НЕПРЕРЫВНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

Определение случайной величины

Случайная величина — это величина, которая принимает в результате опыта одно из множества значений, причём появление того или иного значения этой величины до её измерения нельзя точно предсказать.

Непрерывная случайная величина

Непрерывной случайной величиной называется такая величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Для задания случайной величины недостаточно просто указать ее значение, необходимо также указать вероятность этого значения.

Плотность вероятности

Плотность вероятности непрерывной случайной величины, она же дифференциальная функция распределения вероятностей - аналог закона распределения дискретной случайной величины.

Плотность вероятностей графически представляет собой непрерывную гладкую линию (или кусочно-гладкую, если на разных отрезках задаётся разными функциями).

Для непрерывных случайных величин можно найти только вероятность попадания в какой-либо интервал. Считается, что для каждого отдельного (одиночного) значения непрерывной случайной величины вероятность равна нулю. И графически вероятность попадания в интервал выражается площадью фигуры, ограниченной сверху графиком плотности вероятности, снизу осью ОХ, с боков - рассматриваемым интервалом.

Свойства плотности вероятности

1. Значения функции неотрицательны, т.е. $f(x) \geq 0$
2. Основное свойство плотности вероятности: несобственный интеграл от плотности вероятности в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице (геометрически это выражается тем, что площадь фигуры, ограниченной сверху графиком плотности вероятности, снизу - осью ОХ, равна 1).

Математическое ожидание

Для непрерывной случайной величины, заданной функцией плотности вероятности $f(x)$, математическое ожидание определяется в виде интеграла

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx \ ,$$

при условии, что этот интеграл существует (если интеграл расходится, то говорят, что математическое ожидание не существует).

Пример

Определим математическое ожидание случайной величины распределённой по закону Пуассона. По определению

$$M(x)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot p(k)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^{k}}{k!}\cdot e^{-\lambda}=\lambda\cdot e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

или обозначим $k-1=\mu$,

$$M(x)=\lambda\cdot e^{-\lambda}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\lambda^{\mu}}{\mu!}=\lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda$$

Значит, параметр, определяющий закон распределения пуассоновской случайной величины равен среднему значению этой величины.

Дисперсия и среднеквадратичное отклонение

Названные числовые характеристики дают представление о разбросе случайных величин относительно их среднего значения.

Дисперсия

Дисперсией (рассеянием) случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D\left(x\right)=M\left[x-M\left(x\right)\right]^2$$

Свойство 1. Дисперсия постоянной равна нулю.

По определению:

$$D\left(C\right)=M\left[C-M\left(C\right)\right]^2=M\left[\left(C-C^2\right)\right]=M\left(0\right)=0$$

Свойство 2. Постоянную можно выносить за знак дисперсии с возведением в квадрат.

$$D\left(Cx\right)=M\left[Cx-M\left(Cx\right)\right]^2=C^2D\left(x\right)$$

Среднеквадратичное отклонение

Среднеквадратичным отклонением называют величину, равную корню квадратному из дисперсии.

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$$

Среднеквадратичное отклонение имеет ту же размерность, что и сама случайная величина.

Равномерное распределение

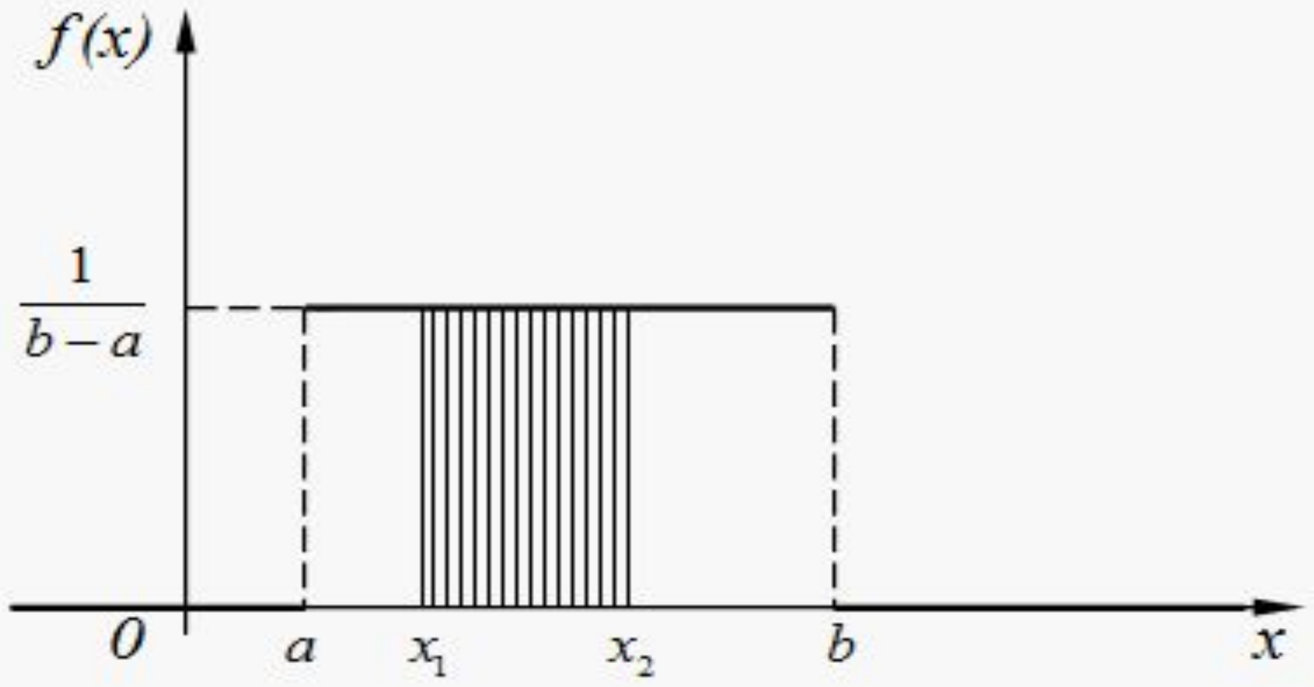
Непрерывная величина *X* *распределена равномерно* на интервале (*a*, *b*), если все ее возможные значения находятся на этом интервале и плотность распределения вероятностей постоянна:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, \; при \;\; x \in (a,b) \\ \quad 0 \quad , при \;\; x \notin (a,b) \end{cases}$$

Для случайной величины *X* , равномерно распределенной в интервале (*a*, *b*) (рис. 4), вероятность попадания в любой интервал (x1, x2), лежащий внутри интервала (*a*, *b*), равна:

$$P\{x_1 < X < x_2\} = \frac{x_2 - x_1}{b-a}$$

График плотности равномерного распределения

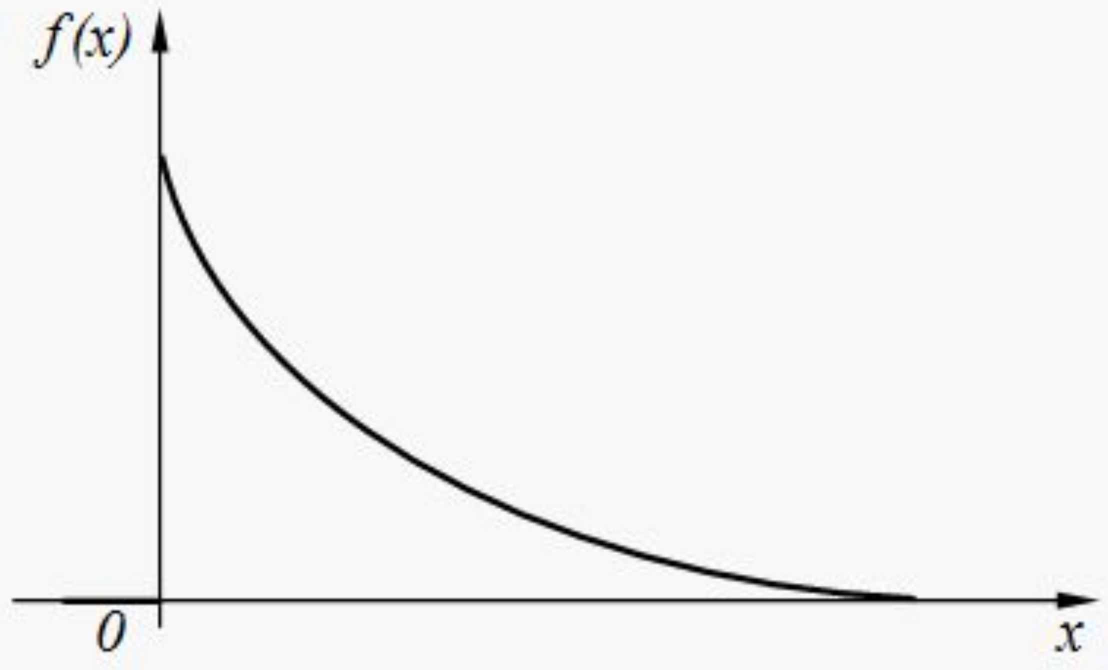


Показательное распределение

Непрерывная случайная величина *X* имеет *показательное распределение*, если плотность распределения ее вероятностей выражается формулой:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\cdot e^{-\lambda x}, \text{ при } x>0\\ 0 \quad , \text{ при } x\le 0\end{cases}$$

График плотности распределения вероятностей



Нормальное (гауссово) распределение

Случайная величина имеет *нормальное (гауссово) распределение*, если плотность распределения ее вероятностей определяется зависимостью:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

$$m = M(x) \qquad \sigma(x) = \sqrt{D(x)}$$

где $m = 0,\ \sigma \neq 1$

При нормальное распределение называется *стандартным*.

График плотности нормального распределения