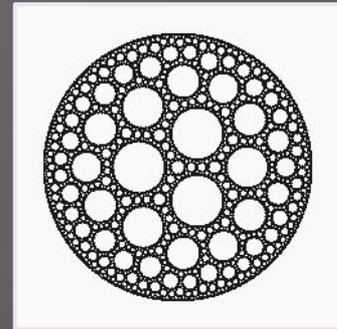


НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ



Неопределенный интеграл

- Определение
- Свойства неопределенного интеграла
- Таблица основных интегралов
- Методы интегрирования
 - Табличное интегрирование. Метод разложения.
 - Метод замены переменной
 - Примеры использования метода замены переменной
 - Интегрирование по частям
 - Примеры использования метода интегрирования по частям

Определение

Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* для функции $f(x)$ на интервале (a,b) , если $F(x)$ дифференцируема на (a,b) и $F'(x) = f(x)$.

Теорема 1 Если функция непрерывна на каком-нибудь промежутке, то она имеет на нем первообразную.

Теорема 2 Если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ на (a,b) , то $F(x) + C$ - также первообразная, где C - любое число.

Теорема 3 Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные для функции $f(x)$ на (a, b) , то они на этом промежутке отличаются на постоянную, т.е. $F_1(x) - F_2(x) = C$.

Совокупность всех первообразных F для функции f называется *неопределенным интегралом* от f

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Пример

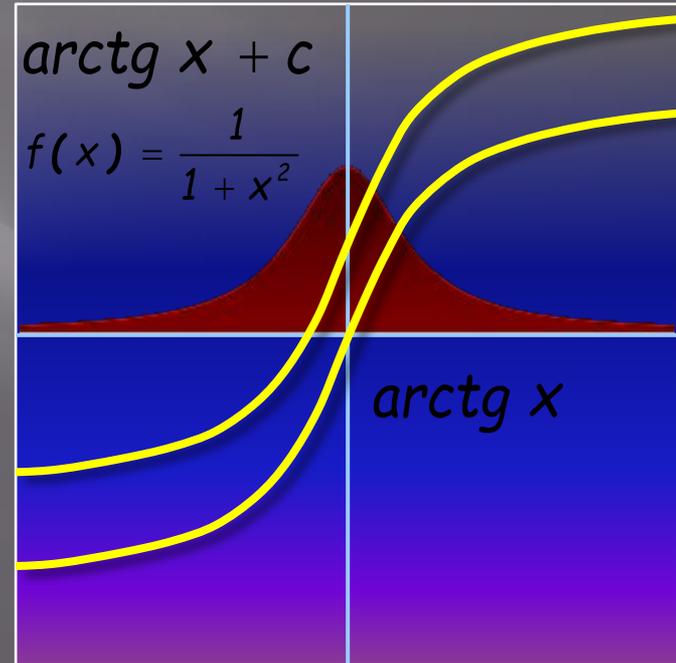
$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \frac{d(-\cos x + c)}{dx} = \sin x$$

Интегральная кривая

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$$

Интегральные кривые



Свойства неопределенного интеграла

- $(\int f(x)dx)' = f(x)$

- $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$

- $d(\int f(x)dx) = dF(x) =$
 $= F'(x)dx = f(x)dx$

- $\int df(x) = f(x) + C$

- $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

- $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

Таблица основных интегралов

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + c$$

Методы интегрирования

Табличное интегрирование – использование табличных интегралов

$$\int \frac{dx}{\sqrt[12]{x^7}} = \int x^{-\frac{7}{12}} dx = \frac{12}{5} x^{\frac{5}{12}} + c$$

Метод разложения – тождественные преобразования подынтегральной функции, её разложение и преобразования для получения табличных интегралов

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2 x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \\ &= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + c \end{aligned}$$

Метод замены переменной

● Метод замены переменной

Теорема Если функция $y = f(x)$ непрерывна на множестве X , а функция $x = \phi(t)$ непрерывна и дифференцируема на соответствующем множестве T и имеет на нем обратную функцию $t = \Phi(x)$, то

$$\int f(x) dx = \int f(\phi(t)) \phi'(t) dt$$

$$\int f(x) dx = \int f(\phi(t)) \phi'(t) dt =$$

$$= \int f(\phi(t)) d\phi(t) = F(\phi(t)) + c = F(x) + c$$

$$\int 2x(x^2 - 1)^4 dx \Rightarrow x^2 - 1 = t, 2x dx = dt \Rightarrow$$

$$\int (x^2 - 1)^4 (2x dx) = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} = \frac{(x^2 - 1)^5}{5} + c$$

Метод замены переменной

@

Интегрирование по частям

Метод интегрирования по частям

Используется известное выражение для дифференциала произведения двух функций

$$d(U(x)V(x)) = dU(x)V(x) + U(x)dV(x)$$

$$\int d(U(x)V(x)) = \int V(x)dU(x) + \int U(x)dV(x)$$

Получаем формулу интегрирования по частям

$$\int U dV = UV - \int V dU$$

- $\int x e^x dx = \left\langle U = x \Rightarrow dU = dx, dV = e^x dx \Rightarrow V = \int e^x dx = e^x \right\rangle =$
 $= x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x = e^x (x - 1) + c$

Интегрирование по частям

@

