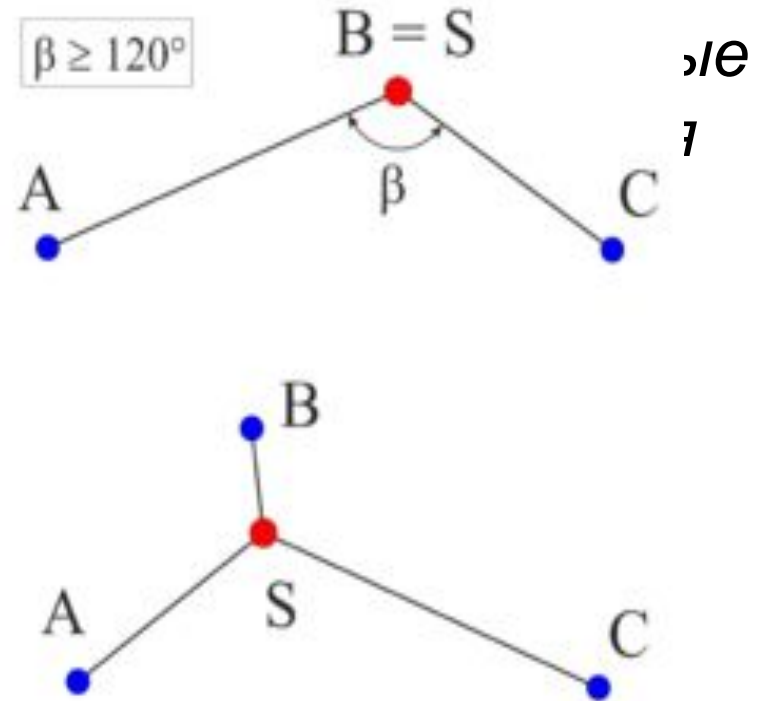


NP-полнота и сложность Задачи Штейнера

Нечаева Инна 7381

Задача Штейнера. Формулировка

На плоскости задано n точек. Требуется соединить эти точки, используя точки Штейнера, таким образом, чтобы каждая точка была соединена с каждой из всех проведённых линий без



Достаточные условия

- В решение могут входить промежуточные точки, и все соединения должны быть отрезками, соединяющими точки (исходные и промежуточные).
- В каждой промежуточной точке должны сходиться три отрезка
- В исходных точках должны сходиться не более трёх отрезков.
- Угол между отрезками, сходящимися в одной точке не должен быть меньше 120 градусов

Типы задач Штейнера.

- *Евклидова задача Штейнера*
- *Линейная задача Штейнера*
- *Задача Штейнера на графах.*

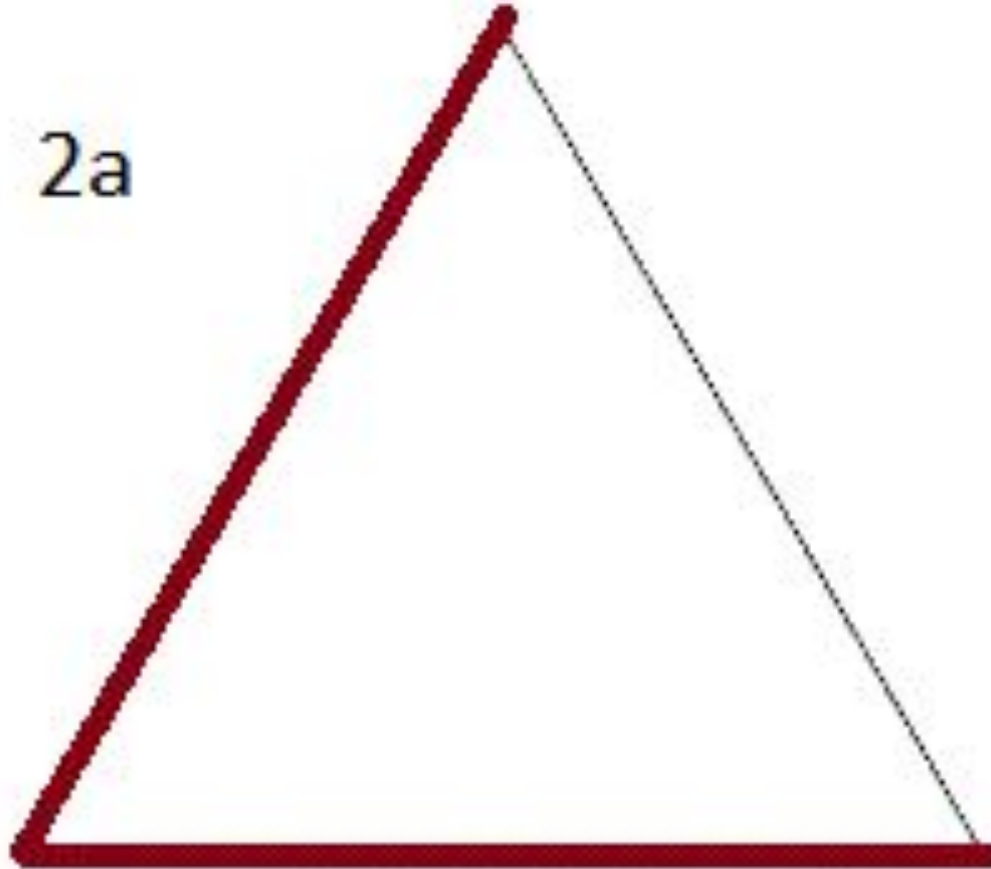
Гипотеза Гильберта-Поллака

Пусть на плоскости задано произвольное множество из n точек. Обозначим L_M длину минимального остовного дерева, которое стягивает эти точки, и L_S – длину минимального дерева Штейнера. Для любого конечного множества

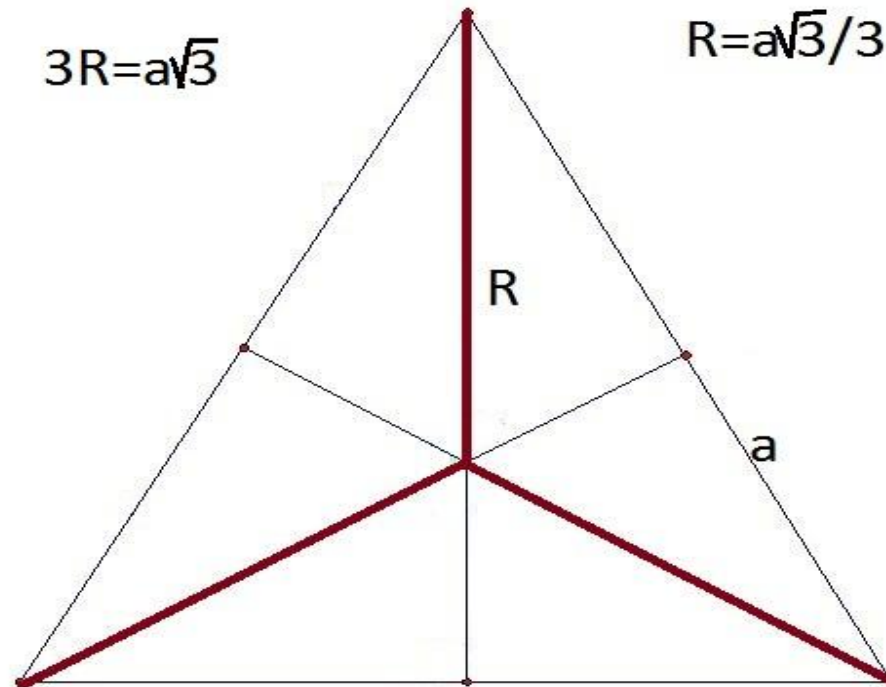
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{L_S}{L_M} \leq 1.$$

Вычисление МОД

2а

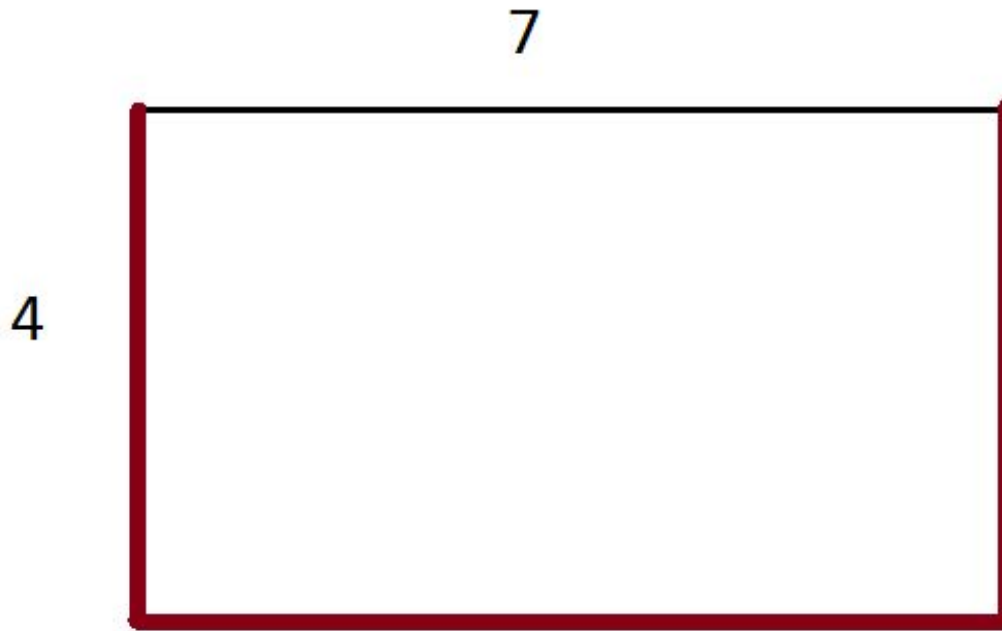


Вычисление минимального дерева Штейнера



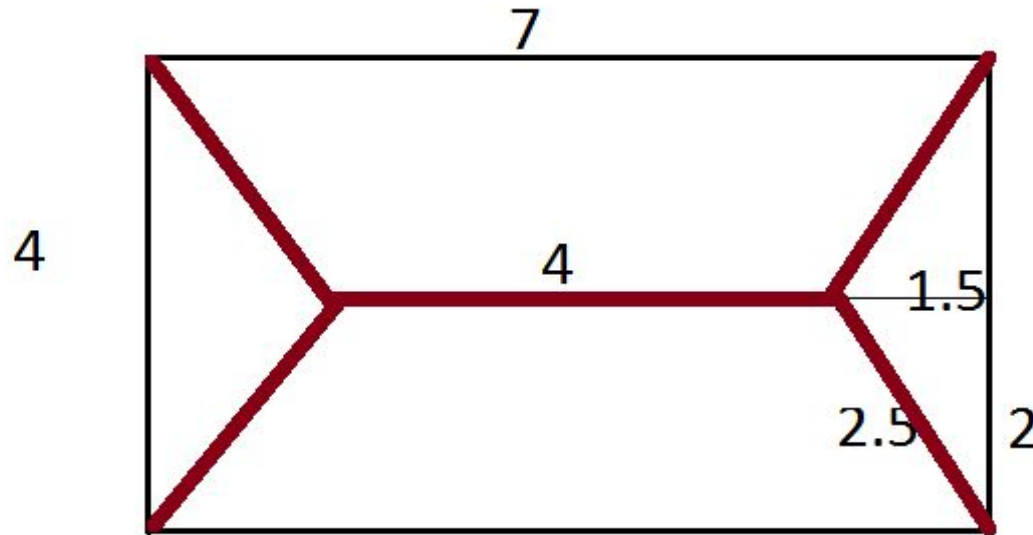
$$L_s/L_m = a\sqrt{3}/2a = \sqrt{3}/2$$

Вычисление МОД



$$L_m = 4 + 7 + 4 = 15$$

Вычисление минимального дерева Штейнера



$$L_s = 4 + 4 * 2.5 = 14$$

$$L_s / L_m = 14 / 15 = 0.93 \quad 0.87 < 0.93 < 1$$

NP-полные задачи

Задача выполнимости булевых формул

- Бинарное целочисленное программирование
- Задача о клике
 - Задача "упаковки" множества
 - Задача о вершинном покрытии
 - Задача о покрытии множества
 - Feedback Vertex Set
 - Feedback Arc Set
 - Задача ориентированного Гамильтонова
 - Задача неориентированного Гамильтонова
- Задача выполнимости булевых формул с тремя литералами
 - Задача раскраски графа
 - Задача о покрытии клики
 - Задача о точном покрытии
 - Задача о вершинном покрытии в гиперграфах
 - Задача дерева Штайнера
 - 3-dimensional matching
 - Задача о ранце
 - Job sequencing
 - Partition problem)
 - Задача о максимальном разрезе

Задача Штайнера NP-полная

Грэм, М. Гэри, Джонсон :

Теорема: задача Штейнера на графах является NP-полной.

Доказательство:

1. показать, что P принадлежит классу NP;
2. Выбрать известную NP-полную задачу из P' ;
3. Построить преобразование f из P' в P ;
4. доказать, что f -полиномиальное преобразования.

Пункт 1. Задача Штайнера принадлежит классу NP

Предположим $\langle G, R, k \rangle \in ST$, например $\langle G, R, k \rangle$ принадлежит классу NP.

В этом случае, существует такое решение $T \subseteq G$, и мы можем проверить за полиномиальное время, что:

- T действительно дерево: оно не содержит циклов и оно связно;
- дерева T касается всех терминалов указанного множества R ;
- число ребер, которые включает дерево не более k .

Пункт 2. Задача точного покрытия трёхэлементными множествами

Дано:

- конечного множества X с $|X| = 3q$;
- Множество C состоящее из 3-элементных подмножеств X , $C = \{C_1, \dots, C_n\}$; $C_i \subseteq X$, $|C_i| = 3 \quad 1 \leq i \leq n$;

Вопрос:

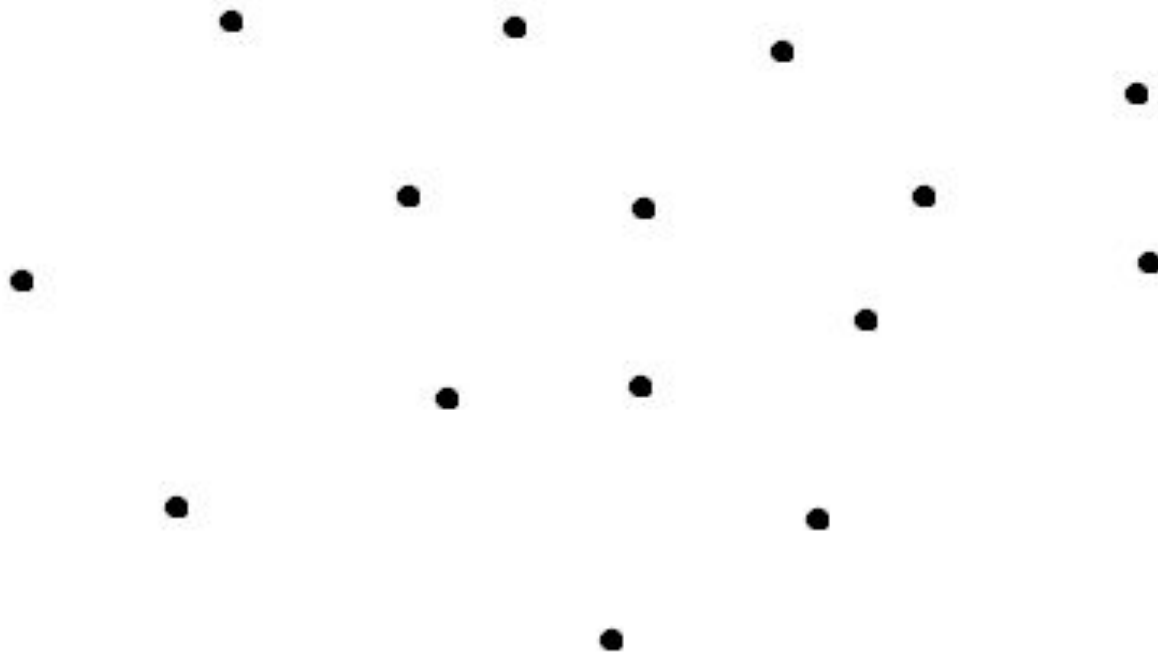
Существует ли $\langle X, C \rangle \in X3C$ множество $C' \subseteq C$, которое
соответствует и

- элементы решения C' образуют разбиение множества X ;
- $|C'| = q$.

Пункт 3. Преобразование из ХЗС в ST

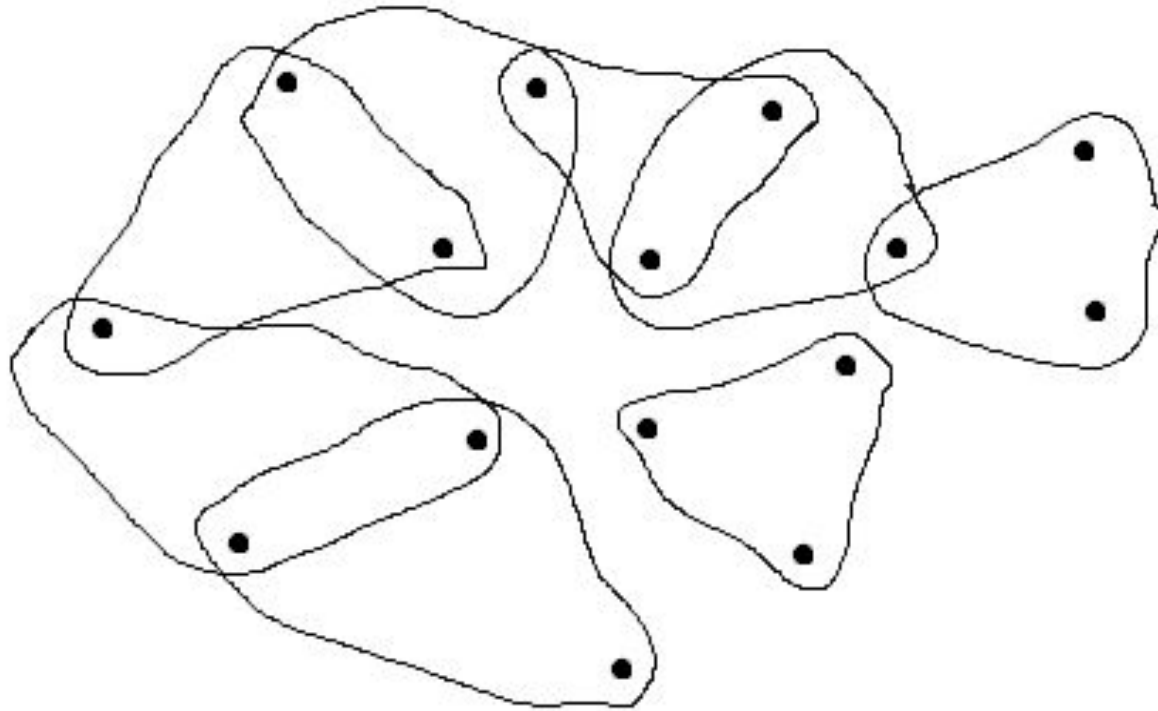
Приведём пример точного покрытия трёхэлементными множествами, которое определяется мн $X = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$ и группой трёхэлементных множ $C = \{C_1, \dots, C_n\}$. Необходимо построить ST такое, что множество терминалов графа $G = (V, E)$ будет равно R и длина остовного дерева не будет превосходить k .

Пункт 3. Преобразование из ХЗС в ST



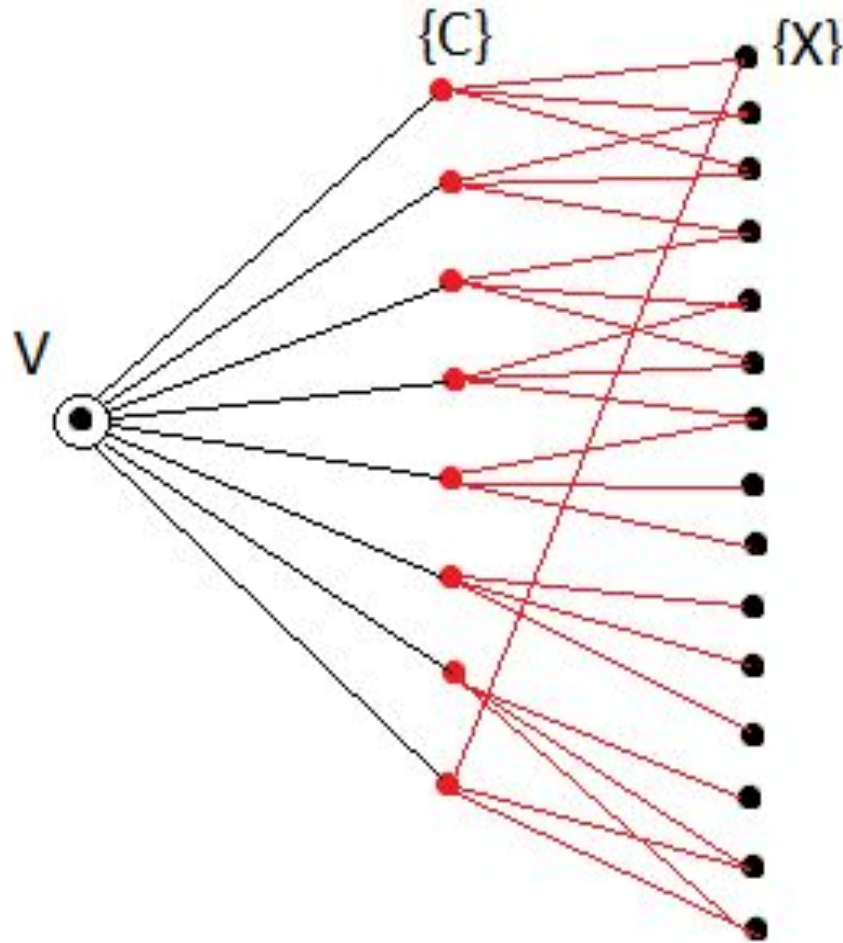
$$|X|=15$$

Пункт 3. Преобразование из ХЗС в СТ



$$|C|=8$$

Пункт 3. Преобразование из ХЗС в ST



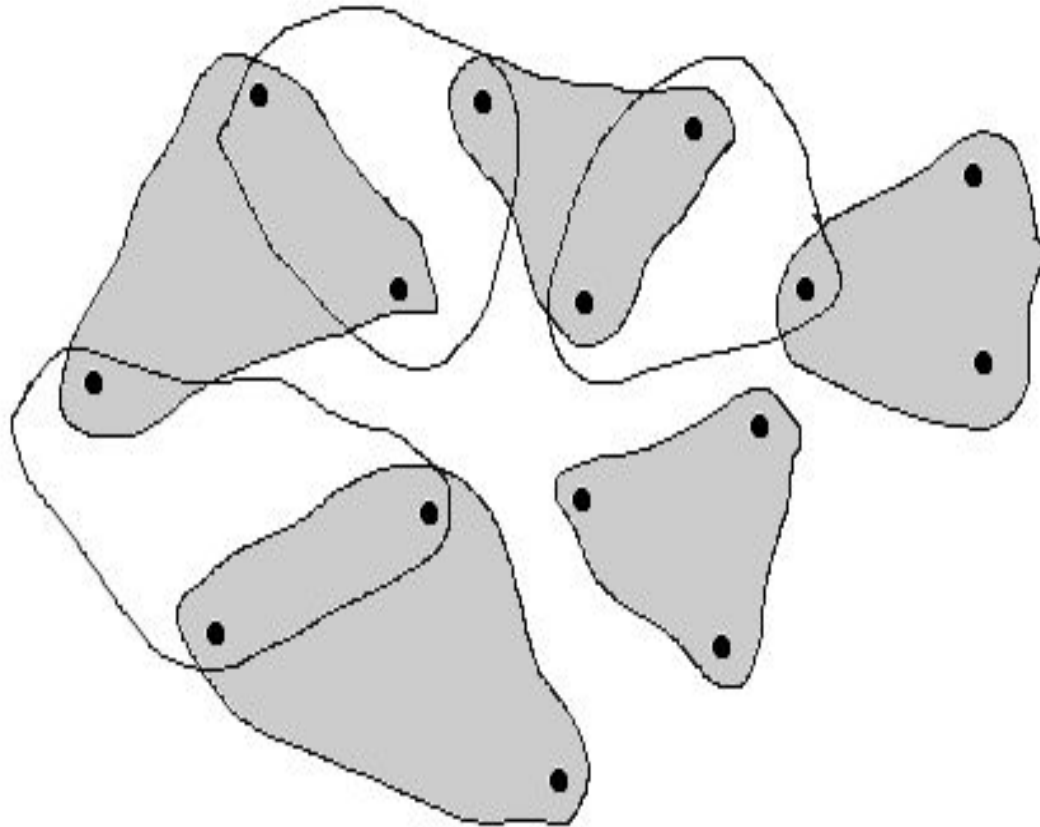
Пункт 3. Преобразование из ХЗС в ST

Условия для дерева Штайнера:

- T действительно дерево: оно не содержит циклов и оно связно;
- дерево T касается всех терминалов указанного множества R ;
- число ребер, которые включает дерево не более k .

Установим k равное $4q$, где q - количество трёхэлементных подмножеств задачи ХЗС.

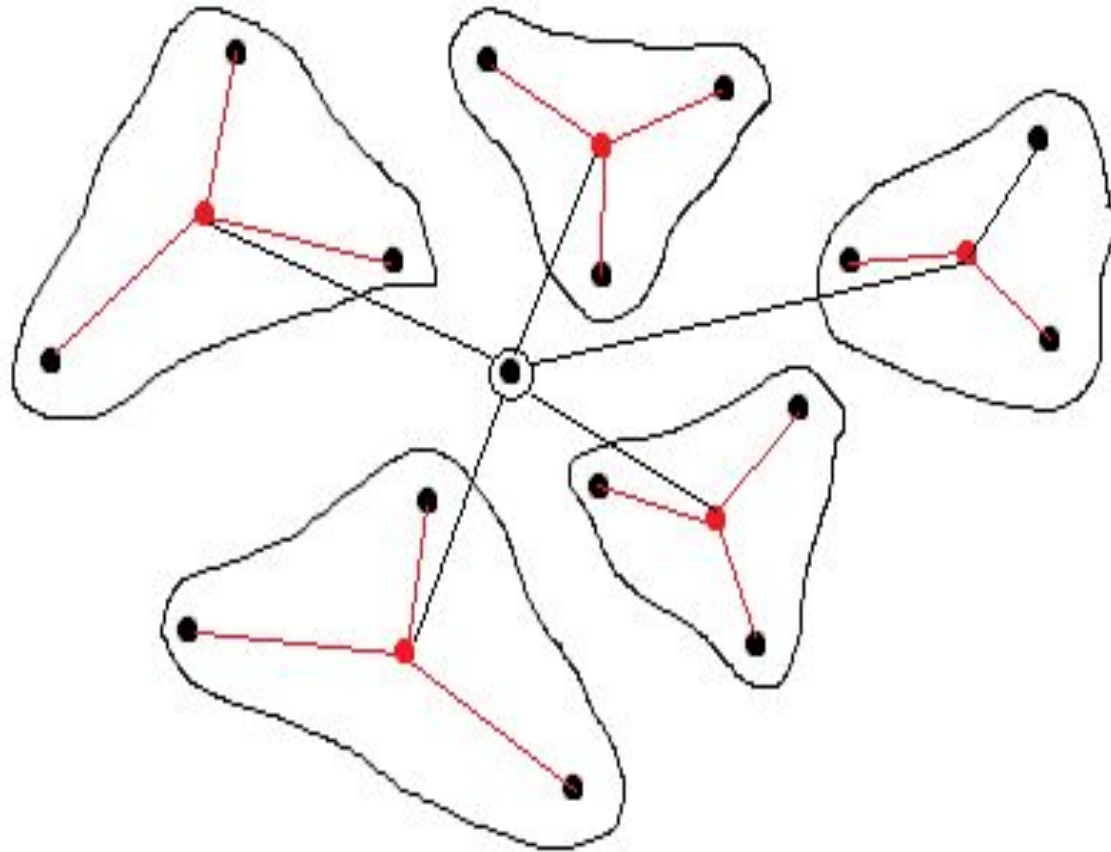
Пункт 3. Решение задачи ХЗС



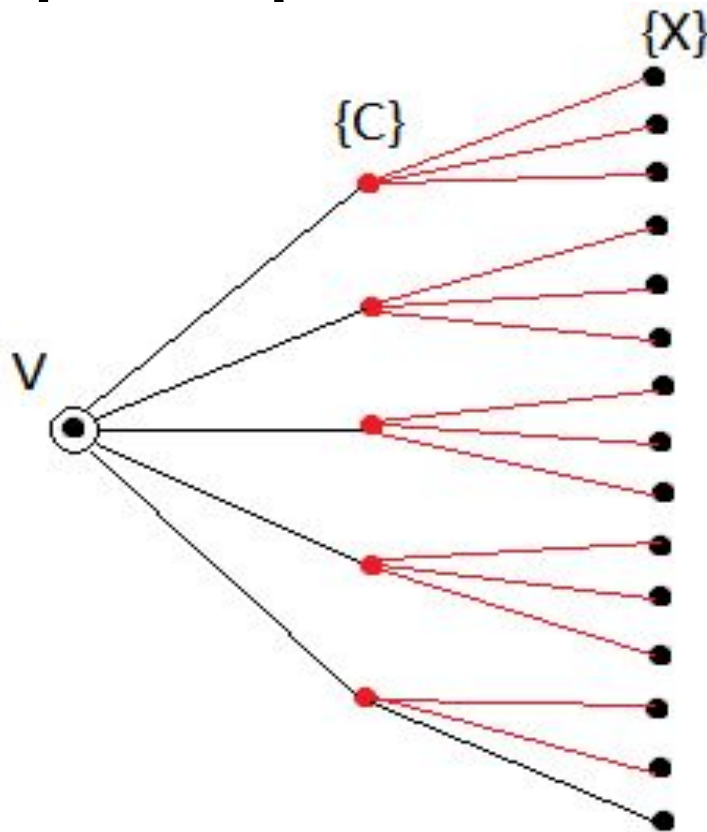
$$|X|=15$$

$$q=5$$

Пункт 3. Определение множества рёбер



Пункт 3. Определение множества рёбер



$$K=4q=4*5=20$$

$$K=5*3+5=20$$

Обратное преобразование из ST в ХЗС

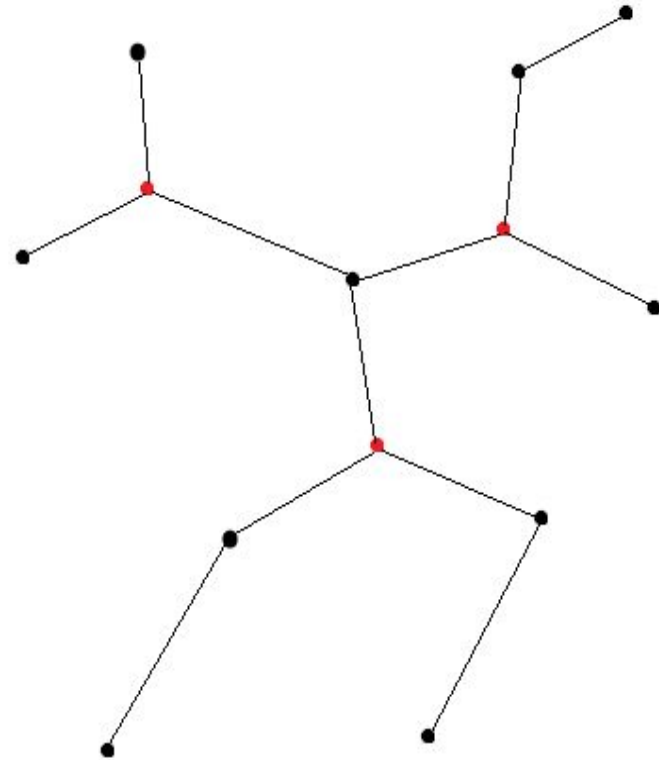
$$K \leq 4q$$

$$V \leq 4q + 1$$

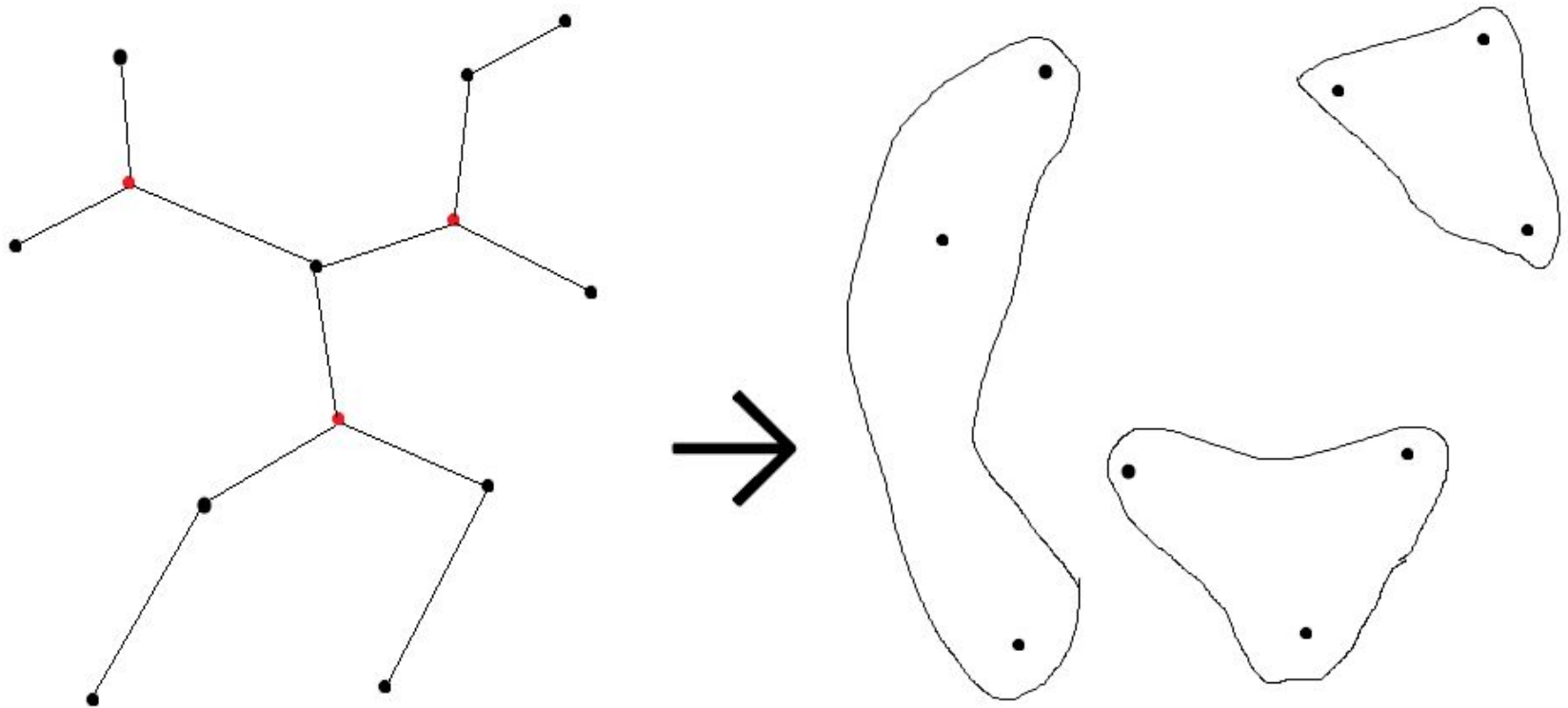
По опр. ДШ, Т содержит
С-узлов \rightarrow Но если V
охватят все $3q$ х-узлов

$$V = 4q + 1$$

$$K = 4q$$



Обратное преобразование из ST в ХЗС



Алгоритм аппроксимации

Robins, Zelikovsky (2000 г.)

Обозначения:

Дан граф $G = (V, E; \text{cost})$, **STP** - любое дерево из $G : G_S$ представляет собой полный граф с множеством вершин S .

Пусть **MST** (G_S) минимальное остовное дерево G_S .

Для любого графа H , **cost**(H) является суммой весов всех ребер в H .

Обозначаем Стоимость минимального остовного дерева H как **mst**(H).

Дерево Штейнера на подмножество S , в котором все терминалы листья называется Полной $H \cup T$ нентой.

T – дерево, соединяющие каждую вершину Штейнера с терминалом. $gain_T(H) = cost(T) - cost(T[H])$

Пусть $T(H)$ граф минимальной стоимости в , который содержит H и покрывает все терминалы. Прирост H по отношению к T определяется

loss(K) является стоимостью подключения точек Штейнера из K к терминалам

Loss-Contracting Algorithm (k-LCA)

Loss-Contracting Algorithm (k-LCA)

ВХОД: полный граф $G = (V; E; \text{cost})$ с весом рёбер, удовлетворяющих неравенству треугольника, набором терминалов $S \subset V$ и целым $k \leq |S|$

ВЫХОД: k-ограниченное дерево Штейнера графа G , включающее все терминалы из S

$T = \text{MST}(G_S)$

$H = G_S$

Repeat forever

Поиск k-ограниченной полной компоненты K с максимальным $r = \text{gain}_T(K) / \text{loss}(K)$

If $r \leq 0$ then exit repeat

$H = H \cup K$

$T = \text{MST}(T \cup C[K])$

Output дерево $\text{MST}(H)$

Время работы Loss-Contracting алгоритма в квази-двудольных графах.

Loss-Contracting алгоритм может быть реализован за общее время работы

$$O(n^2m),$$

где m и n - количество терминалов и нетерминалов соответственно

Коэффициент Аппроксимации .

Теорема: для любого экземпляра ST ,
стоимость аппроксимации ST
производится с помощью алгоритма

$$Approx \leq loss_k \cdot \ln \left(1 + \frac{mst - opt_k}{loss_k} \right) + opt_k$$

$$Approx \approx 1 + \ln 3/2 < 1.55$$