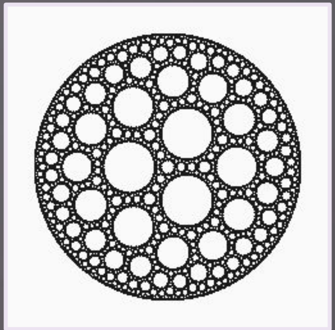
# НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ



# Неопределенный интеграл

- Определение
- Свойства неопределенного интеграла
- Таблица основных интегралов
- Методы интегрирования
    - Табличное интегрирование. Метод разложения.
    - Метод замены переменной
    - Примеры использования метода замены переменной
    - Интегрирование по частям
    - Примеры использования метода интегрирования по частям

# Определение

Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* для функции $f(x)$ на интервале $(a,b)$, если $F(x)$ дифференцируема на $(a,b)$ и $F'(x) = f(x)$ .

Теорема 1 *Если функция непрерывна на каком-нибудь промежутке, то она имеет на нем первообразную.*

Теорема 2 *Если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ на $(a,b)$, то $F(x) + C$ - также первообразная, где $C$ - любое число.*

Теорема 3 *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные для функции $f(x)$ на $(a, b)$, то они на этом промежутке отличаются на постоянную, т.е.* $F_1(x) - F_2(x) = C$ .

Совокупность всех первообразных $F$ для функции $f$ называется ***неопределенным интегралом*** от $f$

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

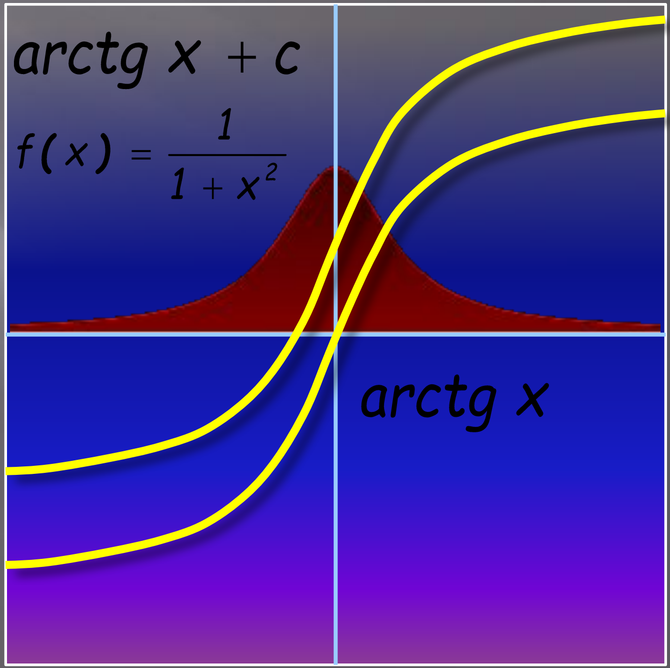
Пример

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \frac{d(-\cos x + c)}{dx} = \sin x$$

# Интегральная кривая

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctg\ x + c$$




Интегральные кривые

# Свойства неопределенного интеграла

- $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
- $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
- $d\left(\int f(x)dx\right) = dF(x) =$
  $= F'(x)dx = f(x)dx$
- $\int df(x) = f(x) + C$
- $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

# Таблица основных интегралов

- $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c,\ a \neq -1$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

$\int e^x dx = e^x + c$

- $\int \cos x dx = \sin x + c$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$
- $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c$
- $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + c$

# Методы интегрирования

- Табличное интегрирование – использование табличных интегралов

$$\int \frac{dx}{\sqrt[12]{x^7}} = \int x^{-\frac{7}{12}} dx = \frac{12}{5} x^{\frac{5}{12}} + c$$

- Метод разложения – тождественные преобразования подынтегральной функции, её разложение и преобразования для получения табличных интегралов

$$\int tg^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx =$$
$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tgx - x + c$$

# Метод замены переменной

- Метод замены переменной

Теорема  Если функция $y = f(x)$ непрерывна на множестве $X$ , а функция $x = \phi(t)$ непрерывна и дифференцируема на соответствующем множестве $T$ и имеет на нем обратную функцию $t = \Phi(x)$ , то

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

- $$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt =$$

$$= \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + c = F(x) + c$$

- $$\int 2x(x^2 - 1)^4 dx \Rightarrow x^2 - 1 = t,\ 2xdx = dt \Rightarrow$$

$$\int (x^2 - 1)^4 (2xdx) = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} = \frac{(x^2 - 1)^5}{5} + c$$

# Метод замены переменной

@

# Интегрирование по частям

Метод интегрирования по частям

Используется известное выражение для дифференциала произведения двух функций

$$d(U(x)V(x)) = dU(x)V(x) + U(x)dV(x)$$

$$\int d(U(x)V(x)) = \int V(x)dU(x) + \int U(x)dV(x)$$

Получаем формулу интегрирования по частям

$$\int UdV = UV - \int VdU$$

- $$\int xe^x dx = \left\langle U = x \Rightarrow dU = dx,\ dV = e^x dx \Rightarrow V = \int e^x dx = e^x \right\rangle =$$
$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x-1) + c$$

# Интегрирование по частям

@