Непрерывная случайная величина (НСВ)

Определение. Непрерывной СВ называется такая СВ, которая в результате испытаний может принимать любые значения из конечного или бесконечного интервала.

Так как любой интервал содержит бесконечное множество точек, то НСВ принимает бесконечное несчетное множество значений. Поэтому перечислить все значения НСВ невозможно.

Способы задания НСВ

НСВ задается двумя способами:

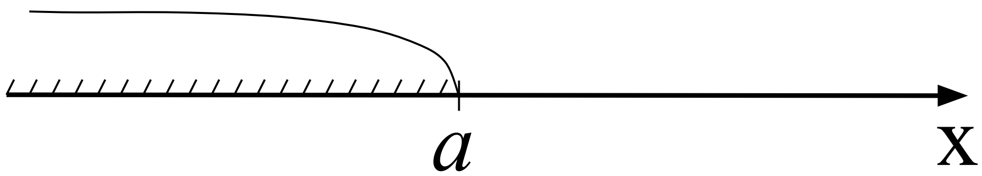
1. С помощью интегральной функции распределения (или функции распределения) **F(x)**.

2. С помощью дифференциальной функции распределения (или **плотности** распределения) **f(x)**.

Определение. Функцией распределения СВ X называется такая функция **F(x)**, которая для любого числа x определяет вероятность того, что СВ X примет значения **X < x**:

$$\boxed{\mathbf{F(x) = P(X < x).}}$$

Например, при $x = a$ $\qquad F(a) = P(X < a)$



Свойства функции распределения F(x)

1. $0 \le F(x) \le 1$, $\qquad$ т. к. $\quad 0 \le P \le 1$.

2. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

3. Следствие из 2-го свойства:

$$P(X = x_0) = 0, \text{ отсюда,}$$

$$P(X = a) = P(X = b) = 0.$$

Поэтому,

$$P(a \le X < b) = P(a \le X \le b) =$$
$$= P(a < X \le b) = P(a < X < b).$$

4. **F(x)** – неубывающая функция, т.е.

при $x_2 > x_1$ $\quad F(x_2) \ge F(x_1)$

5. Если СВ X задана на всей числовой прямой,

то $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0,\qquad \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1.$

6. F(x) – непрерывно дифференцируемая функция.

Пример 1. Функция распределения СВ X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 2, \\ a(x-2)^2 & \text{при } 2 < x \le 4, \\ 1 & \text{при } x \ge 4. \end{cases}$$

Найти:

a) значение параметра а;

b) $P(2 \le X \le 3)$.

Решение. По определению непрерывной функции:

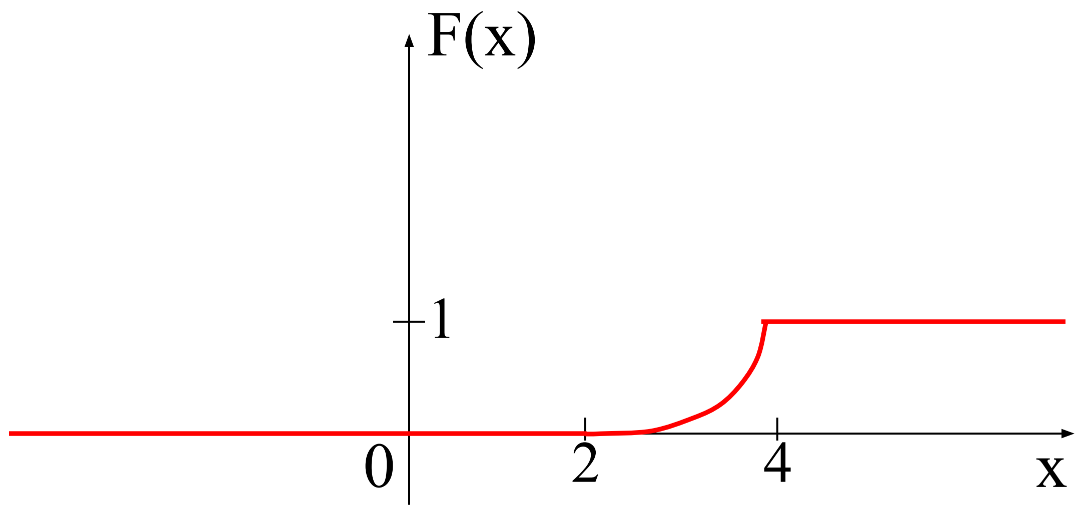
$$\lim_{x \to 2-0} F(x) = \lim_{x \to 2+0} F(x) = F(2) = 0$$

$$\lim_{x \to 4-0} F(x) = \lim_{x \to 4+0} F(x) = F(4) = 1$$

$$F(4) = a(4-2)^2 = 1, \text{ отсюда } a = \frac{1}{4}$$

$$P(2 \le X \le 3) = F(3) - F(2) =$$

$$= \frac{1}{4}(3-2)^2 - \frac{1}{4} * 0 = \frac{1}{4} .$$



Замечание. Графиком функции распределения ДСВ X является разрывная ступенчатая (кусочно- постоянная) линия. При каждом новом значении СВ X функция F(x) испытывает скачок на величину, равную вероятности p_i этого значения x_i. Сумма величин всех скачков функции F(x) равна 1.

Дифференциальная функция распределения НСВ(плотность распределения вероятностей) f(x)

Пусть НСВ X принимает значения из элементарного отрезка $\left[x, x+\Delta x\right]$, а функция ее распределения F(x) непрерывно дифференцируема.

Тогда

$$P(x \leq X \leq x+\Delta x) = F(x+\Delta x) - F(x)$$

Поделим на Δx:

$$\frac{P(x \leq X \leq x+\Delta x)}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$.

Определение. Предел отношения вероятности попадания НСВ X в элементарный промежуток $\left[x, x+\Delta x\right]$ к длине этого промежутка Δx при $\Delta x \to 0$ называется **плотностью распределения вероятностей** НСВ X и обозначается **f(x)**:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X \le x + \Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

Отсюда следует, что $\boxed{\mathbf{F'(x) = f(x)}.}$

В свою очередь, F(x) – первообразная к f(x). Геометрически $P(x \le X \le x + \Delta x)$ есть площадь криволинейной трапеции, ограниченной дугой f(x), отрезком $[x, x + \Delta x]$, вертикальными прямыми, проходящими через концы этого отрезка, и осью Ox.

Свойства плотности распределения f(x)

1. $f(x) \ge 0$, т.к. F(x) – неубывающая, то $F'(x) \ge 0$.

2. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$

3. $P(a \le X \le b) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$ **4.** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

Числовые характеристики НСВ

К ним относятся **M(X), D(X), σ(X).**

Математическое ожидание:

$$\boxed{\mathbf{M(X) = \int_a^b xf(x)dx.}}$$

Дисперсия:

$$\boxed{\mathbf{D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - (M(X))^2.}}$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{(X) =} \sqrt{D(X)}}$$

Пример 2. Плотность распределения вероятностей СВ X:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ a(4x - x^3) & \text{при } 0 < x \le 2, \\ 0 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Определить: 1) коэффициент a;

2) функцию распределения СВ X;

3) матем. ожидание и дисперсию;

4) вероятность попадания СВ X в интервал (0; 1).

Решение. 1) По свойству плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Найдем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} a(4x - x^3)dx + \int_{2}^{+\infty} 0dx =$$

$$= 0 + a(2x^2 - \frac{x^4}{4})\Big|_0^2 + 0 = a(8 - 4) = 1.$$

Отсюда $4a = 1$ или $a = \frac{1}{4} = 0{,}25.$

2) Функция распределения:

$$\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

При $x \le 0$ $\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0.$

при $0 < x \le 2$ $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{x} \frac{1}{4}\left(4x - x^3\right)dx =$

$$= 0 + \frac{1}{4}\left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\right);$$

при $x > 2$ $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{2} \frac{1}{4}\left(4x - x^3\right)dx + \int\limits_{2}^{\infty} 0dx =$

$$= \frac{1}{4}\left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = 0{,}25\cdot(2\cdot 22 - 24:4) = 0{,}25\cdot 4 = 1.$$

Тогда интегральная функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{1}{4}\left(2x^2 - \dfrac{x^4}{4}\right) & \text{при } 0 < x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

3) Найдем M(X) и D(X):

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{4}x(4x - x^3)dx + \int_{2}^{\infty} 0dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{4}\left(\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 + 0 = \frac{1}{4}\left(\frac{4*8}{3} - \frac{32}{5}\right) = \frac{16}{15} .$$

$$\mathrm{D(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \left(M(x)\right)^2 = \int_0^2 x^2 \frac{1}{4} * (4x - x^3)dx - \left(\frac{16}{15}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x^4 - \frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 - \frac{256}{225} = \frac{1}{4}\left(16 - \frac{64}{6}\right) - \frac{256}{225} = \frac{44}{225}.$$

$$\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{44}{225}} = \frac{2\sqrt{11}}{15} = 0{,}4422.$$

4) Вероятность попадания СВ X в интервал (0;1):

$$P(0 < X < 1) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{4}(4x - x^3)dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}.$$

Пример 3. Стрелок должен произвести 3 выстрела. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Определить интегральную функцию распределения дискретной СВ X – числа попаданий и построить ее график.

Дано:
$n = 3$,
$p = 0{,}7$,
$q = 0{,}3$

$F(x) = ?$

$P(X = 0) = P_{3,0} = C_3^0 \cdot 0{,}7^0 \cdot 0{,}3^3 = 0{,}027;$

$P(X = 1) = P_{3,1} = C_3^1 \cdot 0{,}7^1 \cdot 0{,}3^2 = 0{,}189;$

$P(X = 2) = P_{3,2} = C_3^2 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^1 = 0{,}441;$

$P(X = 3) = P_{3,3} = C_3^3 \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^0 = 0{,}343;$

$$\sum_{i=0}^{3} P_i = 0{,}027 + 0{,}189 + 0{,}441 + 0{,}343 = 1.$$

X	0	1	2	3
P	0,027	0,189	0,441	0,343

Найдем интегральную функцию распределения $F(x)$ ДСВ X.

При $x \le 0$ $\quad F(x) = P(X < x) = 0;$

при $0 < x \le 1$ $\quad F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = 0{,}027;$

при $1 < x \le 2$ $\quad F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) =$

$= 0{,}027 + 0{,}189 = 0{,}216;$

при $2 < x \le 3$ $\quad F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) +$

$+ P(X = 2) = 0{,}216 + 0{,}441 = 0{,}657;$

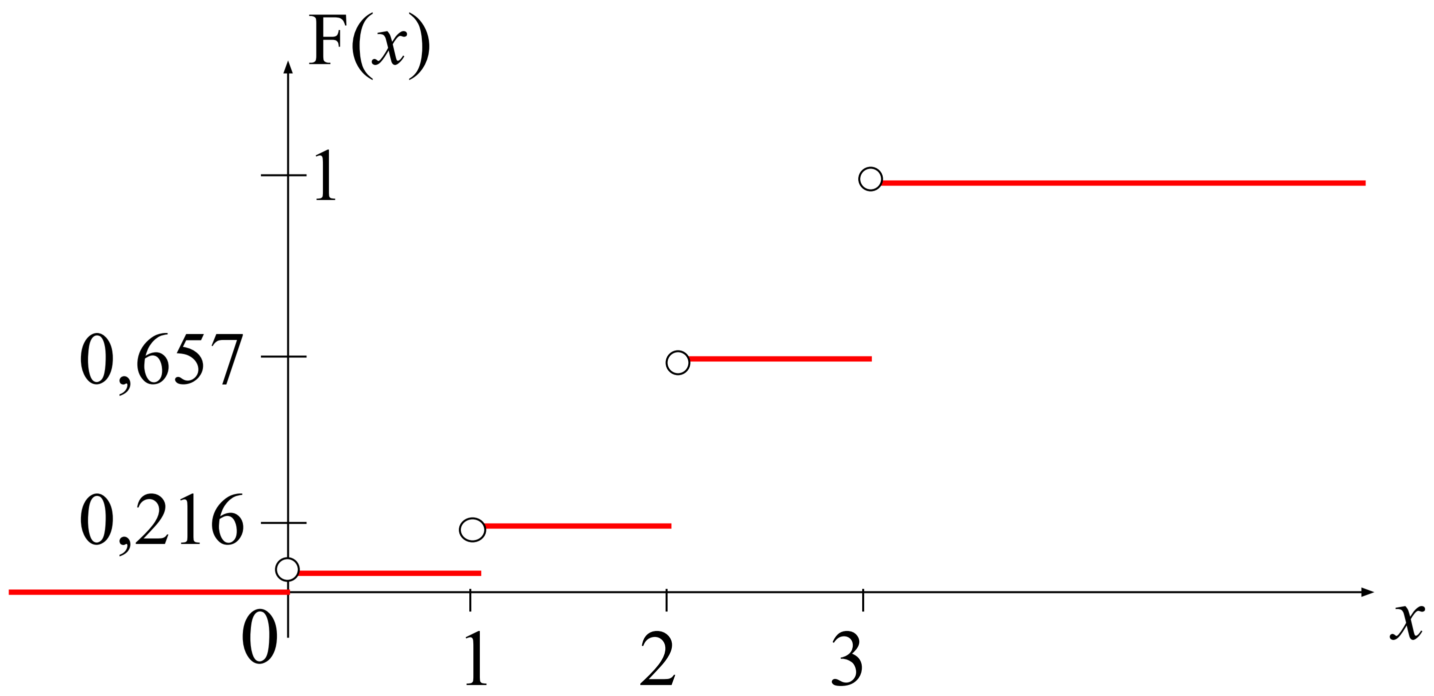
при $x > 3$ $\quad F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=$

$$= 0{,}657 + 0{,}343 = 1.$$

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ 0{,}027 & \text{при } 0< x \le 1; \\ 0{,}216 & \text{при } 1< x \le 2; \\ 0{,}657 & \text{при } 2< x \le 3; \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Построим график интегральной функции распределения F(x). Графиком является разрывная ступенчатая (кусочно-постоянная) линия.



F(x)
1
0,657
0,216
0
1
2
3
x