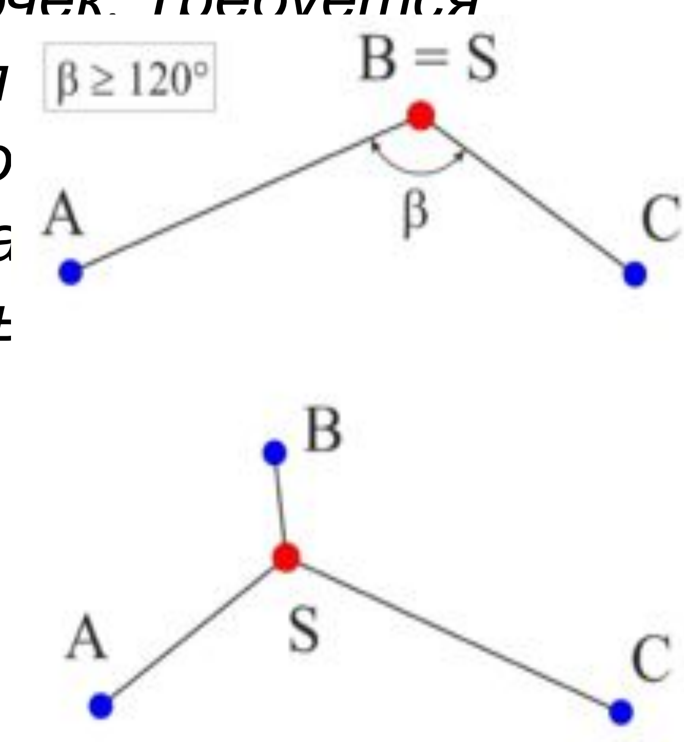
NP-полнота и сложность Задачи Штейнера

Нечаева Инна 7381

Задача Штейнера. Формулировка

На плоскости задано n точек. Требуется соединить эти точки, исп… ые точки Штейнера, таким о… я точка была соединена с ка… всех проведённых линий бы…



Достаточные условия

- В решение могут входить промежуточные точки, и все соединения должны быть отрезками, соединяющими точки (исходные и промежуточные).
- В каждой промежуточной точке должны сходиться три отрезка
- В исходных точках должны сходиться не более трёх отрезков.
- Угол между отрезками, сходящимися в одной точке не должен быть меньше 120 градусов

Типы задач Штейнера.

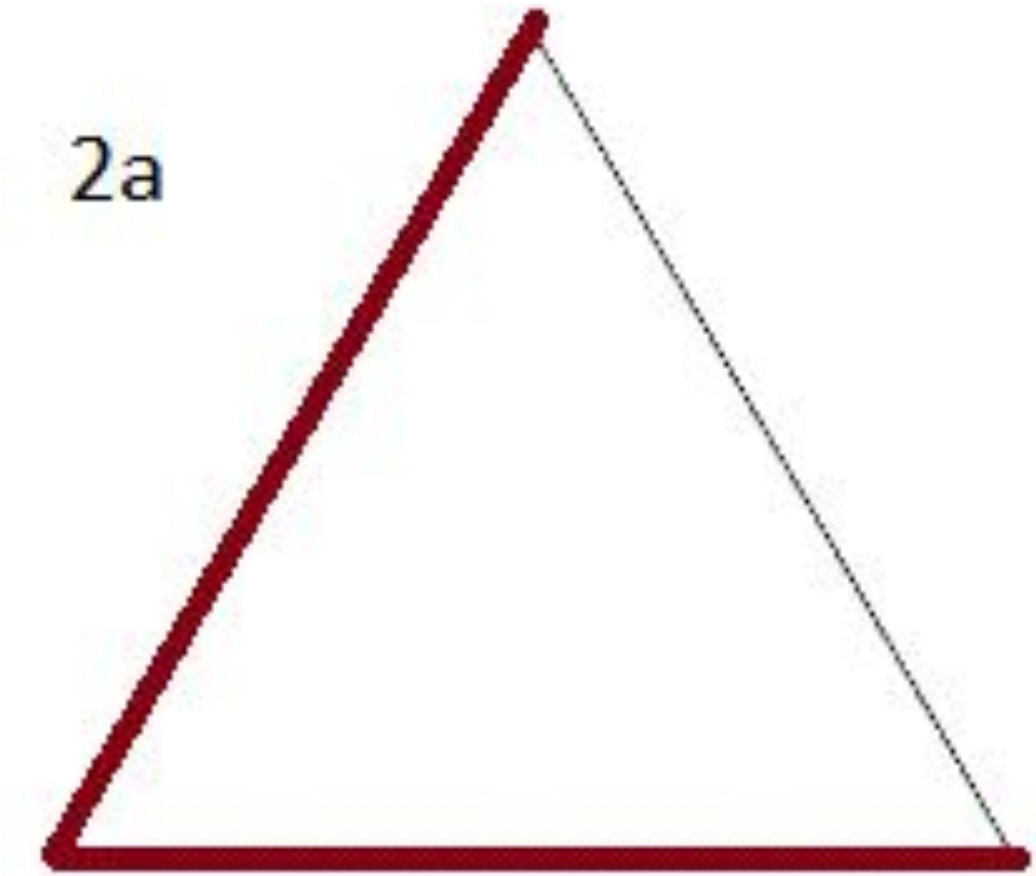
- *Евклидова задача Штейнера*
- *Линейная задача Штейнера*
- *Задача Штейнера на графах.*

Гипотеза Гильберта-Поллака

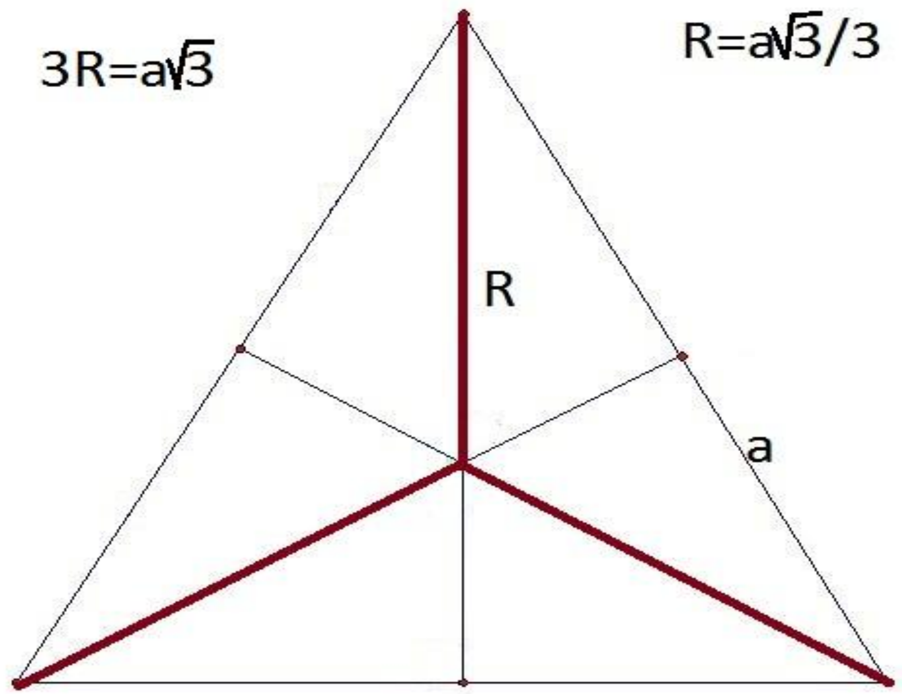
Пусть на плоскости задано произвольное множество из n точек. Обозначим L_M длину минимального остовного дерева, которое стягивает эти точки, и L_S – длину минимального дерева Штейнера. Для любого конечного множества [illegible] ости

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \le \frac{L_S}{L_M} \le 1.$$

Вычисление МОД

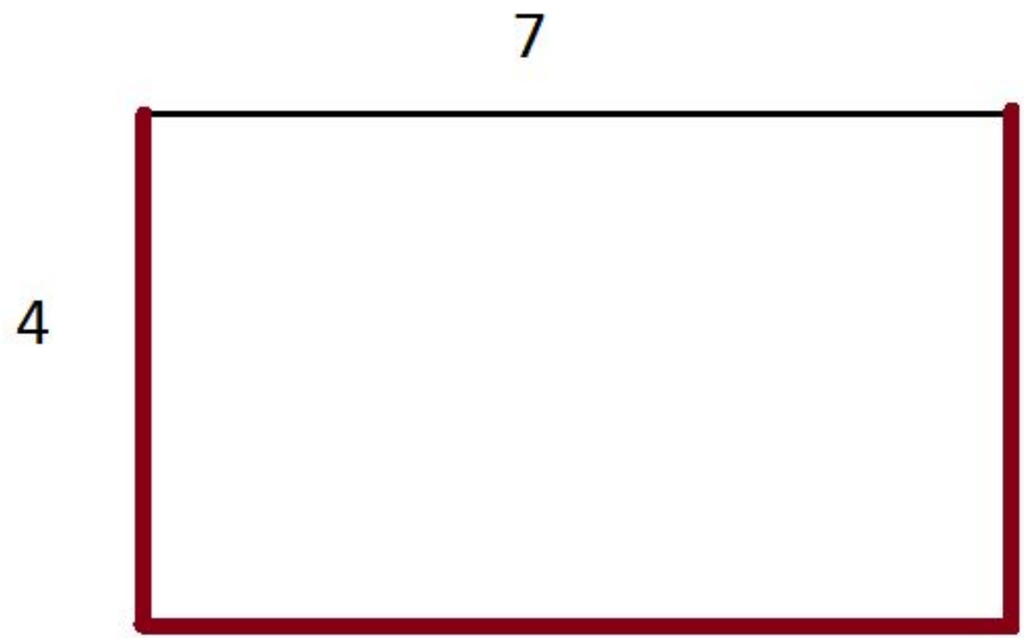


Вычисление минимального дерева Штейнера



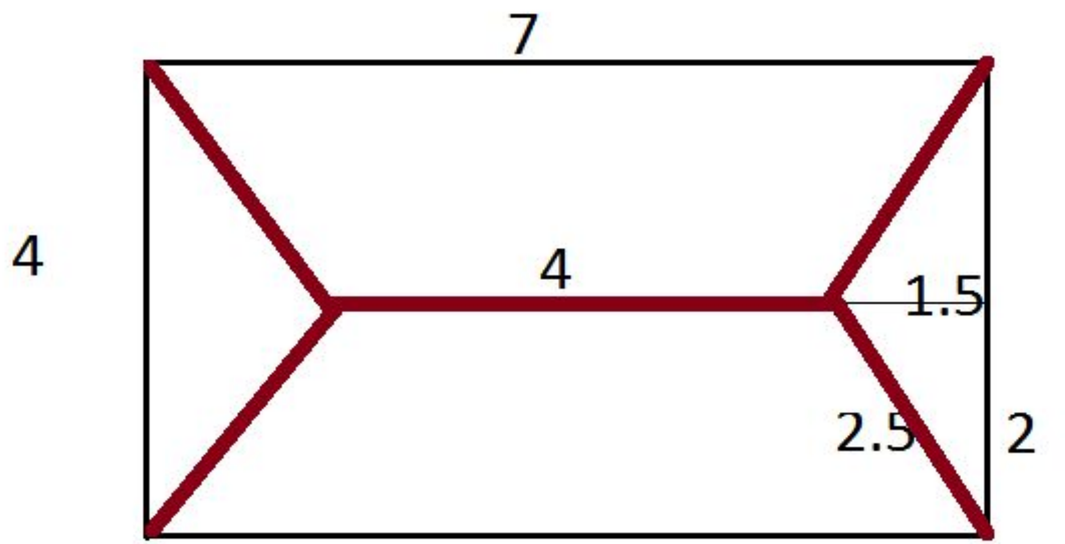
Ls/Lm=a√3/2a=√3/2

Вычисление МОД



Lm=4+7+4=15

Вычисление минимального дерева Штейнера



Ls=4+4*2.5=14

Ls/Lm=14/15=0.93   0.87<0.93<1

NP-полные задачи

Задача выполнимости булевых формул

- Бинарное целочисленное программирование
- Задача о клике
    - Задача "упаковки" множества
    - Задача о вершинном покрытии
        - Задача о покрытии множества
        - Feedback Vertex Set
        - Feedback Arc Set
            - Задача ориентированного Гамильтонова
            - Задача неориентированного Гамильтонова
- Задача выполнимости булевых формул с тремя литералами
    - Задача раскраски графа
        - Задача о покрытии клики
        - Задача о точном покрытии
            - Задача о вершинном покрытии в гиперграфах
            - Задача дерева Штайнера
            - 3-dimensional matching
            - Задача о ранце
                - Job sequencing
                - Partition problem)
                - Задача о максимальном разрезе

Задача Штайнера NP-полная

Грэм, М. Гэри, Джонсон :

Теорема: задача Штейнера на графах является NP-полной.

Доказательство:

1. показать, что P принадлежит классу NP;
2. Выбрать известную NP-полную задачу из P`;
3. Построить преобразование f из P` в P;
4. доказать, что f-полиномиальное преобразования.

Пункт 1. Задача Штайнера принадлежит классу NP

Предположим $\langle G, R, k \rangle \in ST$, например $\langle G, R, k \rangle$ принадлежит классу NP.

В этом случае, существует такое решен $T \subseteq G$, и мы можем проверить за полиномиальное время, что:

- T действительно дерево: оно не содержит циклов и оно связно;
- дерева T касается всех терминалов указанного множества R;
- число ребер, которые включает дерево не более k.

Пункт 2. Задача точного покрытия трёхэлементными множествами

Дано:

- конечного множества X с |X| = 3q;
- Множество C состоящее из 3-элементных подмножеств

$X, \ C = \{C_1, \cdots, C_n\}, \ C_i \subseteq X, \quad |C_i| = 3 \quad 1 \le i \le n;$

Вопрос:

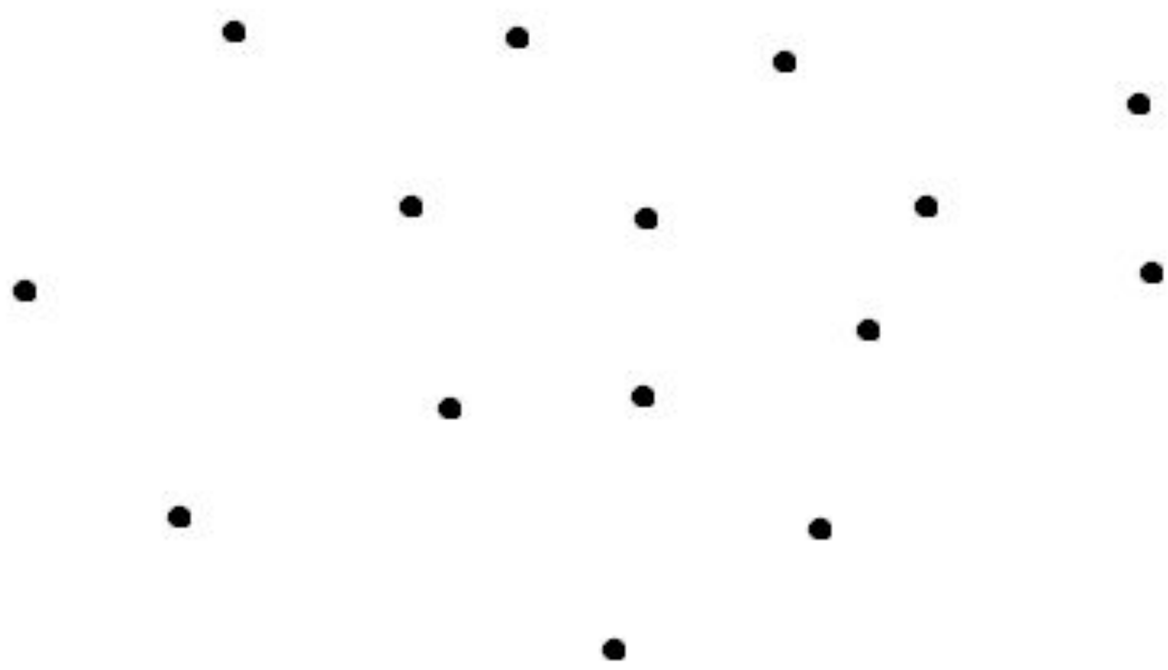
Существует ли $\langle X, C \rangle \in \mathrm{X3C}$ мейство C C`, которое соответствуе и

- члены решения C` образуют разбиение множества X;
- $|C'| = q.$

Пункт 3.Преобразование из X3C в ST

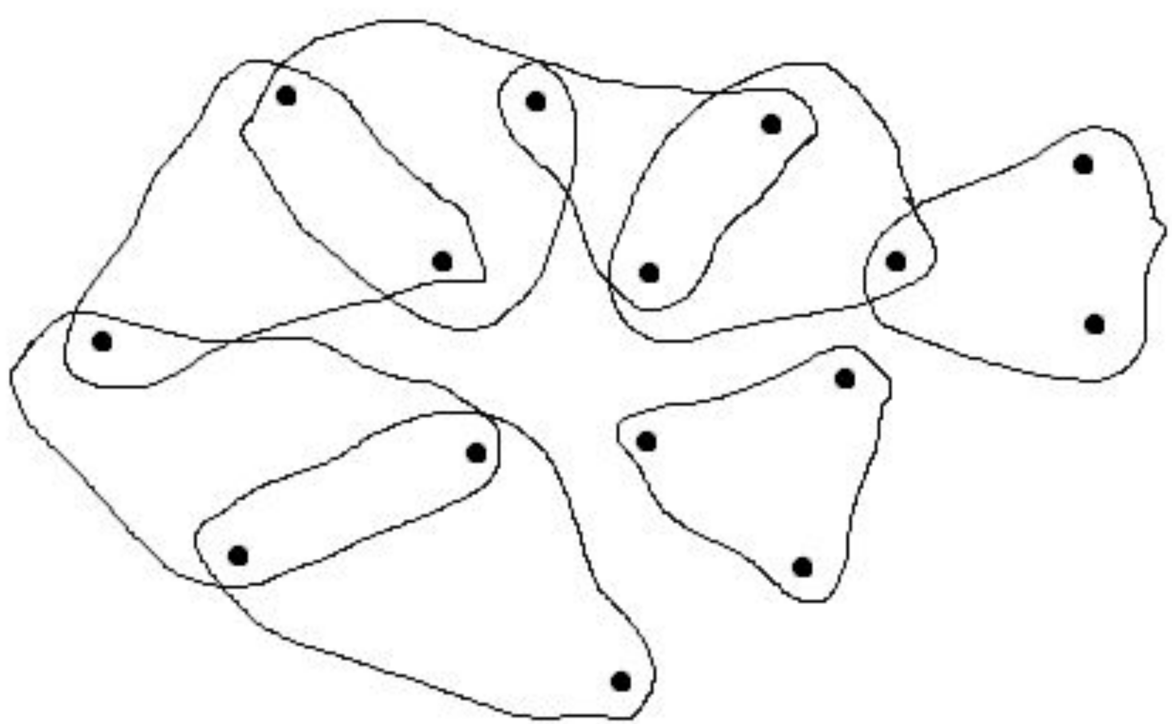
Приведём пример точного покрытия трёхэлементными множествами , которое определяется мн$X = \{x_1, \cdots, x_{3q}\}$ и группой трёхэлементных множ$C = \{C_1, \cdots, C_n\}$ Необходимо построить ST такое, что множество терминалов графа G = (V, E) будет равно R и длина остовного дерева не будет превосходить k.

Пункт 3.Преобразование из X3C в ST



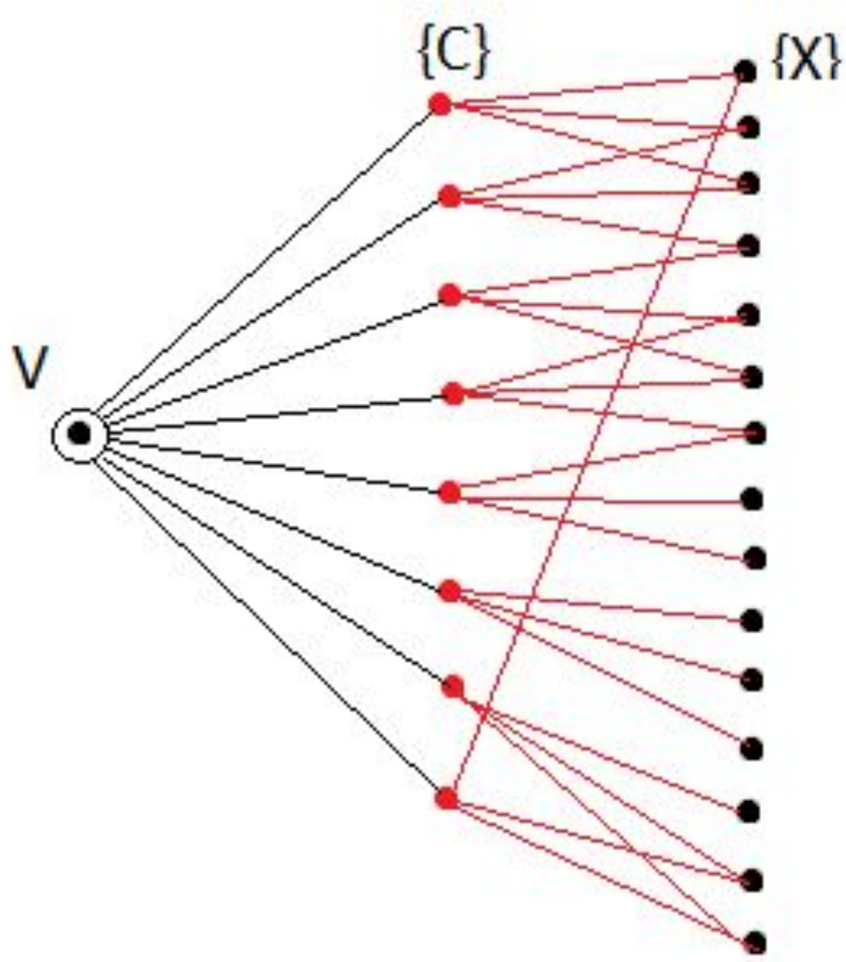
$|X|=15$

Пункт 3.Преобразование из X3C в ST



|C|=8

Пункт 3.Преобразование из X3C в ST



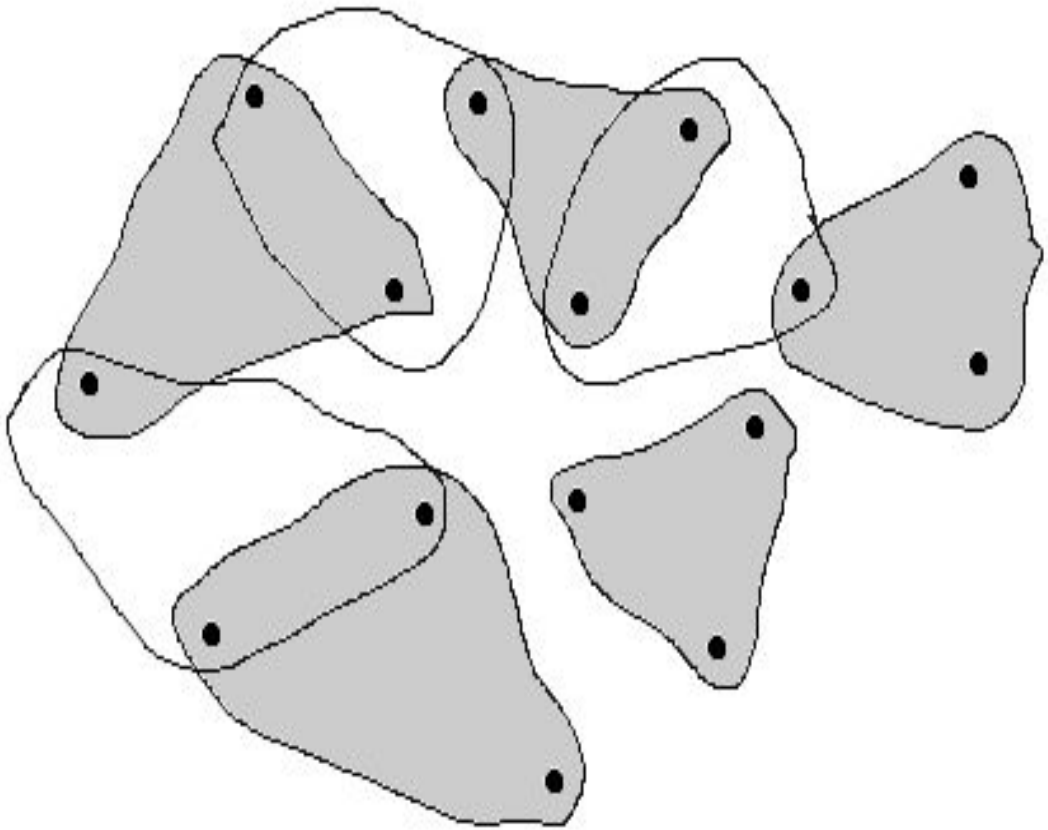
Пункт 3.Преобразование из X3C в ST

Условия для дерева Штайнера:

- T действительно дерево: оно не содержит циклов и оно связно;
- дерево T касается всех терминалов указанного множества R;
- число ребер, которые включает дерево не более k.

Установим K равное 4q, где q - количество трёхэлементных подмножеств задачи X3C.

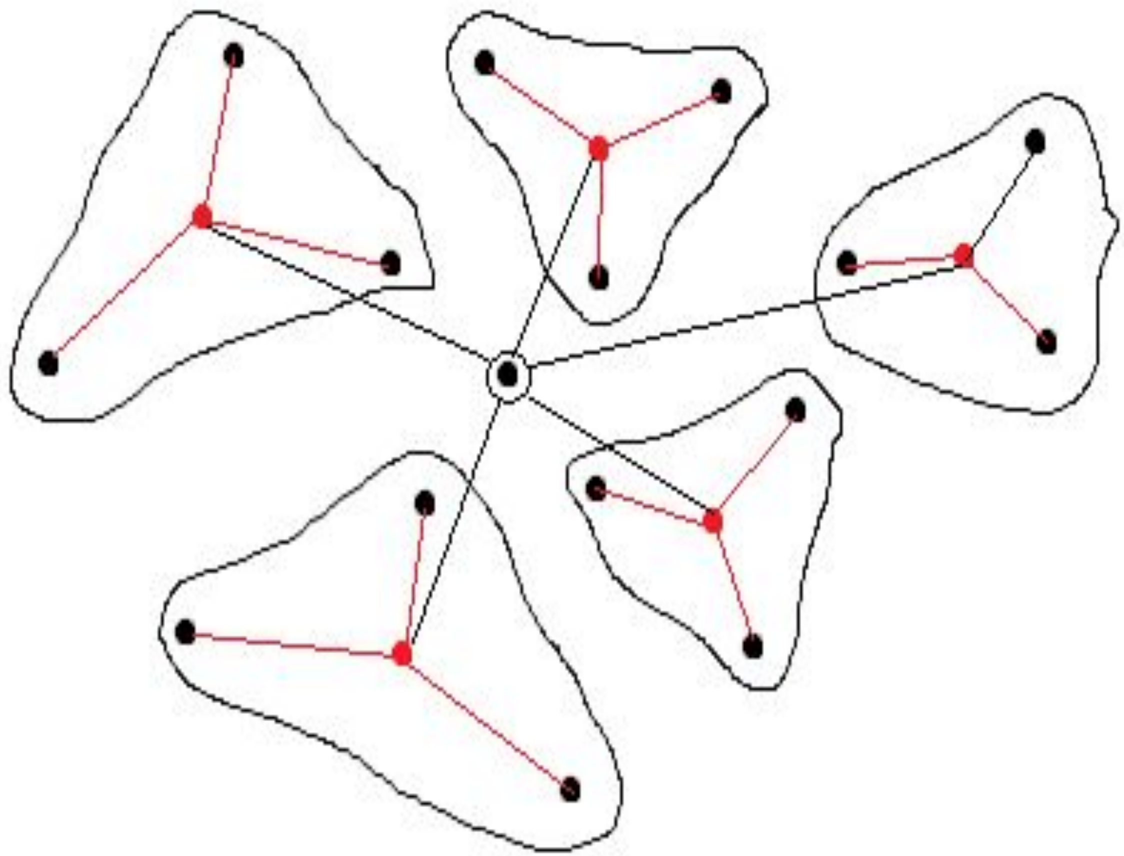
Пункт 3.Решение задачи Х3С



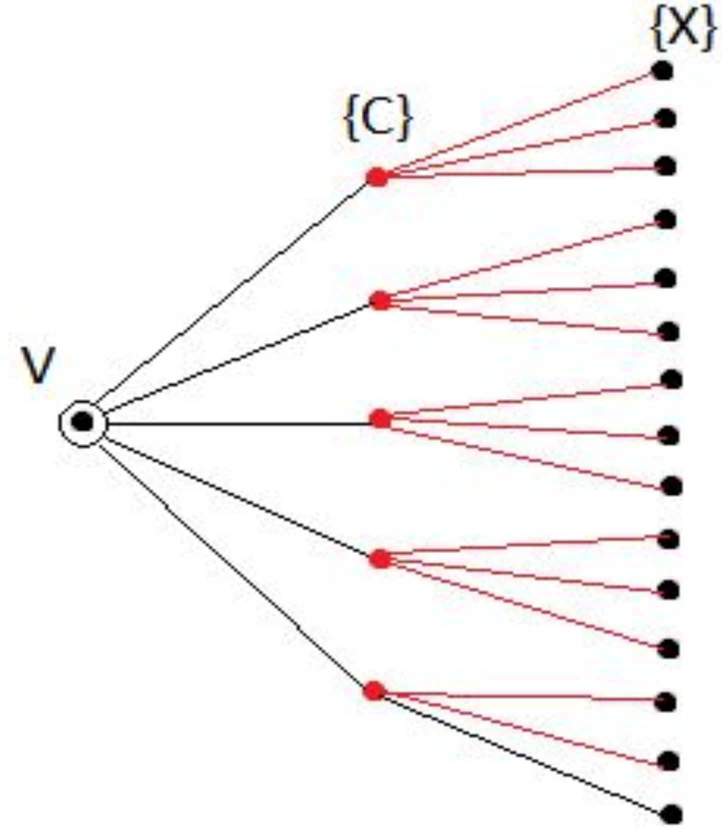
|X|=15

q=5

Пункт 3.Определение множества рёбер



Пункт 3.Определение множества рёбер

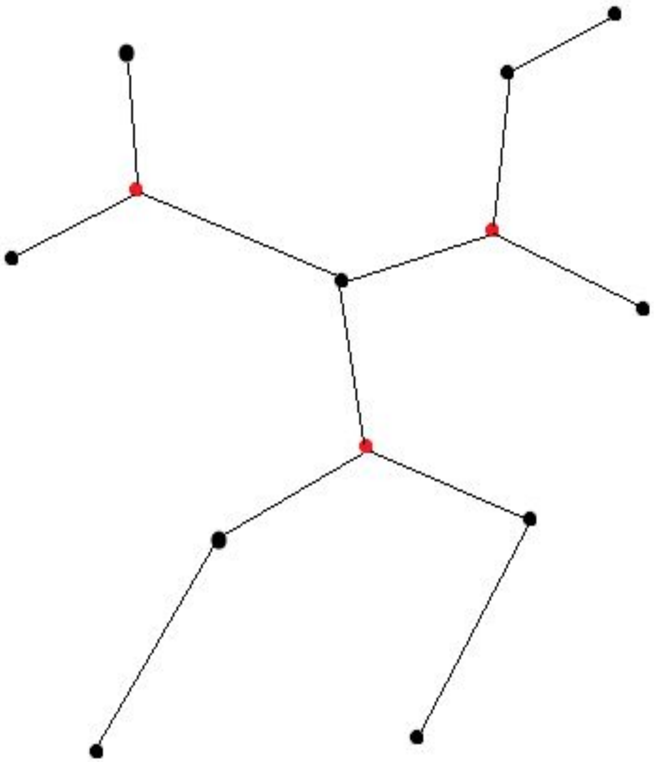


K=4q=4*5=20

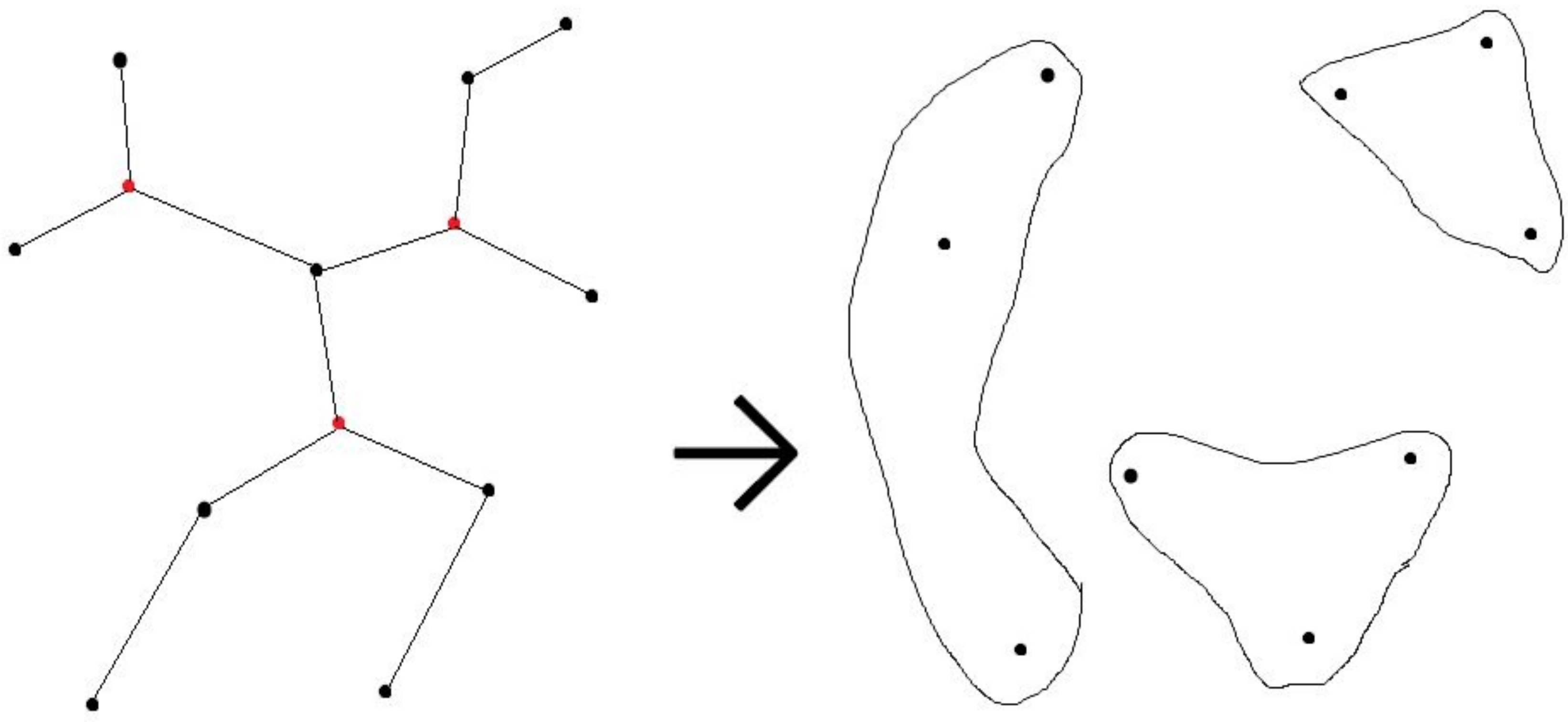
K=5*3+5=20

Обратное преобразование из ST в X3C

K≤4q
V ≤4q+1
По опр. ДШ, Т содер
С-узлов -> Но если V
охватят все 3q x-узло
V=4q+1
K=4q



Обратное преобразование из ST в X3C



Алгоритм аппроксимации Robins, Zelikovsky (2000 г.)

<u>Обозначения:</u>

Дан граф G = (V, E;cost), **STP** - любое дерево из G : $\mathbf{G_S}$ представляет собой полный граф с множеством вершин S.

Пусть **MST ($\mathbf{G_S}$)** минимальное остовное дерево G_S.

Для любого графа H, **cost(H)** является суммой весов всех ребер в H.

Обозначаем Стоимость минимального остовного дерева H как **mst(H)**.

Дерево Штейнера на подмножество S`, в котором все терминалы листья называется Полной к$H \cup T$онентой.

T – дерево, соединяющие каждую вершину Штейнера с терминалом. $gain_T(H) = cost(T) - cost(T[H])$

Пусть T(H) граф минимальной стоимости в , который содержит H и покрывает все терминалы. Прирост H по отношению к T определяется

loss(K) является стоимостью подключения точек Штейнера из K к терминалам

Loss-Contracting Algorithm (k-LCA)

Loss-Contracting Algorithm (k-LCA)

ВХОД: полный граф G = (V;E; cost) с весом рёбер, удовлетворяющих неравенству треугольника, набором термина $\hat{S} \subset V$ и це $k \leq |\hat{S}|$

ВЫХОД: k-ограниченное дерево Штайнера графа G, включающее все терминалы из S

$T = MST(G_S)$

$H = G_S$

Repeat forever

Поиск k-ограниченной полной компоненты K с максимальным $r = gain_T(K)/loss(K)$

If $r \leq 0$ **then exit repeat**

H = H U K

T = MST(T U C[K])

Output дерево MST(H)

Время работы Loss-Contracting алгоритма в квази-двудольных графах.

Loss-Contracting алгоритм может быть реализован за общее время работы

$$O(n^2m),$$

где m и n - количество терминалов и нетерминалов соответственно

Коэффициент Аппроксимации .

<u>Теорема:</u> для любого экземпляра ST, стоимость аппроксимации ST производится с помощью алгоритма

$$Approx \le loss_k \cdot \ln\left(1 + \frac{mst - opt_k}{loss_k}\right) + opt_k$$

Approx ≈ 1+ln3/2 <1.55