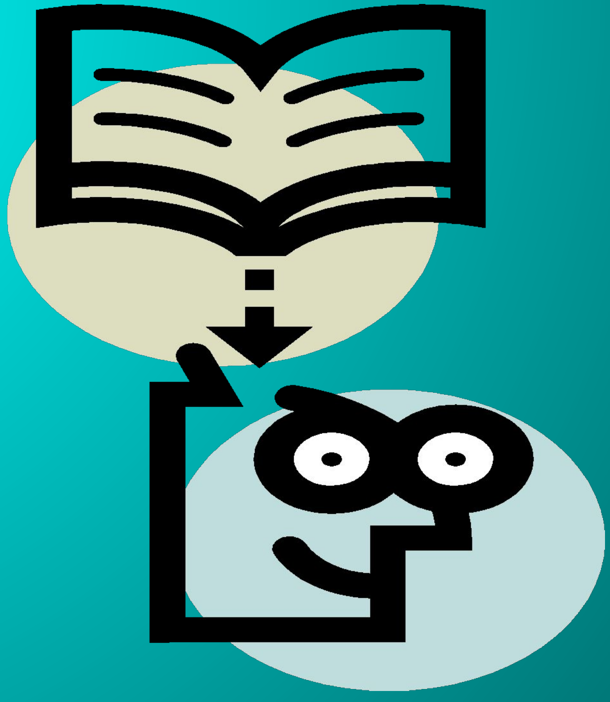
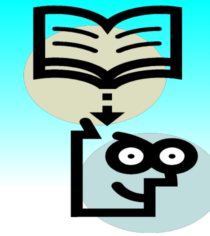
Неравенства
и их свойства



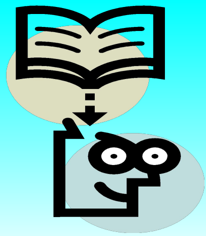
Автор Календарева Н.Е.

План



1. Определение числового неравенства
2. Свойства числового неравенства
3. Определение неравенства с одной переменной
4. Область определения неравенства с одной переменной
5. Решение неравенства
6. Равносильные неравенства
7. Иррациональные неравенства
8. Часто используемые неравенства
9. Неравенства с модулем
10. Методы доказательств неравенств

Числовое неравенство



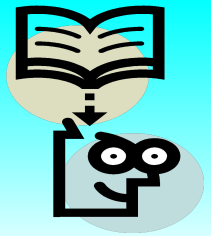
Числовым неравенством называется запись вида

$$a > b \quad (\, a < b \,),$$

где a, b – числа.

При этом $a > b$ считается *истинным* тогда и только тогда, когда разность $a - b$ есть положительное число

($a < b \Leftrightarrow$ если разность $a - b$ есть отрицательное число).



Допускаются знаки ≥ и ≤ .

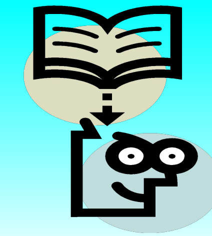
$$(a \geq b) \Leftrightarrow (a > b) \text{ или } (a = b)$$

$$(a \leq b) \Leftrightarrow (a < b) \text{ или } (a = b)$$

Запись $a > 0$ говорит о том, что число a *положительное*.

Запись $a \geq 0$ говорит о том, что число a *неотрицательное*.

Свойства



1. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.
2. Если $a > b$, то для любого числа *c* $a + c > b + c$.
3. Если $a + b > c$, то $a > c – b$.
4. Если $a > b$ и $c > d$ => $a + c > b + d$

***Следствие*.** Если $a > b$, $c > d$ =>

$$a – d > b – c.$$

5. Если a > b, c > 0 => ac > bc,

Если a > b, c < 0 => ac < bc.

6. Если a > b > 0 и c > d > 0 => ac > bd.

7. Если a ≥ b > 0 и c > d > 0 => $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

***Следствие*.** Если a = b = 1, то при c > d > 0 получим $\frac{1}{c} < \frac{1}{d}$. .

Запишем это важное следствие таким образом.

$$\boxed{\text{Если } a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}.}$$

8. Если $a > b \geq 0 \Rightarrow a^n > b^n$, $n \in N$.

Следствие. Если $n = 2$, то из

$$\boxed{a > b \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 > b^2.}$$

9. Если $a > b \Rightarrow a^{2n+1} > b^{2n+1}$, $n \in N$.

Следствие. Если $n = 1$, то из

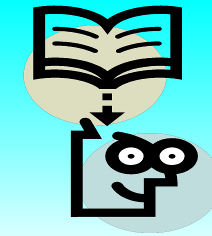
$$\boxed{a > b \quad \Rightarrow \quad a^3 > b^3.}$$

10. Если a > b ≥ 0 => $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}, n \in N.$

11. a > b => $\sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b}, n \in N.$

Следствие. Неравенство $a^2 > b^2$ имеет место в том и только в том случае, если $|a| > |b|$.

Неравенство с одной переменной

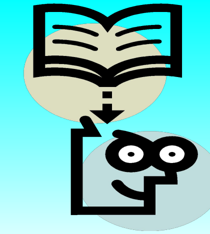


Пусть даны две функции $f(x)$ и $g(x)$, где x – переменная, с областями определения $D_1(f)$ и $D_2(g)$ соответственно. Запись вида

$$\mathbf{f(x) > g(x) \quad (f(x) < g(x))}$$

называется ***неравенством с одной переменной***, если поставлена задача:

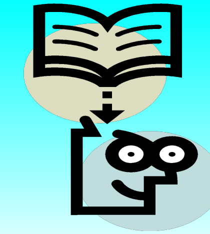
найти все те значения x, при которых выражение f(x) > g(x) истинно.



$$f(x) > g(x) \quad (f(x) < g(x))$$

Вместо знака «больше» («меньше») может быть использован знак ≥ (больше либо равно) или знак ≤ (меньше либо равно), или знак ≠.

Область определения неравенства



Областью определения неравенства (ОДЗ)

$$f(x) > g(x)$$

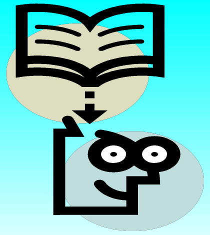
называется пересечение областей определения функций, входящих в левую и правую части неравенства.

Например, $\sqrt{x^2-1} \le \frac{1}{x+2}$,

ОДЗ: $x^2 - 1 \ge 0;$

$x + 2 \ne 0.$

Пример на нахождение области определения



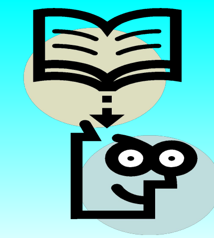
$$x^2 < \sqrt{x-1}$$

В этом примере $D(x^2) = R$; а область определения правой части = $[1; +\infty)$.

Их пересечение есть промежуток $[1; +\infty)$.

Обозначим область определения неравенства ОДЗ (область допустимых значений).

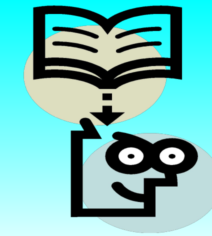
Решение неравенства



Пусть x_0 – какое–либо число из области определения неравенства. Неравенство $f(x) > g(x)$ называется *истинным* при $x = x_0$, если при подстановке числа x_0 вместо x данное неравенство обращается в верное числовое неравенство. В этом случае говорят, что число x_0 является ***решением неравенства***.

Пусть множество *М* – какое-нибудь подмножество ОДЗ (*М* может совпадать с ОДЗ или быть пустым). Неравенство $f(x) > g(x)$ называется *истинным на множестве М*, если оно истинно для любого числа *х* из множества *М*. В этом случае говорят, что множество М является ***решением неравенства***.

Что значит «решить неравенство»



Решить неравенство $f(x) > g(x)$ –

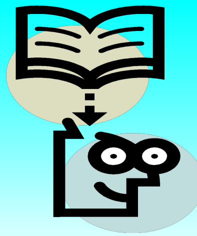
это значит, найти все его решения, или же доказать, что решений нет.

В последнем случае говорят, что неравенство имеет пустое множество решений.

Чаще всего *решения неравенства* – это один промежуток или объединение нескольких числовых множеств.

Но может оказаться, что решением неравенства является одно число, а не промежуток, или несколько чисел.

Также решением неравенства может быть пустое множество.



Примеры

Преобразования неравенства с одной переменной происходят по тем же правилам, что и для числового неравенства.

1) $x^2 \leq 0$.

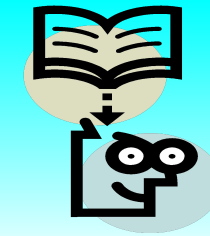
Решение. $x^2 < 0$ или $x^2 = 0$.

Ответ: $x \in \{0\}$.

2) $x^2 > 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Примеры



3) $\sqrt{x-1} < 0$.

Ответ: $x \in \varnothing$.

4) $\sqrt{x^2 - 1} \geq 0;$

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

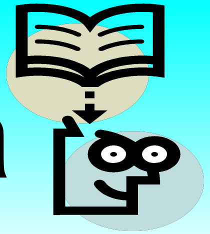
5) $\sqrt{x^2} > 0;$

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

6) $\sqrt{x+1} > \sqrt{x-1};$

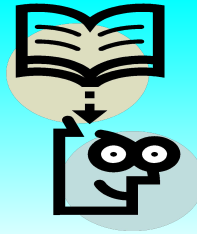
Ответ: $x \in [1; +\infty)$.

Равносильные неравенства



Два неравенства называются *равносильными*, если каждое решение первого неравенства является решением второго, и обратно, каждое решение второго неравенства является решением первого, или же оба неравенства не имеют решений (пустое множество решений).

Пример



Равносильны или нет следующие два неравенства:

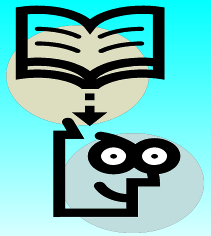
$x^2 - 1 \geq 0$ и $\sqrt{(x-1)^2} \geq x - 1$

Решение первого: Решение второго:

$(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. $\boldsymbol{R}$

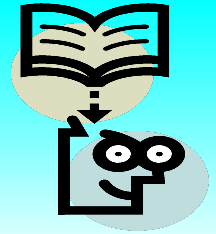
Ответ: не равносильны

Методы решения



Методы решения зависят от вида неравенства и изучаются по мере изучения соответствующих функций. Можно отметить такие неравенства: рациональные, иррациональные, тригонометрические, показательные, логарифмические, неравенства с параметром, комбинированные и др.

С чего начать решение?



Начинать решение следует с ОДЗ.

ОДЗ выписывается точно так же, как для уравнений. В ОДЗ может быть система рациональных неравенств. Рациональные неравенства решаются методом интервалов.

Если есть система неравенств, то вспомним, как решается система неравенств.

Система неравенств

Чтобы решить систему неравенств, надо решить каждое рациональное неравенство отдельно и пересечь найденные решения.

При решении иррациональных неравенств также будут получаться системы рациональных неравенств. Найдя множества их решений, надо не забыть пересечь их с ОДЗ.

Иррациональные неравенства

Простейшее иррациональное неравенство имеет вид

$$\sqrt{f(x)} \le g(x)$$

или $\sqrt{f(x)} < g(x)$

Если знак в другую сторону, то метод решения будет другой.

Его рассмотрим далее через четыре слайда.

$$\sqrt{f(x)} \le g(x)$$

ОДЗ: $f(x) \ge 0$.

Решение.

По определению арифметического квадратного корня из выражения, содержащего x, левая часть неравенства неотрицательна, т.е.

$$0 \le \sqrt{f(x)}$$

По свойству 1 неравенств (транзитив-ность) правая часть неравенства также будет неотрицательна.

$$\sqrt{f(x)} \le g(x)$$

И можно будет возвести обе части неравенства в квадрат. Тогда напишем систему.

На ОДЗ неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} g(x) \ge 0; \\ f(x) \le g^2(x). \end{cases}$$

Получили систему рациональных неравенств. Решаем и пересекаем с ОДЗ. Выписываем слово «Ответ» и сам ответ.

Для пересечения удобно нарисовать числовые оси друг под другом,

совместив начала отсчета. Решение каждого неравенства надо изобразить на своей оси. На одной из осей следует нарисовать ОДЗ всей системы. После пересечения выписывайте ответ.

Пример

Решим неравенство $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 8 - x$

ОДЗ: $x^2 - 3x - 10 \geq 0$;

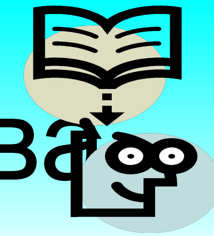
Корни $x_1 = -2$; $x_2 = 5$. $x \in (-\infty; -2] \cup [5; +\infty)$;

Имеем систему $\begin{cases} 8 - x > 0; \\ x^2 - 3x - 10 < (8 - x)^2. \end{cases}$

$\begin{cases} x < 8; \\ 13x < 74 \end{cases}$

Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup [5; \frac{74}{13})$

Иррациональные неравенства



Иррациональное неравенство с другим знаком имеет вид

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x)$$

$$\text{или} \quad \sqrt{f(x)} > g(x)$$

Метод решения надо записать в блокнот и запомнить.

Начинаем с ОДЗ: $f(x) \geq 0$.

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x)$$

Правая часть может быть ***отрицательной*** и ***неотрицательной***. Поэтому надо рассмотреть два случая:

1 случай: правая часть отрицательна.

2 случай: правая часть неотрицательна.

1 случай

Тогда имеем систему: $\begin{cases} g(x) < 0; \\ \sqrt{f(x)} \geq g(x) \end{cases}$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x)$$

$$\begin{cases} g(x) < 0; \\ \sqrt{f(x)} \geq g(x) \end{cases}$$

В левой части 2-го неравенства стоит неотрицательное число, а в правой – отрицательное. Такое неравенство *всегда верно*, и его решать не надо. Остается решить только первое неравенство g(x) < 0 и пересечь его с ОДЗ.

Итак, первый случай рассмотрели.

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x)$$

2 случай

Правая часть ≥ 0, т.е. имеем систему

$$\begin{cases} g(x) \geq 0; \\ \sqrt{f(x)} \geq g(x) \end{cases}$$

Обе части второго неравенства неотрицательны, сл-но, по свойству неравенств можем возвести в квадрат.

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x)$$

На ОДЗ имеем равносильную систему:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0; \\ f(x) \geq g^2(x). \end{cases}$$

Заметим, что из второго неравенства вытекает, что ОДЗ *автоматически выполняется*.

Решаем эту систему.

В ответ выписываем объединение решений первого и второго случаев.

Пример

Решим неравенство

$$\sqrt{x+2} \ge 2x+3$$

ОДЗ: $x + 2 \ge 0$, т.е. $x \in [-2; +\infty)$.

1 сл.

$$\begin{cases} 2x + 3 < 0; \\ \sqrt{x+2} \ge 2x+3 \end{cases}$$; всегда верно

$x < -1{,}5$;

$x \in [-2; -1{,}5)$.

2 сл.

$$\begin{cases} 2x + 3 \ge 0; \\ x + 2 \ge (2x+3)^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge -1{,}5; \\ 4x^2 + 11x + 7 \le 0. \end{cases}$$

$x \in [-2; -1,5)$

Корни $-7/4$; -1.

$x \in [-1,5; -1]$

Ответ: $x \in [-2; -1]$.

Схема решения $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$

ОДЗ: $\{f(x) \geq 0\} \cap Def(f) \cap Def(g)$;

1 сл.

$g(x) < 0$;

$$\begin{cases} g(x) < 0; \\ \sqrt{f(x)} \geq g(x); \text{ всегда верно} \end{cases}$$

$\{g(x) < 0\} \cap$ ОДЗ;

$x \in M_1$

2 сл.

$g(x) \geq 0$;

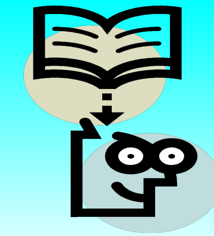
$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g(x)^2. \end{cases}$$

Решение системы $\cap$ ОДЗ;

$x \in M_2$.

Ответ: $x \in M_1 \cup M_2$.

Некоторые неравенства



Для любых действительных чисел a и b выполняется неравенство

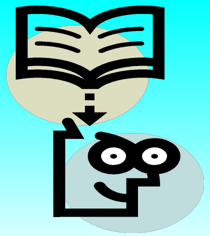
$$\boxed{a^2 + b^2 \geq 2ab}$$

Доказательство

Перенесем $2ab$ в левую часть и получим

$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$, или $(a - b)^2 \geq 0$.

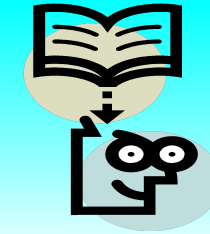
Замечание



$$\boxed{a^2 + b^2 \geq 2|ab|}$$

Это неравенство вытекает из

$$(\,|a| - |b|)^2 \geq 0.$$



Если a и b – действительные числа одного знака (т. е. ab > 0), то

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2}$$

Равенство при $a = b$

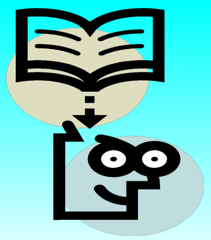
Доказательство

Умножим обе части неравенства

$a^2 + b^2 \geq 2ab$ на положительное число $\frac{1}{ab}>0$.

Получим $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$.

Следствие

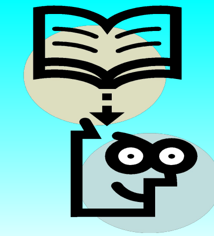


Если а – положительное число (т. е. а>0), то

$$\boxed{a + \frac{1}{a} \geq 2}$$

Равенство при *а* = 1

Неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом



Если a ≥ 0 и b ≥ 0, то

$$\boxed{\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}}$$

т. .е. среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического.

Доказательство

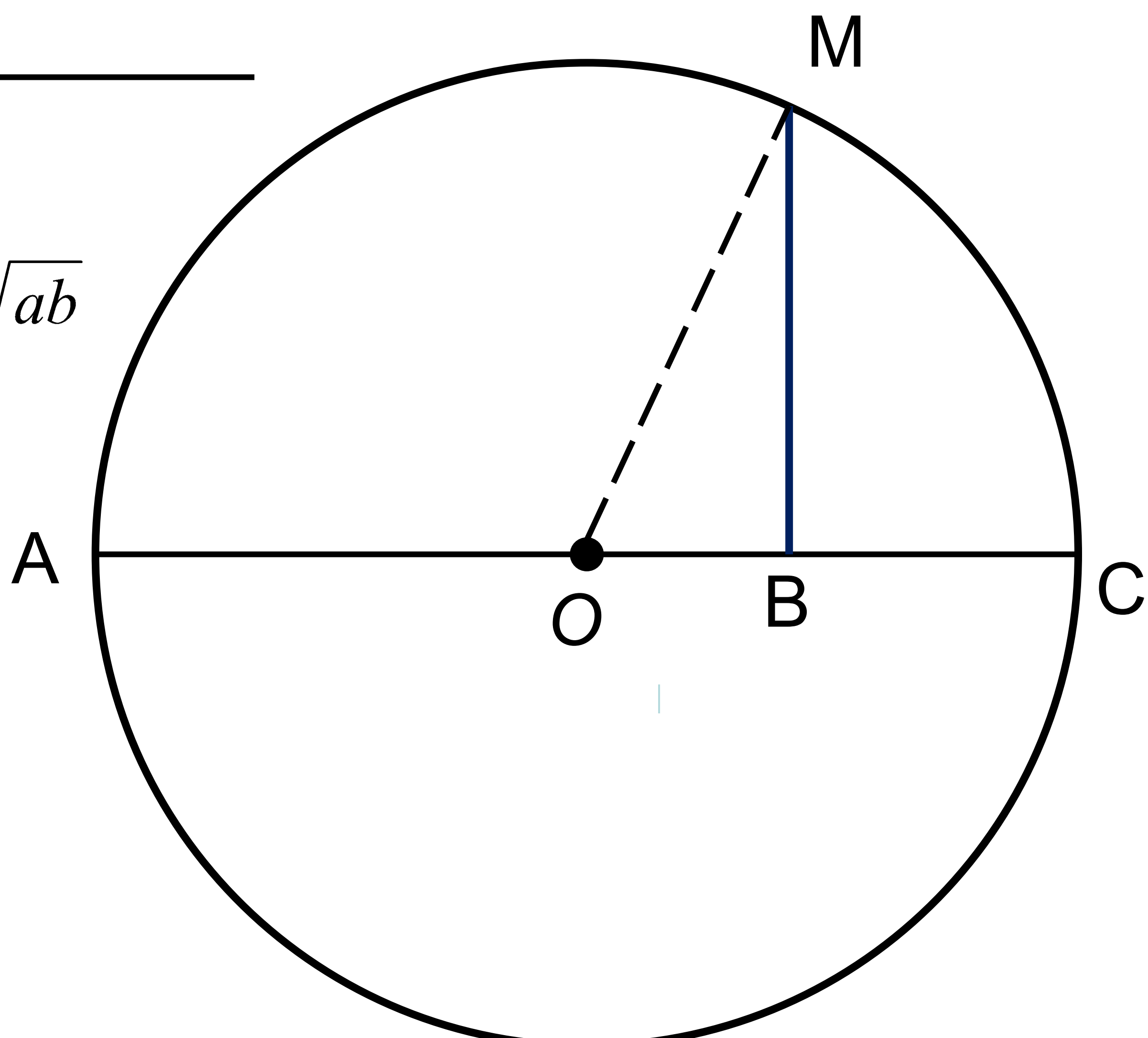
$a + b \geq 2\sqrt{ab},$ $\qquad (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$

Геометрическая интерпретация

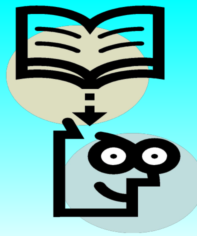
a

b

$$r = \frac{a+b}{2}; \quad MB = \sqrt{ab}$$



Неравенства с модулями



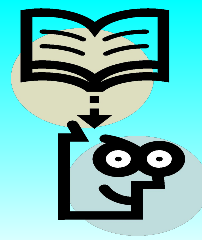
Неравенство

$$\boxed{|a| < b}$$

имеет место тогда и только тогда, когда выполняется следующее двойное неравенство

$$\boxed{-b < a < b.}$$

Следствие



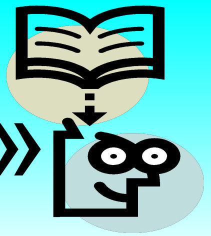
Очевидно, что

$$a \le |a|.$$

Из $a \le |a|$ следует, что

$$-|a| \le a \le |a|$$

Неравенство «треугольника»



Для любых действительных чисел a и b выполняется неравенство

$$\boxed{|a + b| \le |a| + |b|.}$$

Доказательство

Из следствия на предыдущем слайде

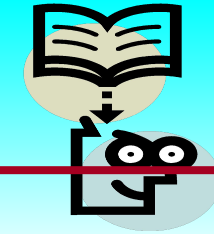
$$-|a| \le a \le |a|$$

$$-|b| \le b \le |b|$$

Сложим неравенства:

$$-(|a| + |b|) \le a + b \le |a| + |b|$$

$|a + b| \le |a| + |b|$



Сложим неравенства:

$$-(|a| + |b|) \le a + b \le |a| + |b|$$

Вспоминая, что двойное неравенство

$-D \le C \le D$ равносильно $|C| \le D$,

получим следующее неравенство

$$|a + b| \le |a| + |b|.$$

Читается

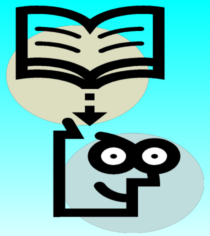
«Модуль суммы двух чисел не превосходит суммы модулей этих чисел»

Для любых действительных чисел a и b выполняется неравенство

$$\boxed{|a - b| \geq ||a| - |b||.}$$

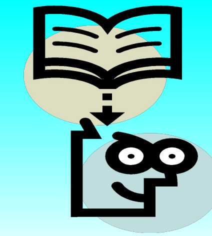
Без доказательства

Методы доказательства неравенств



1. Используя определение
2. Цепочкой слева направо
3. Цепочкой справа налево
4. Используя уже доказанное
5. Столбиком
6. Используя оценку каждого неравенства

Пример 1



Докажите, что для любых действительных чисел *a* и *b* имеет место неравенство

$$a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3.$$

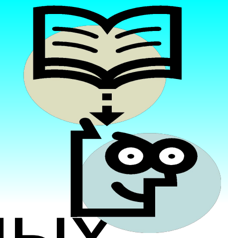
Доказательство (используя определение)

$a^4 + b^4 – a^3b − ab^3 = a^3(a – b) – b^3(a – b)=$

$= (a – b)(a^3 – b^3) = (a – b)(a – b)(a^2 + ab +b^2)$

$= (a – b)^2(a^2 + ab +b^2) \geq 0.$

Пример 2



Докажите, что для любых действительных чисел *a*, *b* и *c* имеет место неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

Доказательство (используя уже доказанные неравенства)

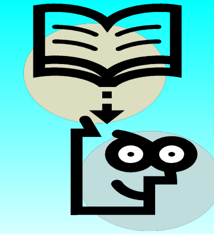
Имеем $a^2 + b^2 \geq 2ab;$

$$b^2 + c^2 \geq 2bc;$$

$$c^2 + a^2 \geq 2ac.$$

Сложим и разделим на 2. Неравенство доказано.

Задачи для самостоятельной работы



1. Докажите, что если действительные числа *a, b* и *c* таковы, что

$a + b + c = 0$, то имеет место неравенство

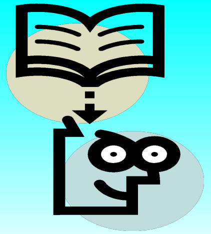
$$ab + bc + ca \le 0.$$

2. Докажите, что если $a^2 + b^2 = 1$, то

$$|a + b| \le \sqrt{2}.$$

3. $5a^2 – 6ab + 5b^2 \ge 0.$
4. $a^2 + b^2 + 1 \ge ab + a + b.$

Домашнее задание



1. Выучите основные свойства неравенств и научитесь их доказывать.
2. Запомните метод решения простых иррациональных неравенств двух видов.
3. Выучите наиболее часто встречающиеся неравенства (для сомневающихся в необходимости:

   они помогут сдать ЕГЭ)