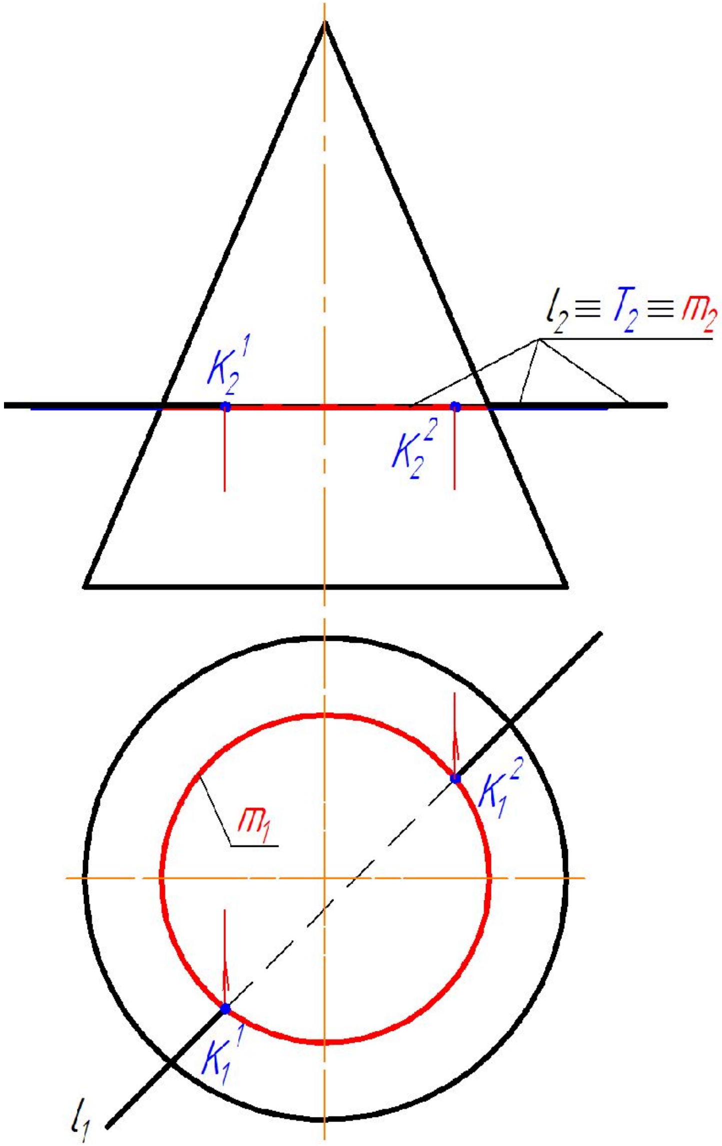
Задана прямая круговая коническая поверхность $\boldsymbol{\Phi}$ и прямая $\boldsymbol{l}$.

Определить точки $\boldsymbol{K^1}$ и $\boldsymbol{K^2}$ пересечения прямой $\boldsymbol{l}$ с конической поверхностью $\boldsymbol{\Phi}$.

Так как коническая поверхность является прямой круговой с вертикальной осью вращения, то все параллели этой поверхности являются горизонталями.

Заданная прямая также является горизонталью.

Следовательно, если прямую $\boldsymbol{l}$ заключить в горизонтальную плоскость уровня, например, $\boldsymbol{T}$, то линией пересечения плоскости $\boldsymbol{T}$ с поверхностью $\boldsymbol{\Phi}$ будет одна из параллелей поверхности $\boldsymbol{\Phi}$.



Совмещаем $m_2 \equiv l_2 \equiv T_2$

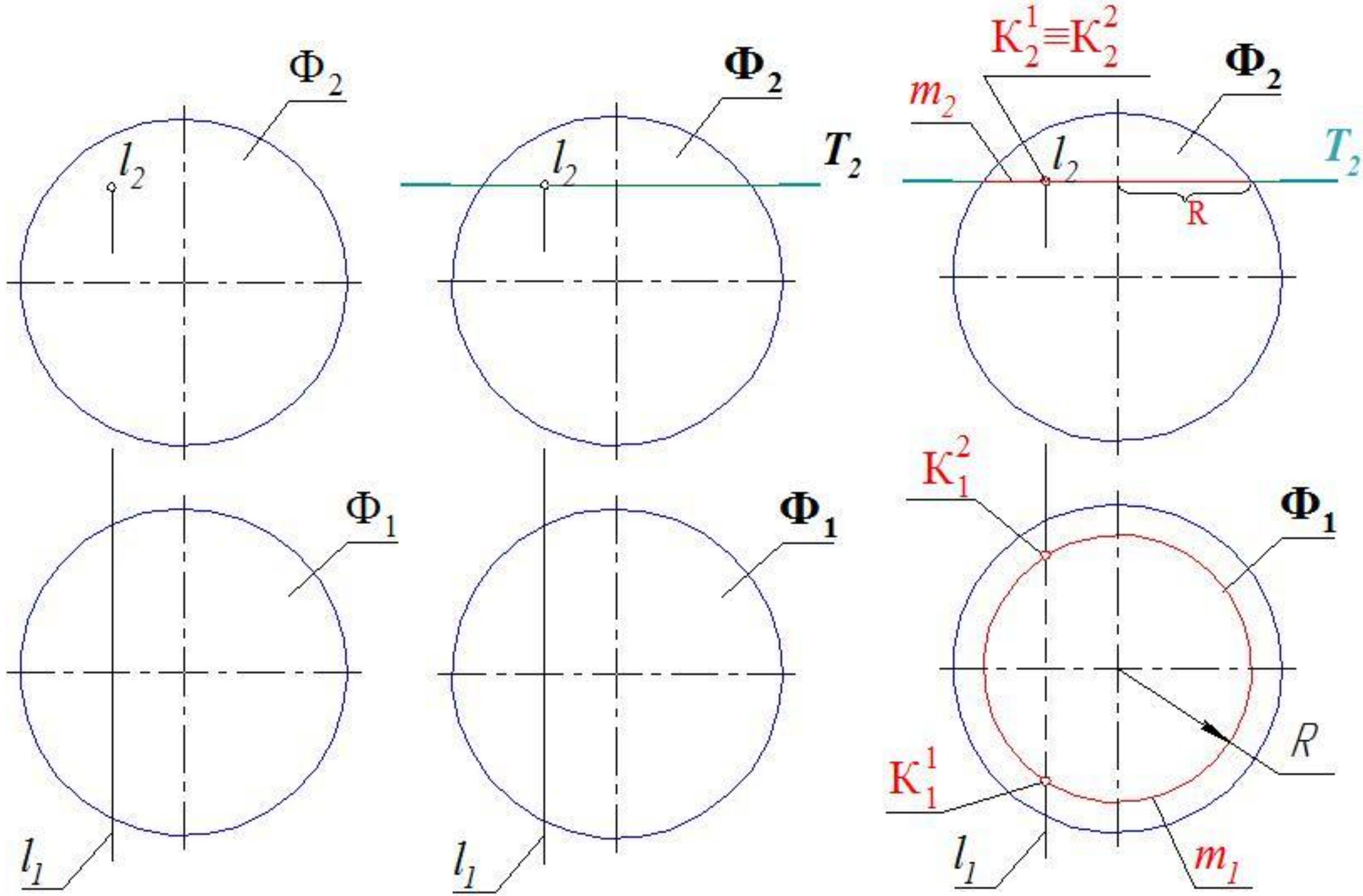
Строим горизонтальную проекцию линии ***m***.   ***m_1-окружность***

На горизонтальной проекции определяем точки ***K^1*** и ***K^2*** пересечения прямой ***l*** и линии ***m***.

Строим фронтальные проекции точек ***K^1*** и ***K^2***.

Определяем видимость участков прямой ***l***.

Пересечение прямой со сферой



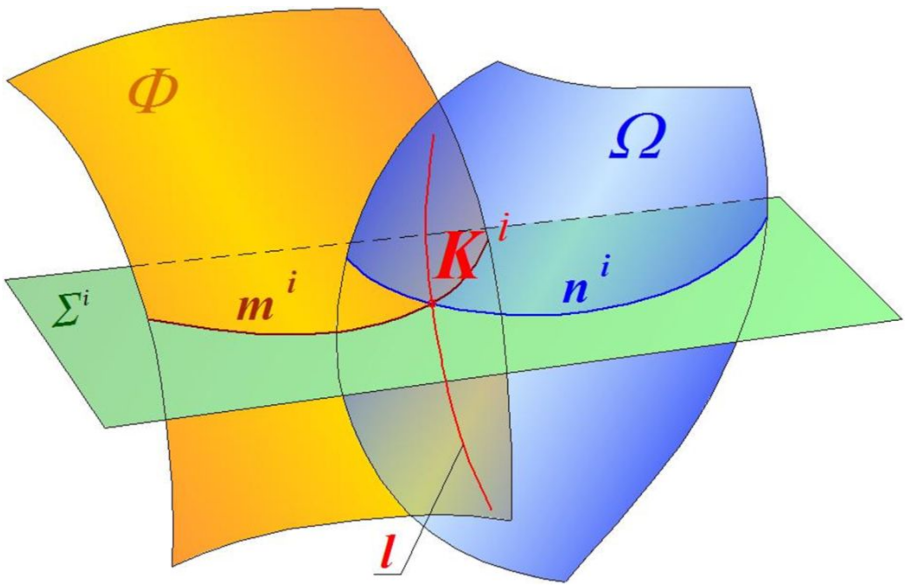
Взаимное пересечение поверхностей

Метод вспомогательных секущих плоскостей

Линией пересечения двух поверхностей, в общем случае, является ***пространственная кривая линия***.

Линия пересечения может быть представлена как множество точек.

Каждая точка множества рассматривается как точка пересечения двух линий, получаемых от пересечения заданных поверхностей вспомогательными секущими плоскостями.



$$\Phi \cap \Omega = l$$

$$l\{K^1, K^2, K^3, \dots K^i\}$$

$$K^i = m^i \cap n^i$$

$$m^i = \Phi \cap \Sigma^i$$

$$n^i = \Omega \cap \Sigma^i$$

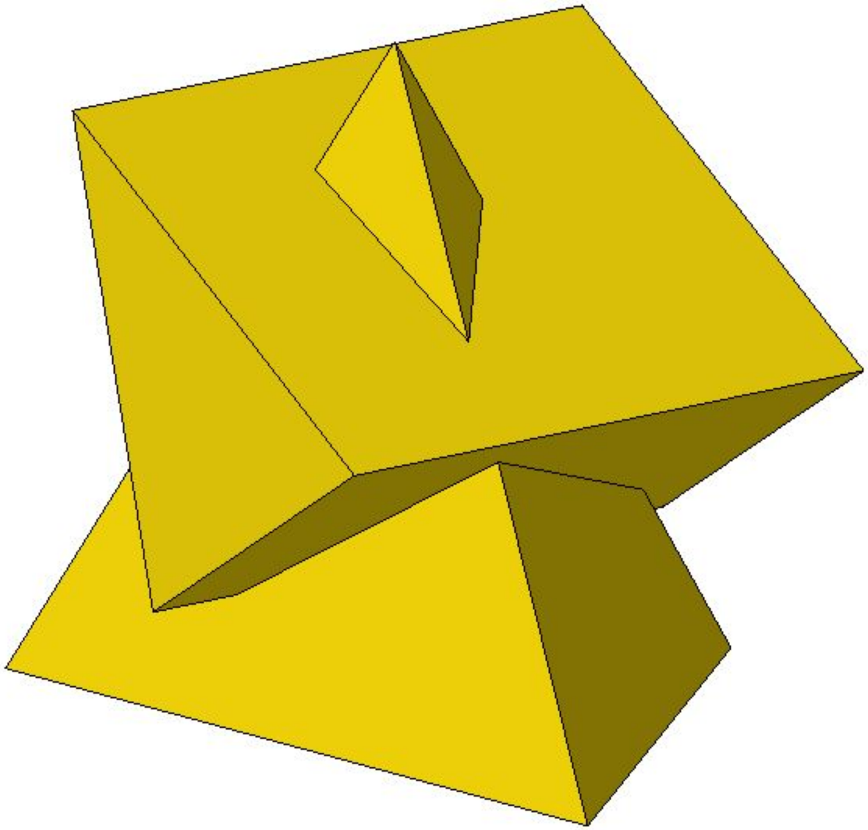
Σ^i – вспомогательная секущая плоскость-посредник

Обязательные требования, предъявляемые к секущим плоскостям:

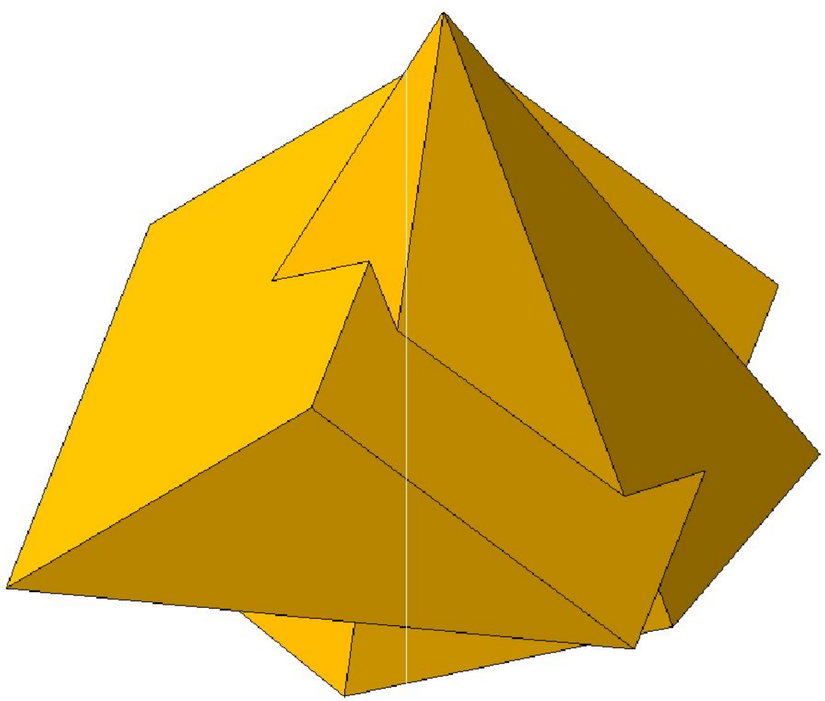
- каждая из секущих плоскостей должна пересекать обе заданные поверхности;
- линии, получаемые в результате пересечения должны пересекаться между собой и иметь, по возможности, наиболее простую геометрическую форму.

Пересечение двух поверхностей может быть полным или неполным (частичным).

Полное пересечение



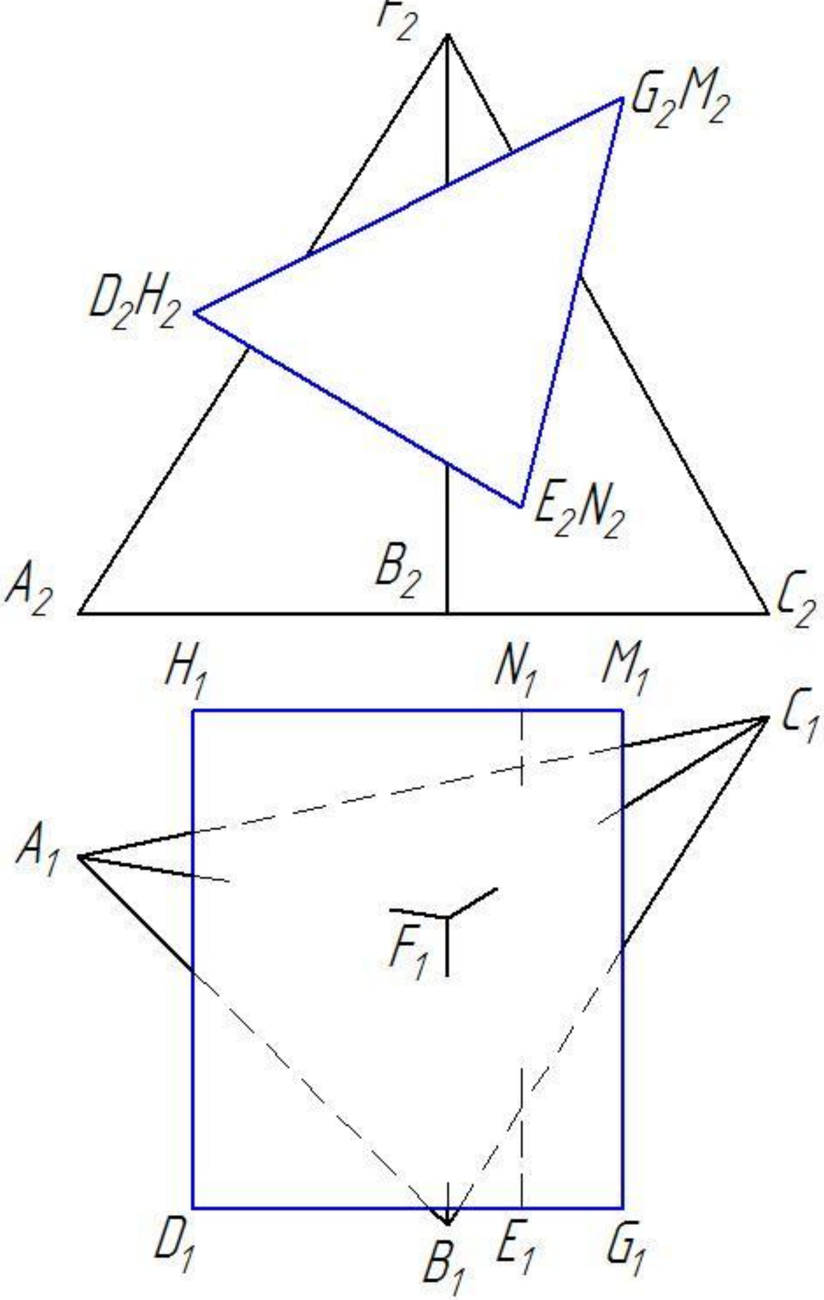
Неполное пересечение



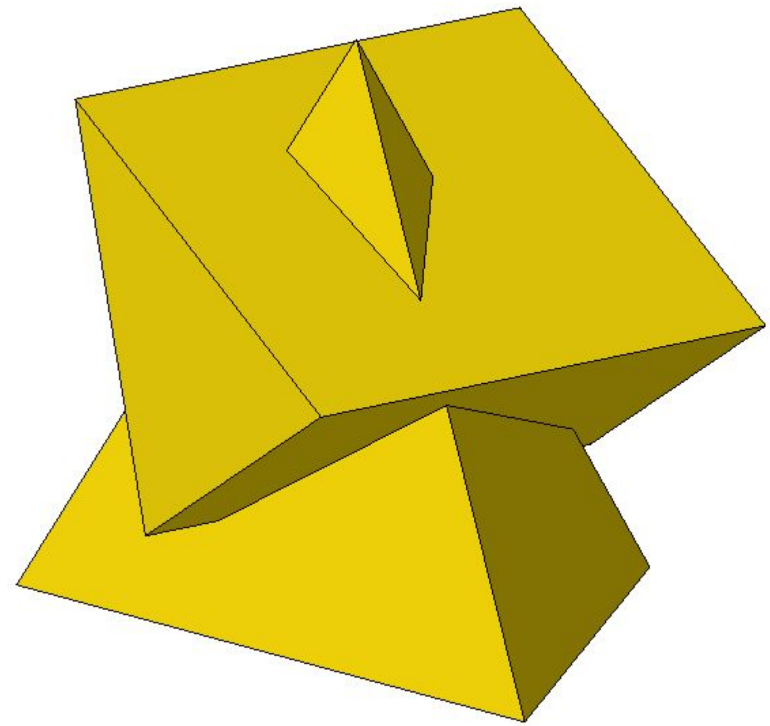
Взаимное пересечение двух гранных поверхностей

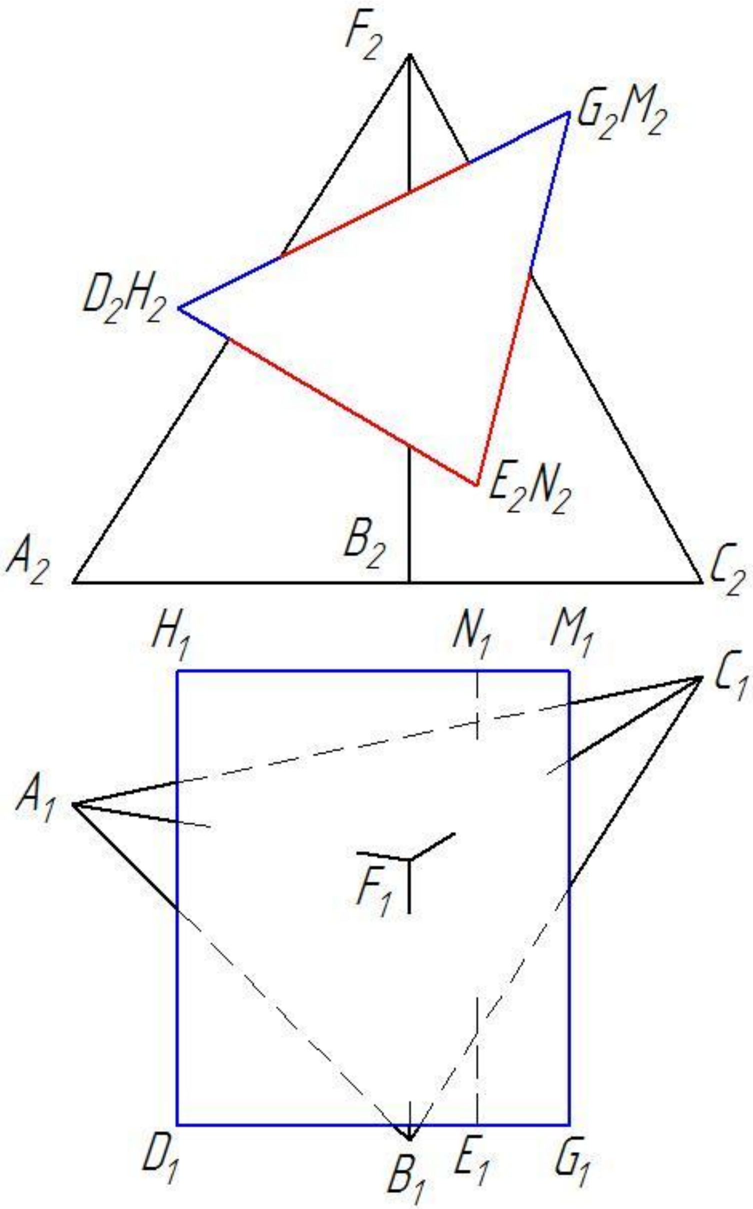
Линией пересечения двух гранных поверхностей является ломаная прямая линия, точками излома которой являются точки пересечения ребер одной гранной поверхности с гранями другой.

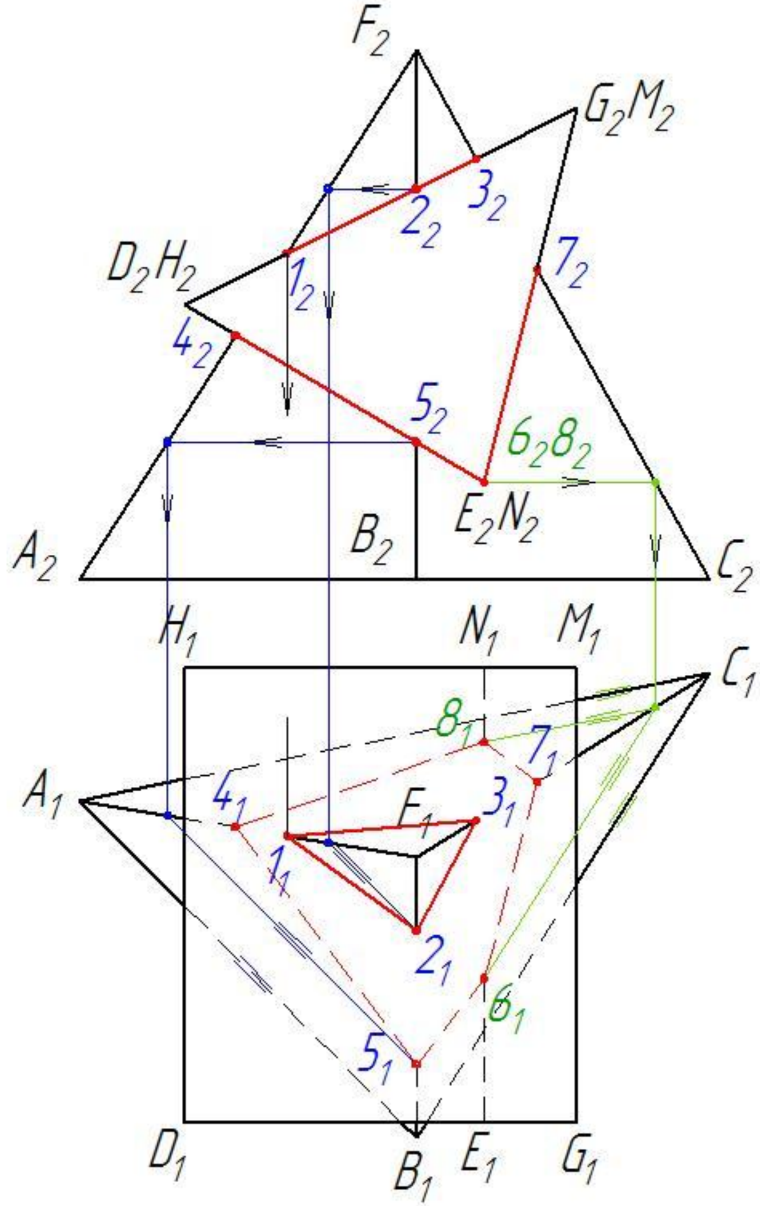
Вся задача на построение линии пересечения двух гранных поверхностей сводится к много-кратному решению задачи на определение точки пересечения прямой с плоскостью.



F_2
G_2M_2
D_2H_2
E_2N_2
A_2
B_2
C_2
H_1
N_1
M_1
C_1
A_1
F_1
D_1
B_1
E_1
G_1




F_2
G_2M_2
D_2H_2
E_2N_2
A_2
B_2
C_2
H_1
N_1
M_1
C_1
A_1
F_1
D_1
B_1
E_1
G_1

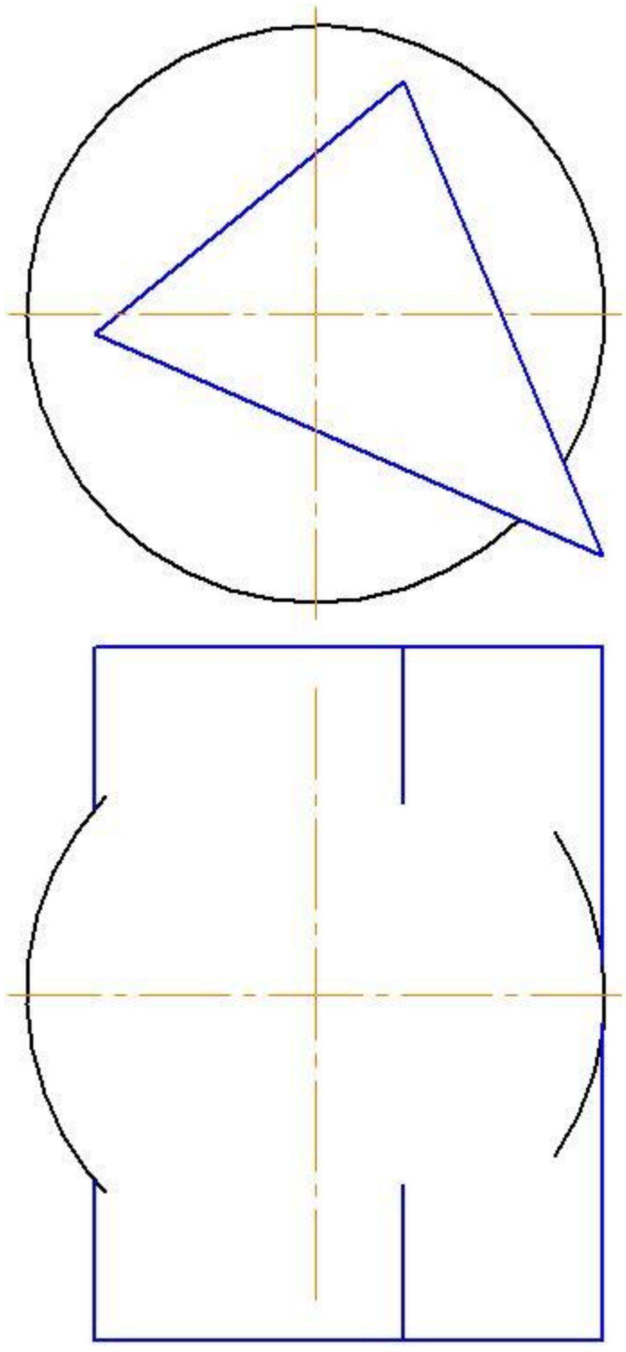

F_2
G_2M_2
3_2
2_2
D_2H_2
1_2
7_2
4_2
5_2
6_28_2
E_2N_2
A_2
B_2
C_2
H_1
N_1
M_1
C_1
8_1
7_1
A_1
4_1
F_1
3_1
1_1
2_1
6_1
5_1
D_1
B_1
E_1
G_1

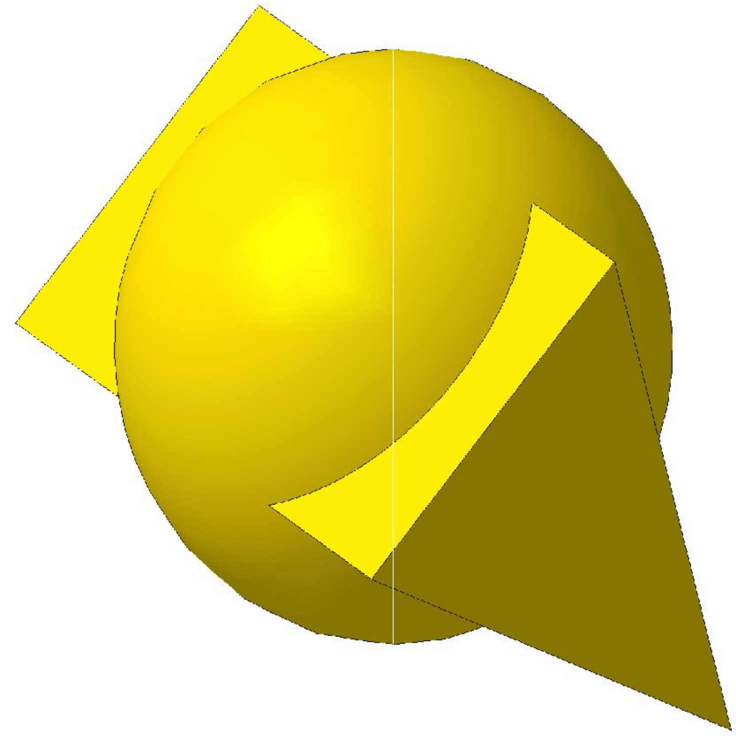
Взаимное пересечение гранной поверхности с кривой поверхностью

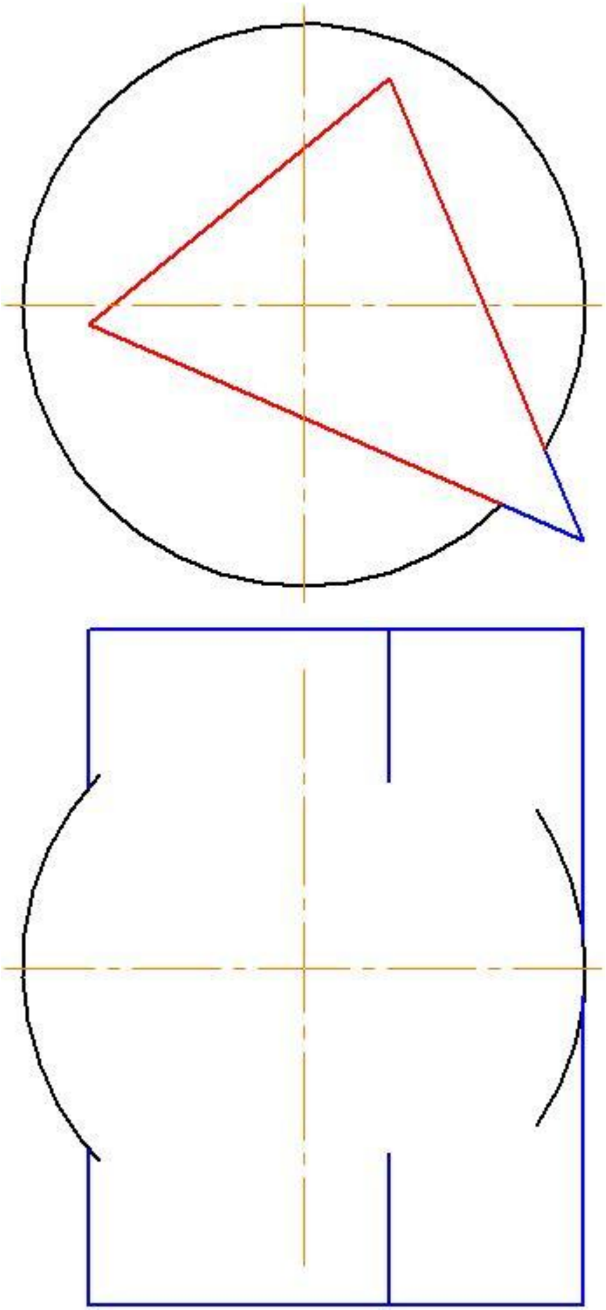
Линия пересечения гранной поверхности с кривой поверхностью представляет собой ломаную кривую линию, точками излома которой являются точки пересечения ребер гранной поверхности с кривой поверхностью, а линиями, соединяющими эти точки – плоские кривые, получаемые при пересечении граней гранной поверхности (отсеков плоскостей) с кривой поверхностью.

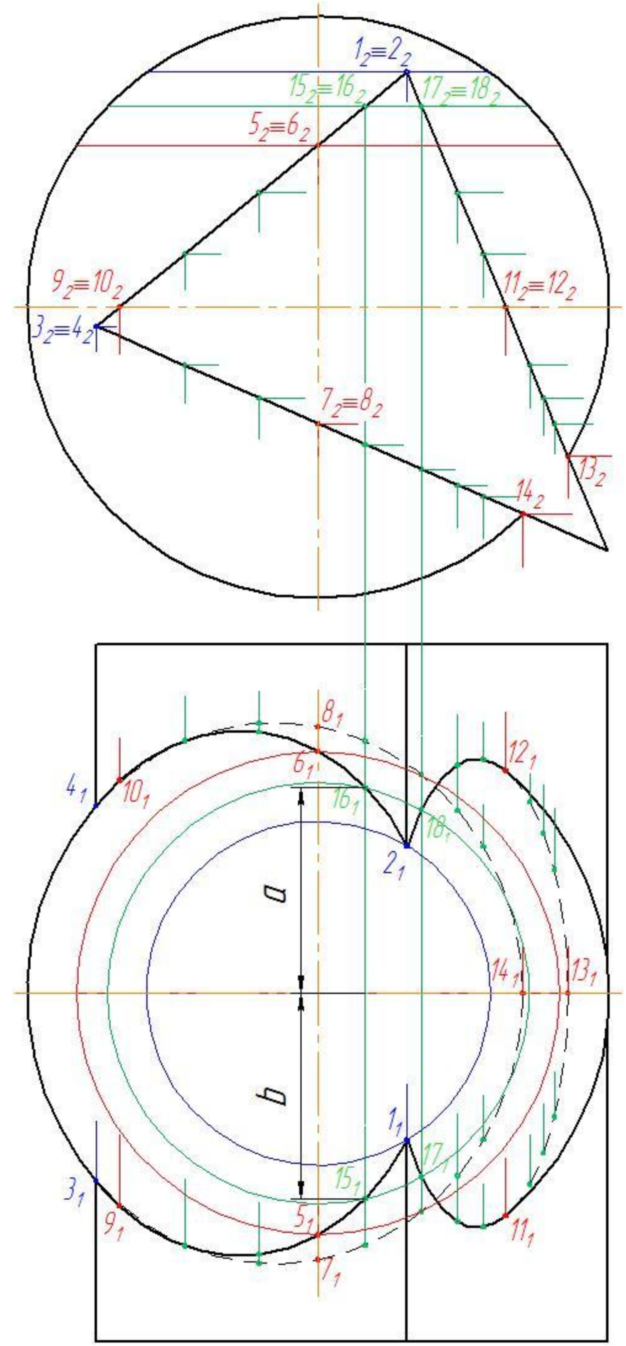
Т.е. задача на построение линии пересечения гранной поверхности с кривой поверхностью сводится к многократному решению двух задач:

- определение точек пересечения прямой линии с кривой поверхностью;
- построение линии пересечения кривой поверхности плоскостью.



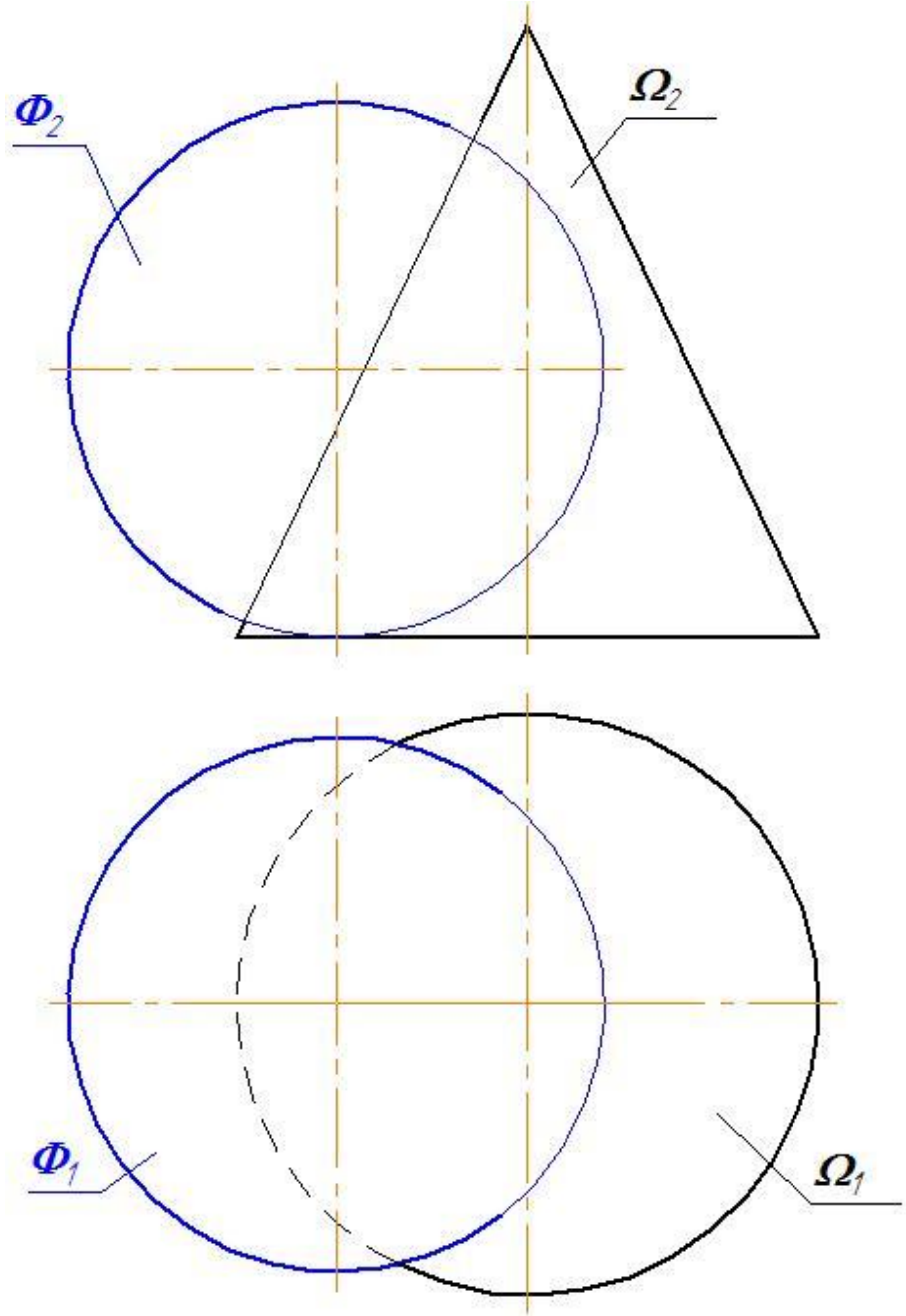


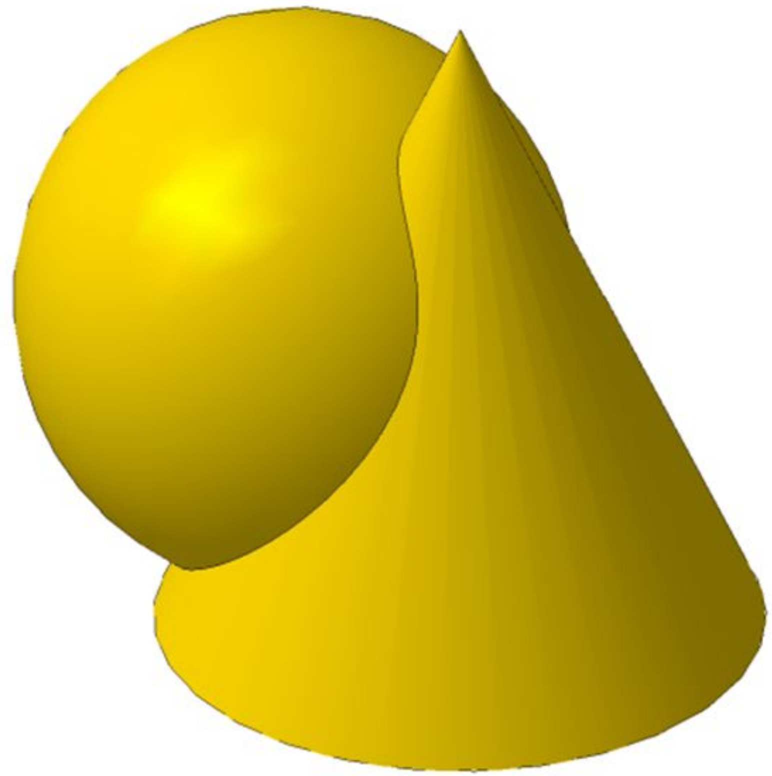


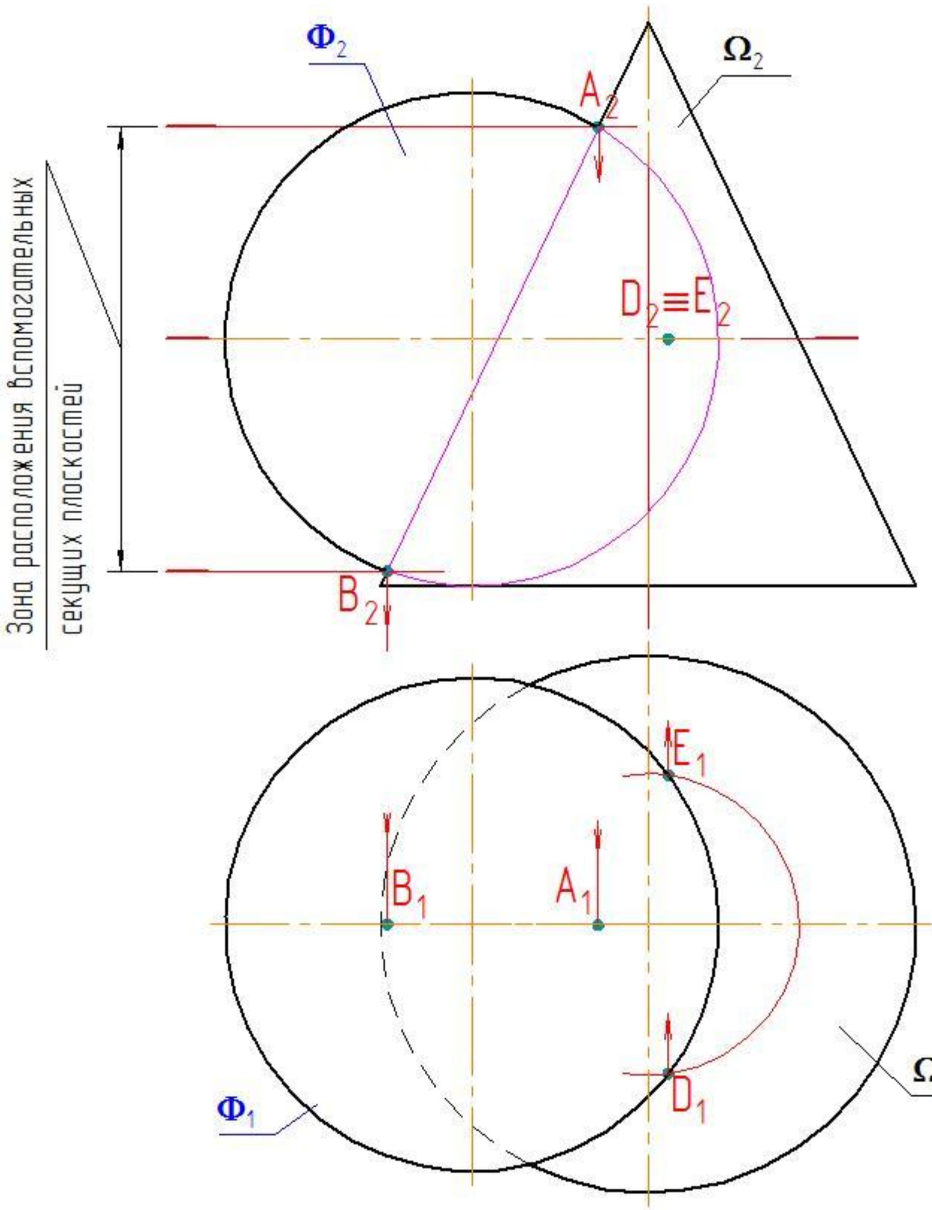


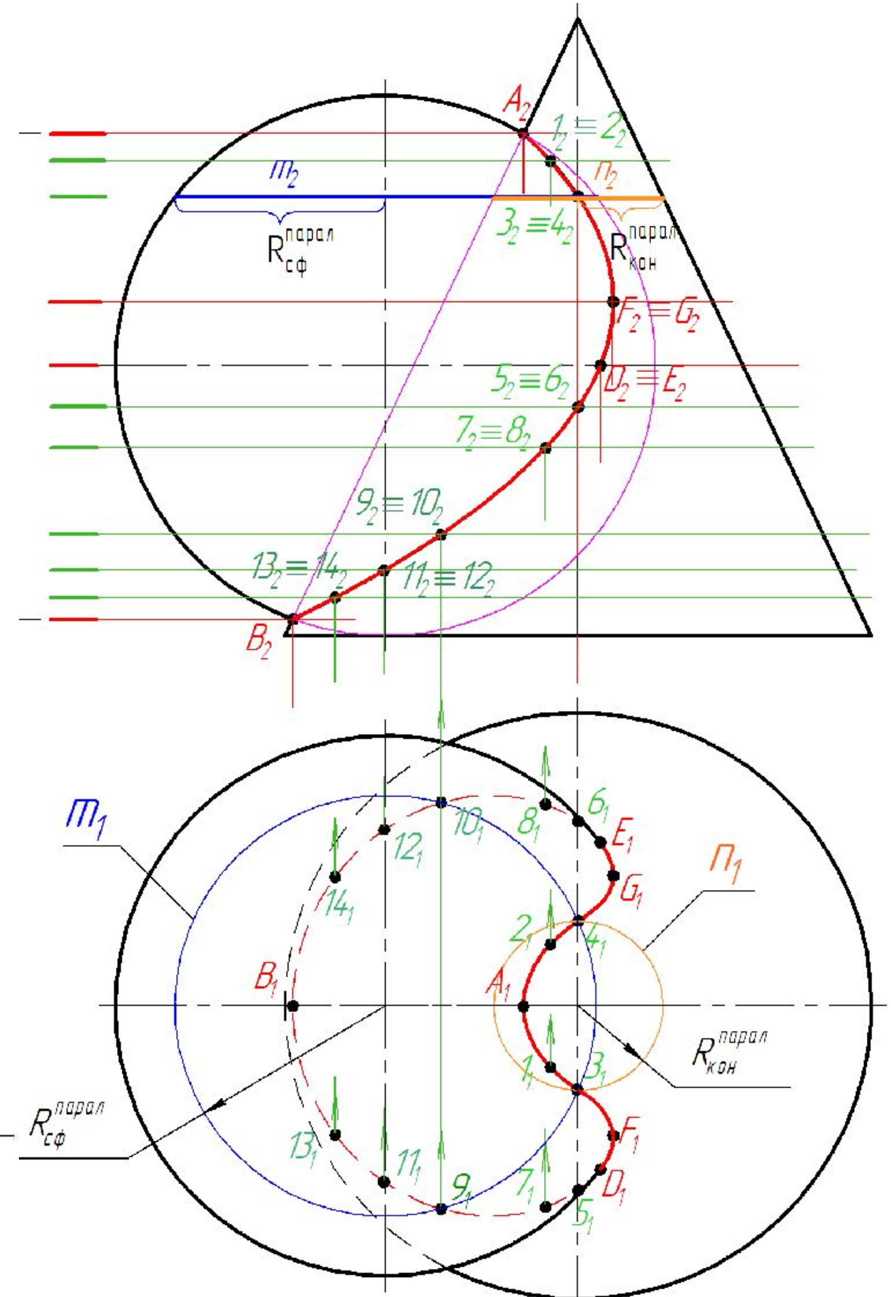
$1_2 \equiv 2_2$
$15_2 \equiv 16_2$
$17_2 \equiv 18_2$
$5_2 \equiv 6_2$
$9_2 \equiv 10_2$
$11_2 \equiv 12_2$
$3_2 \equiv 4_2$
$7_2 \equiv 8_2$
13_2
14_2
8_1
6_1
12_1
4_1
10_1
16_1
18_1
2_1
a
14_1
13_1
b
1_1
17_1
15_1
3_1
9_1
5_1
11_1
7_1

Взаимное пересечение кривых поверхностей


Φ_2
Ω_2
Φ_1
Ω_1

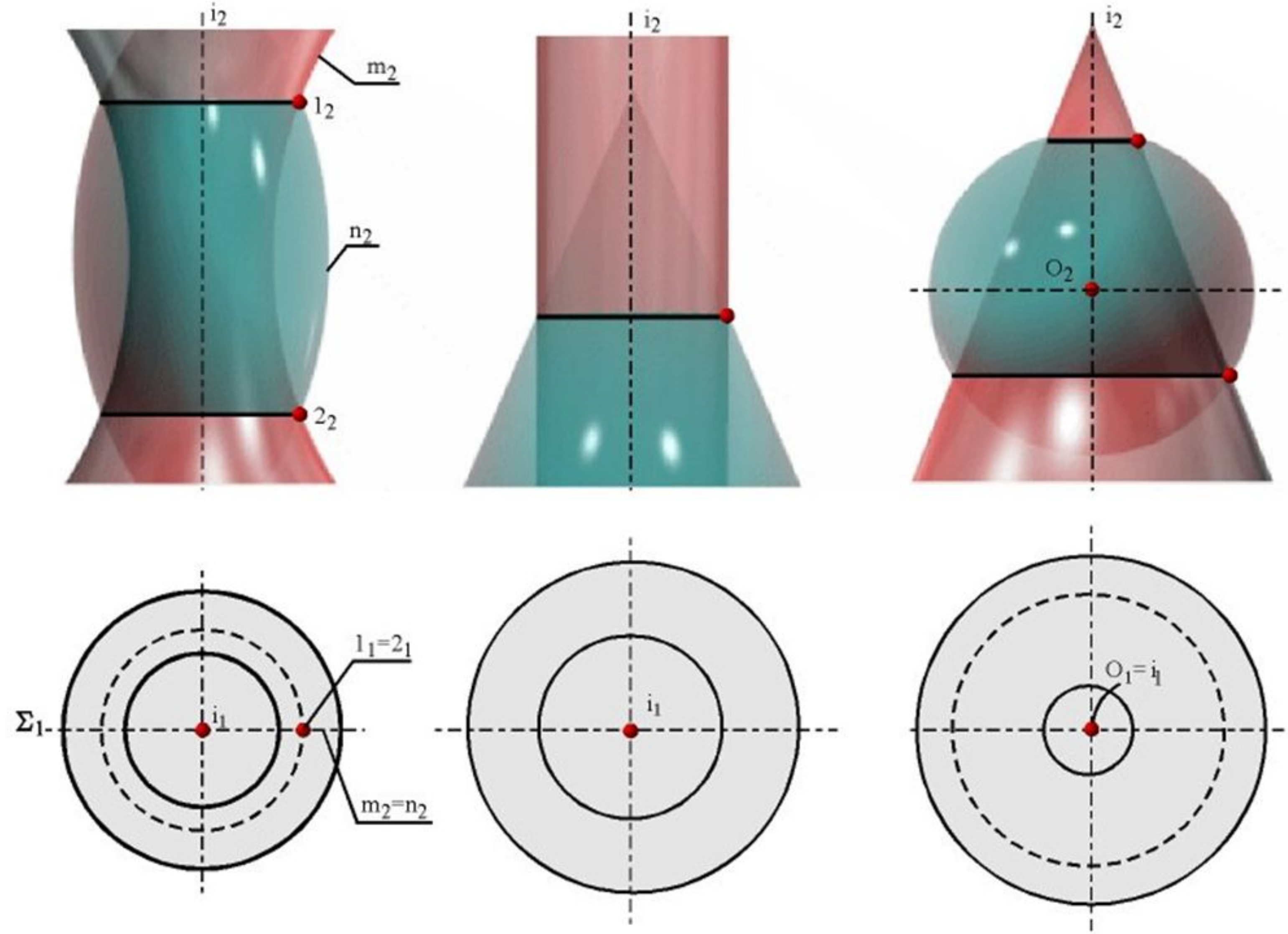


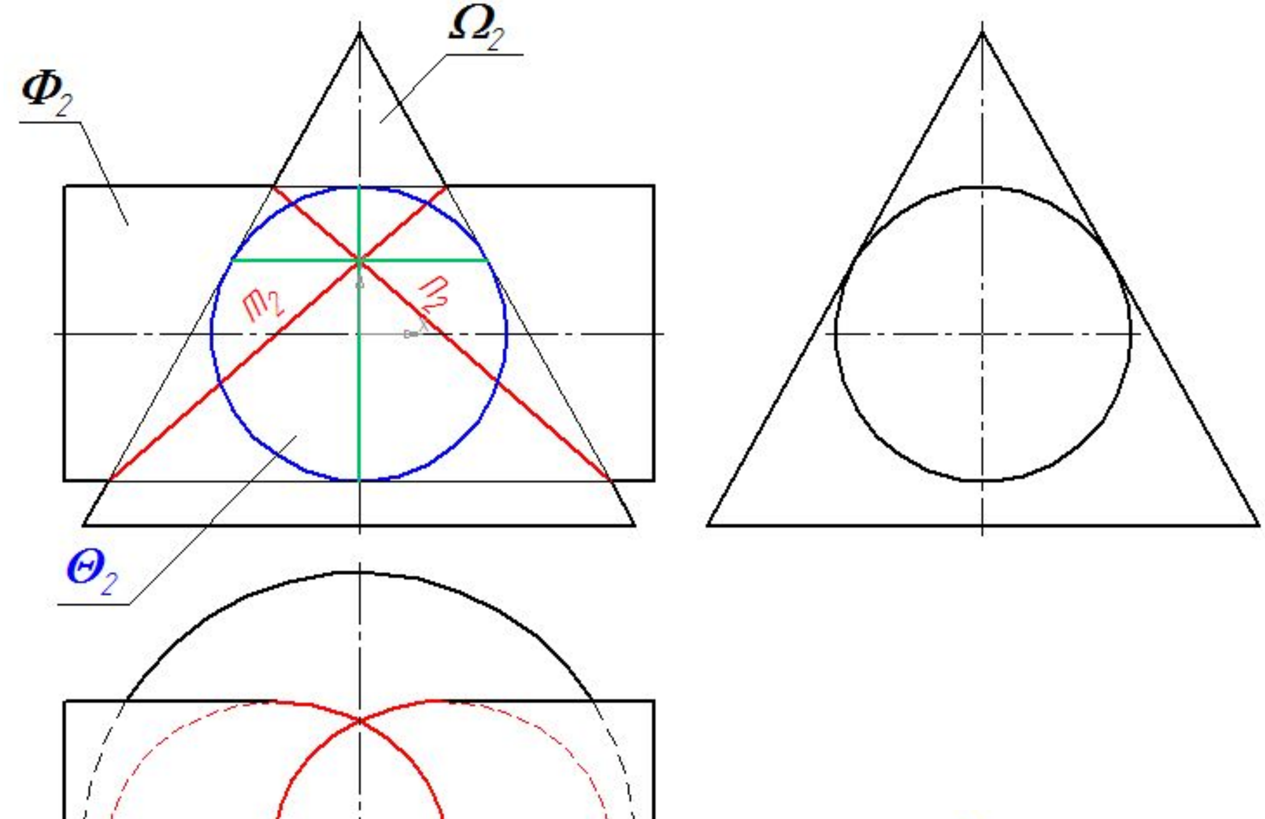

Зона расположения вспомогательных секущих плоскостей
Φ2
Ω2
A2
D2≡E2
B2
E1
B1
A1
D1
Φ1
Ω1

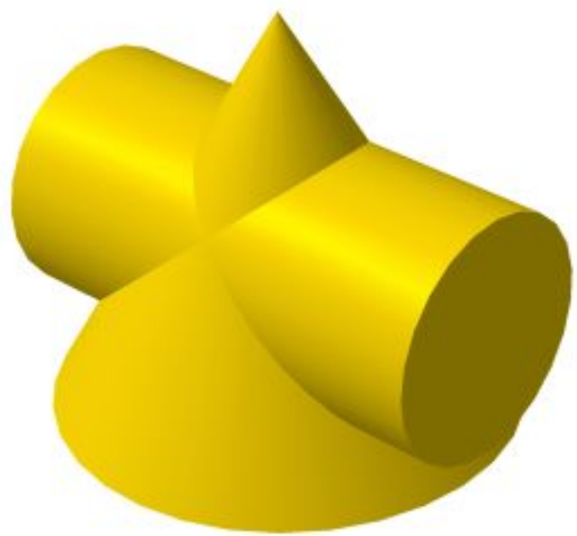

A2
12≡22
m2
n2
R парал сф
32≡42
R парал кон
F2≡G2
52≡62
D2≡E2
72≡82
92≡102
132≡142
112≡122
B2
m1
61
E1
101
81
121
n1
G1
141
21
41
B1
A1
R парал кон
11
31
F1
R парал сф
131
111
91
71
D1
51

Частные случаи взаимного пересечения двух поверхностей вращения

Если две поверхности вращения соосны, то их линиями пересечения являются окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных их общей оси вращения.

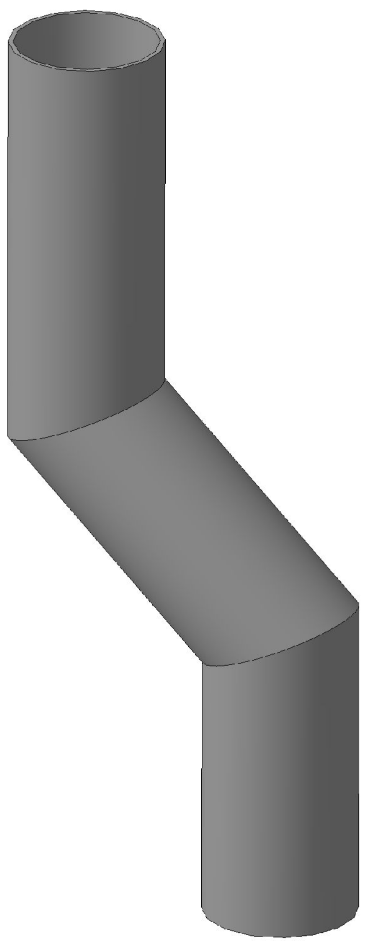


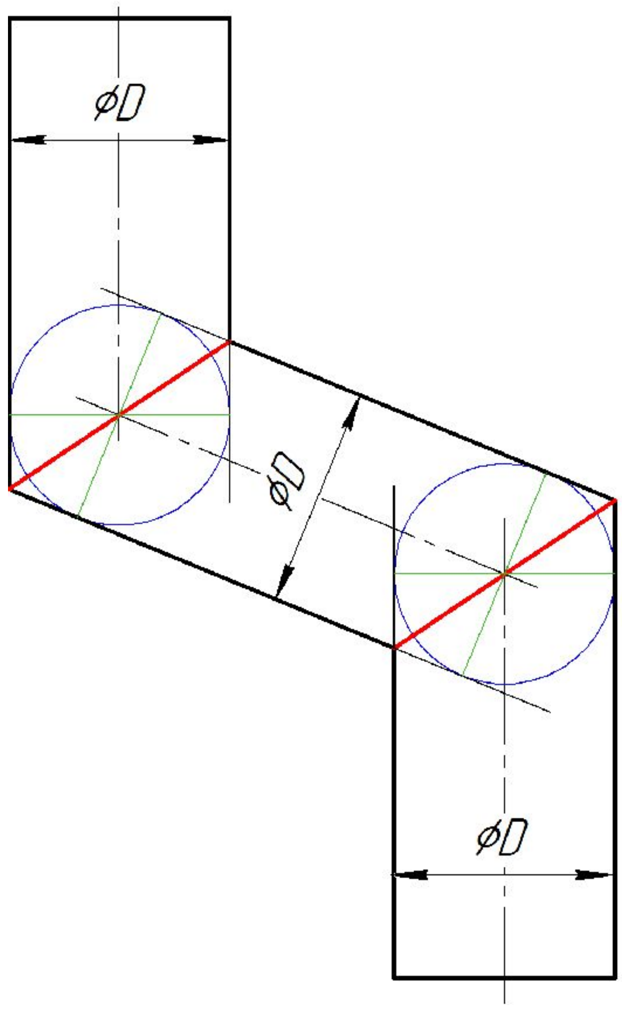




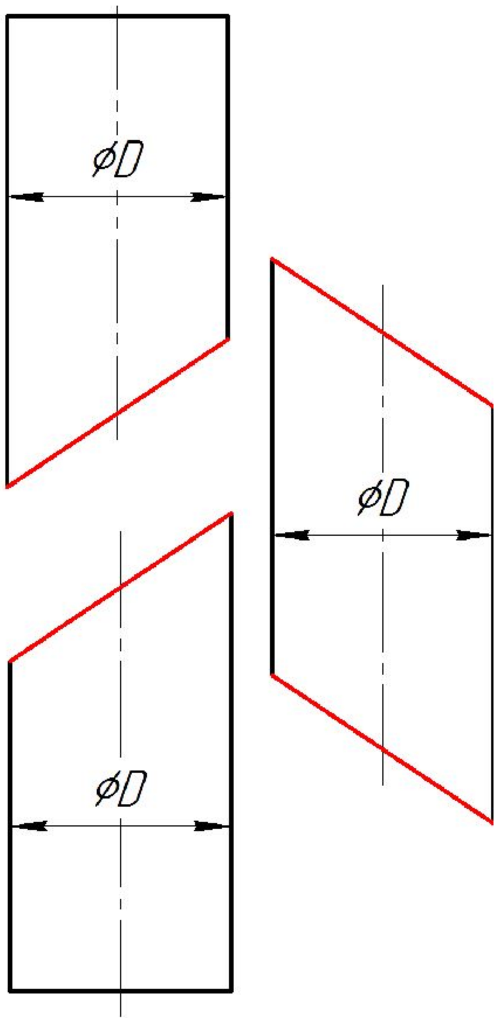
Теорема Монжа.

Если две поверхности вращения второго порядка **Ф** и **Ω** описаны вокруг третьей поверхности вращения второго порядка **Θ** (сферы) или вписаны в нее, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые ***m*** и ***n*** второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания.





ϕD
ϕD
ϕD



ϕD
ϕD
ϕD