Нечеткий вывод

Обобщение понятия импликации на нечеткие множества

Пусть A и B - нечеткие высказывания и μ_A, μ_B соответствующие им функции принадлежности.

Тогда импликации $A \to B$ будет соответствовать некоторая функция принадлежности $\mu_{A \to B}$.

По аналогии с традиционной логикой можно предположить, что

$$A \to B = \overline{A} \cup B$$

$$\mu_{A \to B}(x, y) = \max\{1 - \mu_A(x), \mu_B(y)\}.$$

- Замечание. Это не единственное обобщение оператора импликации.
- Под способом определения нечеткой импликации «Если A то B», где A и B – нечеткие множества на X,Y соответственно, будем понимать способ задания нечеткого отношения R на X×Y, соответствующего данному высказыванию.

Интерпретации понятия импликации

Larsen	$\mu_{A\to B}(x,y)=\mu_A(x)\mu_B(y)$
Lukasiewicz	$\mu_{A\to B}(x,y)=\min\{1,1-\mu_A(x)+\mu_B(y)\}$
Mamdani	$\mu_{A\to B}(x,y)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}$
Standard Strict	$\mu_{A\to B}(x,y)=\begin{cases}1, & \text{если } \mu_A(x)\leqslant\mu_B(y);\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$
Godel	$\mu_{A\to B}(x,y)=\begin{cases}1, & \text{если } \mu_A(x)\leqslant\mu_B(y);\\ \mu_B(y), & \text{в противном случае.}\end{cases}$
Gaines	$\mu_{A\to B}(x,y)=\begin{cases}1, & \text{если } \mu_A(x)\leqslant\mu_B(y);\\ \frac{\mu_B(y)}{\mu_A(x)}, & \text{в противном случае.}\end{cases}$
Kleene-Dienes	$\mu_{A\to B}(x,y)=\max\{1-\mu_A(x),\ \mu_B(y)\}$
Kleene-Dienes-Lu	$\mu_{A\to B}(x,y)=1-\mu_A(x)+\mu_A(x)\mu_B(y)$

Нечеткий логический вывод

- Под приближенными рассуждениями понимается процесс, при котором из нечетких посылок получают некоторые следствия, возможно, тоже нечеткие. Приближенные рассуждения лежат в основе способности человека понимать естественный язык, разбирать почерк, играть в игры, требующие умственных усилий, в общем, принимать решения в сложной и не полностью определенной среде. Эта способность рассуждений в качественных, неточных терминах отличает интеллект человека от интеллекта вычислительной машины.
- Основным правилом вывода в традиционной логике является правило modus ponens, согласно которому мы судим об истинности высказывания B по истинности высказываний A и $A \rightarrow B$.
- Например, если A - высказывание "Джон в больнице", B - высказывание "Джон болен", то если истинны высказывания "Джон в больнице" и "Если Джон в больнице, то он болен", то истинно и высказывание "Джон болен".

Нечеткий логический вывод

- Во многих привычных рассуждениях, однако, правило modus ponens используется не в точной, а в приближенной форме. Так, обычно мы знаем, что A истинно и что $A^* \rightarrow B$, где A^* есть, в некотором смысле, приближение A. Тогда из $A^* \rightarrow B$ мы можем сделать вывод о том, что B приближенно истинно.

- Далее мы обсудим способ формализации приближенных рассуждений. Однако, в отличие от традиционной логики, нашим главным инструментом будет не правило modus ponens, а так называемое *композиционное правило вывода*, весьма частным случаем которого является правило modus ponens.

Композиционное правило вывода

- Пусть U и V - два универсальных множества с базовыми переменными u и v, соответственно.
- Пусть A и F - нечеткие подмножества множеств U и $U \times V$.

- Тогда **композиционное правило вывода** утверждает, что из нечетких множеств A и F следует нечеткое множество $B = A \circ F$.
- Согласно определению композиции нечетких множеств, получим

$$\mu_B(v) = \bigvee_{u \in U} (\mu_A(u) \wedge \mu_F(u, v)).$$

Композиционное правило вывода

Пример. Пусть $U = V = \{1, 2, 3, 4\}$

A = МАЛЫЙ $= \{\langle 1|1\rangle, \langle 0,6|2\rangle, \langle 0,2|3\rangle, \langle 0|4\rangle\}$.

F=ПРИМЕРНО РАВНЫ =

	1	2	3	4
1	1	0,5	0	0
2	0,5	1	0,5	0
3	0	0,5	1	0,5
4	0	0	0,5	1

Тогда получим

$$B = [1 \quad 0,6 \quad 0,2 \quad 0] \circ \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 0,6 \quad 0,5 \quad 0,2],$$

что можно проинтерпретировать следующим образом:
B = БОЛЕЕ ИЛИ МЕНЕЕ МАЛЫЙ,
если терм БОЛЕЕ ИЛИ МЕНЕЕ определяется как оператор увеличения нечеткости.
Словами этот приближенный вывод можно записать в виде

u	– МАЛЫЙ	предпосылка
u, v	– ПРИМЕРНО РАВНЫ	предпосылка
v	– БОЛЕЕ ИЛИ МЕНЕЕ МАЛЫЙ	приближенный вывод

Обобщенное правило modus ponens (generalized modus ponens)

- Обобщенное правило modus ponens:

Предпосылка $A \rightarrow B$

Событие A^*

Вывод $A * \circ (A \rightarrow B)$

- Приведенная формулировка имеет два отличия от традиционной формулировки правила modus ponens :

во-первых, здесь допускается, что A, A^*, B - нечеткие множества, и,

во-вторых, A^* необязательно идентично A

Нечеткие экспертные системы

- Логико-лингвистические методы описания систем основаны на том, что поведение исследуемой системы описывается в естественном (или близком к естественному) языке в терминах лингвистических переменных.
- Входные и выходные параметры системы рассматриваются как лингвистические переменные, а качественное описание процесса задается совокупностью высказываний следующего вида:
- L1 если A11 и/или A2 и/или … и/или A1m, то B11 и/или … и/или B1n,
- L2 если A21 и/или A22 и/или … и/или A2m, то B21 и/или … и/или B2n,
- …………………
- Lk если Ak1 и/или Ak2 и/или … и/или Akm, то Bk1 и/или … и/или Bkn,

где A_{ij}, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, n}$ - нечеткие высказывания, определенные на значениях входных лингвистических переменных, а B_{ij}, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, n}$ - нечеткие высказывания, определенные на значениях выходных лингвистических переменных. Эта совокупность правил носит название нечеткой базы знаний.

Нечеткие экспертные системы

- Затем с помощью операторов вычисления дизъюнкции и конъюнкции описание системы можно привести к виду
- L1: если A1, то B1,
- L2: если A2, то B2,
- ....
- Lk: если Ak, то Bk,

где $A_1, A_2, \dots, A_k$ — нечеткие множества, заданные на декартовом произведении X универсальных множеств входных лингвистических переменных, а $B_1, B_2, \dots, B_k$ — нечеткие множества, заданные на декартовом произведении Y универсальных множеств выходных лингвистических переменных

Логико-лингвистические системы

- В основе построения логико-лингвистических систем лежит *композиционное правило вывода* Заде.
- Преимущество данной модели - в ее универсальности. Нам неважно, что именно на входе — конкретные числовые значения или некоторая неопределенность, описываемая нечетким множеством. Но за данную универсальность приходится расплачиваться сложностью системы — нам приходится работать в пространстве размерности $m \times n$. Поэтому общей моделью на практике пользуются довольно редко.
- Обычно используют ее упрощенный вариант, называемый нечетким выводом.
- Он основывается на предположении, что все входные лингвистические переменные имеют известные нам числовые значения (как и бывает довольно часто на практике).
- Также обычно не используют более одной выходной лингвистической переменной.

Нечеткий логический вывод

- **Нечетким логическим выводом** (fuzzy logic inference) называется аппроксимация зависимости $Y = f(X_{1,} X_2, \dots, X_n)$ каждой выходной лингвистической переменной от входных лингвистических переменных и получение заключения в виде нечеткого множества, соответствующего текущим значениям входов, с использованием нечеткой базы знаний и нечетких операций.
- Основу нечеткого логического вывода составляет **композиционное правило Заде**.

Как операцию композиции, так и операцию импликации можно реализовать по-разному (при этом будет отличаться и полученный результат), но в любом случае общий логический вывод осуществляется за 4 этапа.

Нечеткий логический вывод (Основные этапы)

- 1) **этап фаззификации**. С помощью функций принадлежности всех термов входных лингвистических переменных и на основании задаваемых четких значений из универсумов входных лингвистических переменных определяются степени уверенности в том, что выходная лингвистическая переменная принимает конкретное значение.
- Эта степень уверенности есть ордината точки пересечения графика функции принадлежности терма и прямой *x=четкое значение ЛП*.

Нечеткий логический вывод (Основные этапы)

2) **этап непосредственного нечеткого вывода**. На основании набора правил — нечеткой базы знаний — вычисляется значение истинности для предпосылки каждого правила на основании конкретных нечетких операций, соответствующих конъюнкции или дизъюнкции термов в левой части правил.

В большинстве случаев это либо максимум, либо минимум из степеней уверенности термов, вычисленных на этапе фаззификации, который применяется к заключению каждого правила. Используя один из способов построения нечеткой импликации, мы получим нечеткую переменную, соответствующую вычисленному значению степени уверенности в левой части правила и нечеткому множеству в правой части правила.

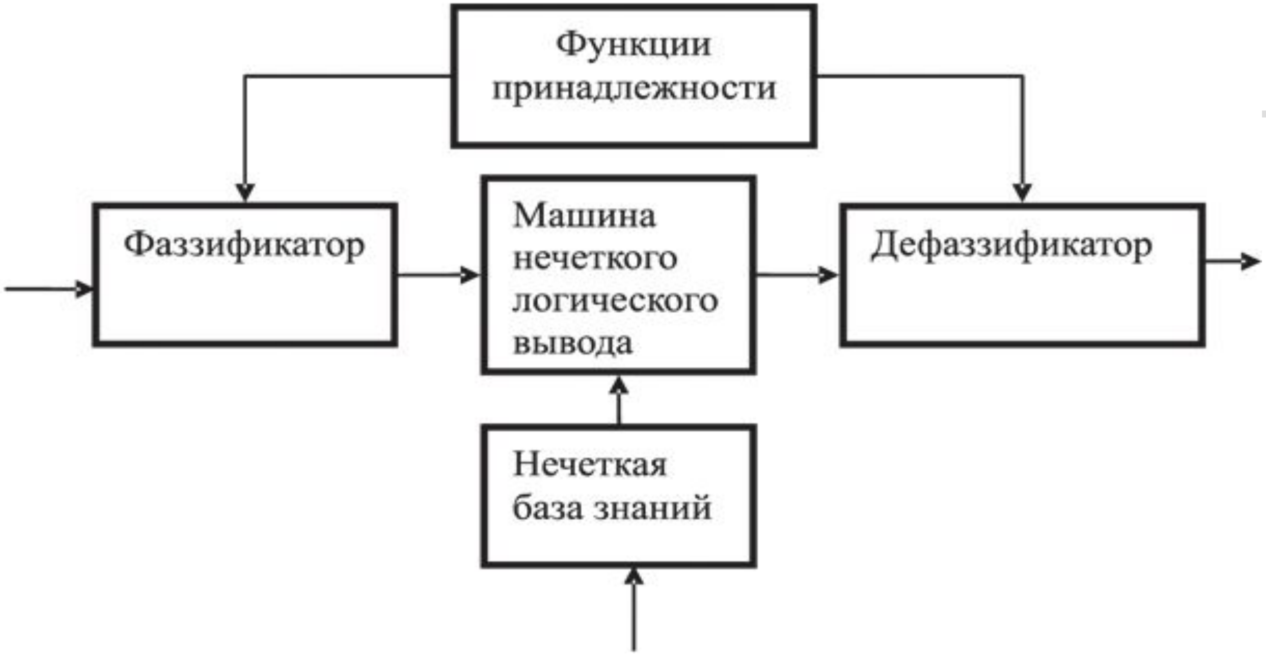
Обычно в качестве вывода используется *минимизация* или правила *продукции*. При **минимизирующем** логическом выводе выходная функция принадлежности ограничена сверху в соответствии с вычисленной степенью истинности посылки правила (нечеткое логическое И). В логическом выводе с использованием **продукции** выходная функция принадлежности масштабируется с помощью вычисленной степени истинности предпосылки правила.

Нечеткий логический вывод (Основные этапы)

3) **этап композиции (агрегации, аккумуляции)**. Все нечеткие множества, назначенные для каждого терма каждой выходной лингвистической переменной, объединяются вместе, и формируется единственное нечеткое множество — значение для каждой выводимой лингвистической переменной. Обычно используются функции **MAX** или **SUM**.

4) **этап дефаззификации (необязательный)**. Используется тогда, когда полезно преобразовать нечеткий набор значений выводимых лингвистических переменных к точным. Имеется достаточно большое количество методов перехода к точным значениям (по крайней мере, 30). Два примера общих методов — "методы полной интерпретации" и "по максимуму". В методе полной интерпретации точное значение выводимой переменной вычисляется как значение "центра тяжести" функции принадлежности для нечеткого значения. В методе максимума в качестве точного значения выводимой переменной принимается максимальное значение функции принадлежности.

Нечеткий логический вывод



- Выполнение первого этапа нечеткого вывода — фаззификации — осуществляет фаззификатор.
- За процедуру непосредственно нечеткого вывода ответственна машина нечеткого логического вывода, которая производит второй этап процесса вывода на основании задаваемой нечеткой базы знаний (набора правил), а также этап композиции.
- Дефаззификатор выполняет последний этап нечеткого вывода — дефаззификацию.

Методы дефаззификации

- В теории нечетких множеств процедура дефаззификации аналогична нахождению характеристик положения (математического ожидания, моды, медианы) случайных величин в теории вероятности.
- Простейшим способом выполнения процедуры дефаззификации является выбор четкого числа, соответствующего максимуму функции принадлежности.
- Однако пригодность этого способа распространяется лишь на одноэкстремальные функции принадлежности.
- Для многоэкстремальных функций принадлежности часто используются следующие методы дефаззификации:

Методы дефаззификации

- Для многоэкстремальных функций принадлежности часто используются следующие методы дефаззификации:
- 1) **COG** (Center Of Gravity) — "центр тяжести". Физическим аналогом этой формулы является нахождение центра тяжести плоской фигуры, ограниченной осями координат и графиком функции принадлежности нечеткого множества.
- 2) **MOM** (Mean Of Maximums) — "центр максимумов". При использовании метода центра максимумов требуется найти среднее арифметическое элементов универсального множества, имеющих максимальные степени принадлежностей.
- 3) **First Maximum** — "первый максимум" — максимум функции принадлежности с наименьшей абсциссой.

- Следует отметить также тот факт, что с помощью преобразований нечетких множеств любое правило, содержащее в левой части как конъюнкции, так и дизъюнкции, можно привести к системе правил, в левой части каждого будут либо только конъюнкции, либо только дизъюнкции. Таким образом, не уменьшая общности, можно рассматривать правила, содержащие в левой части либо только конъюнкции, либо только дизъюнкции.
- Каждое из правил представляет из себя нечеткую импликацию. Степень уверенности посылки мы вычислили, а степень уверенности заключения задается функцией принадлежности соответствующего терма. Поэтому, используя один из способов построения нечеткой импликации, мы получим новую нечеткую переменную, соответствующую степени уверенности в значении выходных данных при применении к заданным входным соответствующего правила.

Пример нечеткого вывода

- Рассмотрим модуль нечеткого управления с базой правил

R1: Если (x_1есть A_1^1 и x_2 есть A_2^1) то (y есть B^1)

R2: Если (x_1есть A_1^2 и x_2 есть A_2^2) то (y есть B^2)

- Пусть входные переменные приняли некоторые конкретные значения $\widetilde{x_1}$ и $\widetilde{x_2}$
- На этапе 1 на основании данных значений и, исходя из функций принадлежности A_1^1 ,A_2^1 и A_1^2, A_2^2 находятся степени истинности для предпоссылок каждого правила .
- В качестве нечеткой импликации $\mu_{R^{(k)}}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, y\right) = \mu_{A_1^k \times A_2^k \to B^k}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, y\right)$ можно применить любое из правил. При использовании правила типа minimum получаем

$$\mu_{A_1^k \times A_2^k \to B^k}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, y\right) = \min\left[\mu_{A_1^k \times A_2^k}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2\right), \mu_{B^k}(y)\right]$$

где

$$\mu_{A_1^k \times A_2^k}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2\right) = \min\left[\mu_{A_1^k}\left(\bar{x}_1\right), \mu_{A_2^k}\left(\bar{x}_2\right)\right]$$

Пример нечеткого вывода

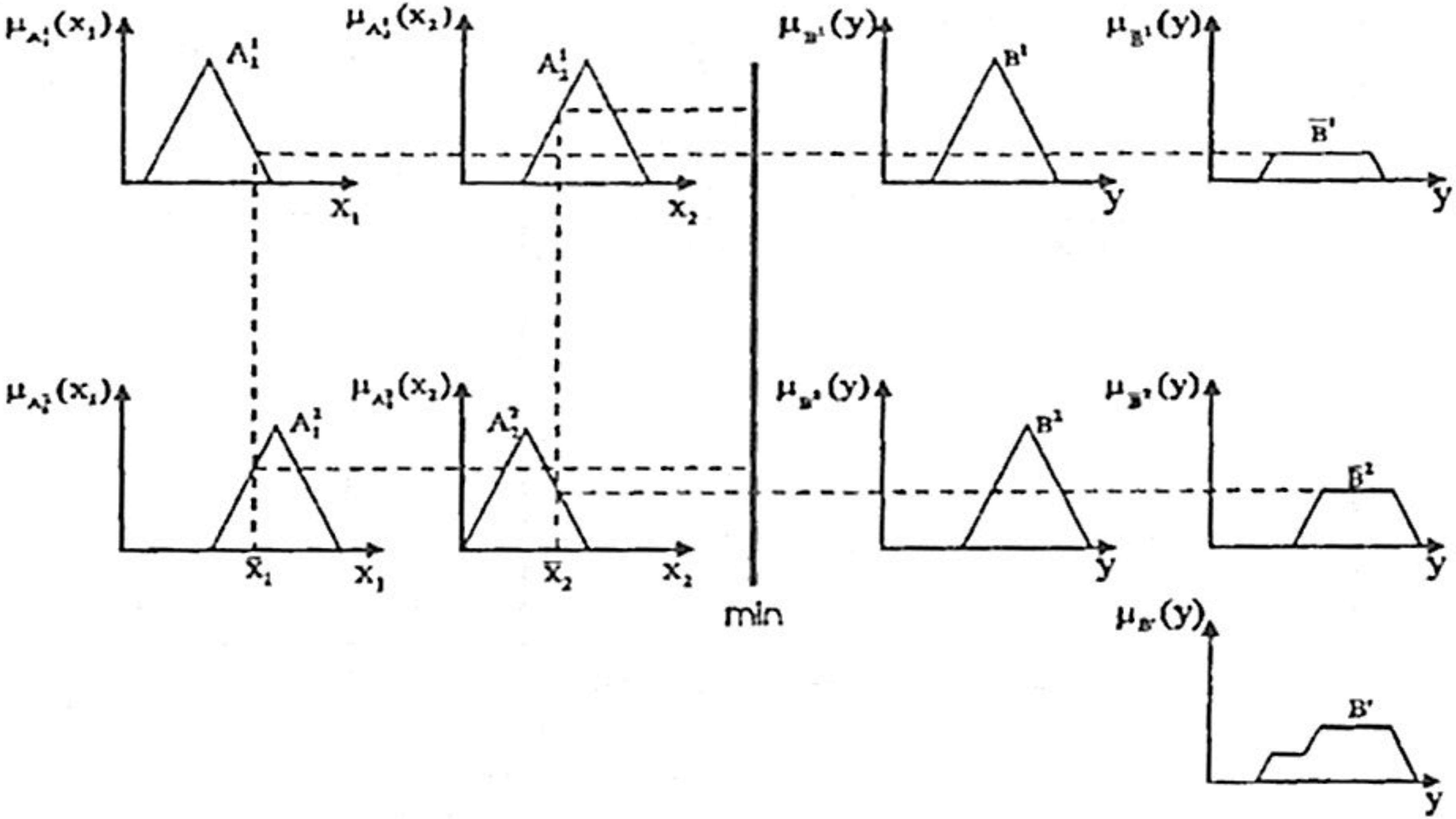
- В результате на этапе2 происходит «отсекание» функций принадлежности заключений правил B^1 и B^2 на найденных уровнях.
- На этапе 3 рассматриваются усеченные на втором этапе функции принадлежности и производится их объединение с использованием операции *max,* в результате чего получается комбинированное нечеткое подмножество, описываемое функцией принадлежности

$$\mu_{B'}(y) = \max_{k=1,2}\left\{\min\left[\mu_{A_1^k}\left(\bar{x}_1\right), \mu_{A_2^k}\left(\bar{x}_2\right), \mu_{B^k}(y)\right]\right\}$$

и соответствующее логическому выводу для *y*.

- На этапе 4 (при необходимости) находится четкое значение выходной переменной.

Пример нечеткого вывода (min)



Пример нечеткого вывода

- В этом примере мы повторим рассуждения, проведенные в предыдущем примере, однако вместо нечеткой импликации *min* применим правило типа «произведение», т.е.

$$\mu_{A_1^k \times A_2^k \to B^k}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, y\right) = \mu_{A_1^k \times A_2^k}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2\right) \cdot \mu_{B^k}(y)$$

- В результате использования правил (1) и (2) получаем нечеткое множество B' с функцией принадлежности

$$\mu_{B'}(y) = \max_{k=1,2}\left\{\mu_{B^k}(y) \min\left[\mu_{A_1^k}\left(\bar{x}_1\right), \mu_{A_2^k}\left(\bar{x}_2\right)\right]\right\}$$

Пример нечеткого вывода (prod)