ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ФОРМУЛИ ЛАНГРАНЖА, НЬЮТОНА, ГАУСА, СТІРЛІНГА, БЕСЕЛЛЯ

Виконав студент
групи К 11 1/9
Тараненко Юрій

Інтерполяці́йний многочле́н Лагра́нжа

- многочлен мінімального степеня, що приймає дані значення у даному наборі точок. Для n+1 пар чисел (X0, Y0), (X1, Y1) … (Xn, Yn),

де всі Xi різні, існує єдиний многочлен L(x) степеня не більшого від n, для якого L(Xi) = Yi.

У найпростішому випадку n=1 - це лінійний многочлен, якого — пряма, що проходить через дві задані точки.

Визначення

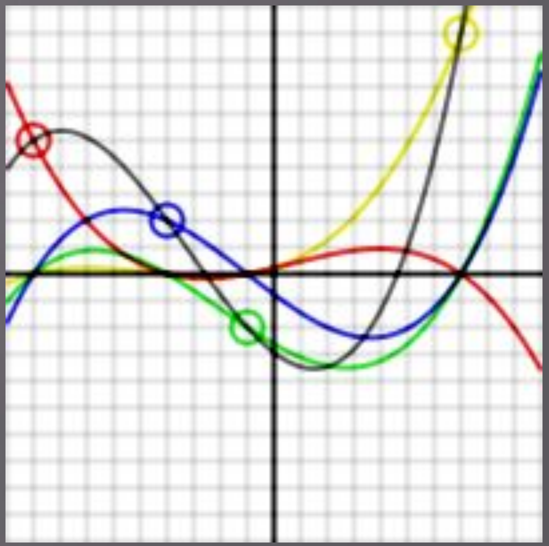
Лагранж, запропонував спосіб обчислення таких $L(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j l_j(x)$ енів:
де базисні поліноми визначаються за формулою:

$$l_j(x) = \prod_{i=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \cdots \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_j - x_n}$$

Очевидно, що lj (x) мають такі властивості:

1. Це поліноми степеня n
2. lj (Xj) = 1
3. lj (Xj) = 0 при i = j

Звідси випливає, що L(x), як лінійна комбіна-
ція lj(x), може мати степень не більший від



Цей приклад представляє інтерполяційний многочлен Лагранжа для чотирьох точок (-9,5), (-4,2),(-1,-2) і (7 ,9), а також поліноми $y_j\ l_j(x)$, кожний з яких проходить через одну з виділених точок, та приймає нульове

Застосування

- Поліноми Ланграньжа використовуються для інтерполяції, а також для чисельного інтегрування. Нехай для функції f(x) відомі значення yj = f(xj) у деяких точках. Тоді ця функція може інтерполюватися $f(x) \approx \sum_{j=0}^{n} f(x_j) l_j(x)$ Зокрема $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \int_a^b l_j(x)dx$. Значення інтегралів від lj не залежать від f(x), тож їх можна обчислювати заздалегідь, знаючи послідовність Xi.

Для випадку рівномірного розподілу на відрізку вузлів інтерполяції

- У вказаному випадку можна виразити Xi через відстань між вузлами інтерполяції h та початкову точку Xo: $x_j \equiv x_0 + jh$ і як наслідо $x_i - x_j \equiv (i-j)h$

  Якщо підставити ці вирази у формулу базисного полінома та винести h за знаки множення у чисельнику та знаменнику, отримаємо

$$l_i(x) = \prod_{j=0, i\neq j}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{\prod\limits_{j=0, i\neq j}^{n} (x - x_0 - jh)}{h^{n-1} \prod\limits_{j=0, i\neq j}^{n} (i - j)} = \frac{h^{n-1} \prod\limits_{j=0, i\neq j}^{n} \left(\frac{x - x_0}{h} - j\right)}{h^{n-1} \prod\limits_{j=0, i\neq j}^{n} (i - j)}$$

Для випадку рівномірного розподілу на відрізку вузлів інтерполяції

Після цього можна ввести заміну змін $y = \frac{x - x_0}{h}$ і отримати поліном від y, який будується з використанням лише цілочисленної арифметики. Недоліком цього підходу є факторіальна складність чисельника та знаменника, що вимагає використання алгоритмів з багатобайтним представленням чисел.

Інтерполяційні формули Ньютона

- \- формули обчислювальної математики, що застосовуються для полиномиального інтерполяції.

  Якщо вузли інтерполяції рівновіддалені і впорядковані за величиною, так що $x_{i+1} – x_i = h = const$, тобто $x_i = x_0 + ih$, то інтерполяційний многочлен можна записати у формі Ньютона.

  Інтерполяційні поліноми у формі Ньютона зручно використовувати, якщо точка інтерполяції знаходиться поблизу початку (пряма формула Ньютона або кінця таблиці (зворотна формула Ньютона).

Коротка форма інтерполяційної формули Ньютона

- У разі рівновіддалених центрів інтерполяції, що знаходяться на одиничному відстані один від одного, справедли $P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} C_x^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k f(k)$

де C_x^m - узагальнені на область дійсних чисел біноміальні коефіцієнти.

Пряма інтерполяційна формула Ньютона

- Або перша інтерполяційна формула Ньютона, застосовується для інтерполяції

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

де

$$q = \frac{x - x_0}{h},\ y_i = f_i$$

а вирази виду $\Delta^k y_i$ кінцеві різниці.

Зворотня інтерполяційна формула Ньютона

- або друга інтерполяційна формула Ньютона, застосовується для інтерполяції

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

$$q = \frac{x - x_n}{h}$$

де

Інтерполяційна формула Гауса

- \- формула, що використовує як вузли інтерполяції, найближчі до точки інтерполяції x вузлів. Якщо $x = x_0 + th$, то

$$G_{2n+1}(x_0+th) = f_0+f^1_{1/2}t+f^2_0\frac{t(t-1)}{2!}+\ldots+f^{2n}_0\frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!}, \qquad (1)$$

написана по вузлах $x_0,\ x_0+h,\ x_0-h,\ldots,\ x_0+nh,\ x_0-nh$

називається формулою Гауса для

$$G_{2n+1}(x_0+th) = f_0+f^1_{-1/2}t+f^2_0\frac{t(t+1)}{2!}+\ldots+f^{2n}_0\frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2](t+n)}{(2n)!}, \qquad (2)$$

написана по вузлах $x_0,\ x_0-h,\ x_0+h,\ldots,\ x_0-nh,\ x_0+nh$

Інтерполяційна формула Гауса

називається формулою Гауса для інтерполяції назад . У формулах (1) і (2) використані кінцеві різниці , що визначаються таким чином:

$$f^1_{i+1/2} = f_{i+1} - f_i, \; f^m_i = f^{m-1}_{i+1/2} - f^{m-1}_{i-1/2}$$

Перевага інтерполяційної формули Гауса полягає в тому , що зазначений вибір вузлів інтерполяції забезпечує найкращу оцінку залишкового члена в порівнянні з будь-яким іншим вибором, а впорядкованість вузлів по мірі їх близькості до точки інтерполяції зменшує обчислювальну погрішність інтерполяції.

Інтерполяційна формула Стірлінга

$$f(x_0+th) = y_0 + \frac{t}{1!}\mu\delta y_0 + \frac{t^2}{2!}\delta^2 y_0 + \frac{t(t^2-1^2)}{3!}\mu\delta^3 y_0 + \frac{t^2(t^2-1^2)}{4!}\delta^4 y_0 +$$

$$+ \frac{t(t^2-1^2)(t^2-2^2)}{5!}\mu\delta^5 y_0 + \cdots + \frac{t^2(t^2-1^2)(t^2-2^2)\cdots[t^2-(k-1)^2]}{(2k)!}\delta^{2k} y_0$$

- застосовується при інтерполяції функцій для значень x, близьких до одного з середніх вузлів a; в цьому випадку природно взяти непарне число вузлів X-k, … , X-1, Xo, X1, … , Xk, вважаючи a центральним вузлом Xo.

Інтерполяційна формула Бесселя

$$f(x_0+th) \approx \mu y_{1/2} + \frac{(t-1/2)}{1!}\delta y_{1/2} + \frac{t(t-1)}{2!}\mu\delta^2 y_{1/2} + \frac{t(t-1)(t-1/2)}{3!}\delta^3 y_{1/2} +$$
$$+ \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)}{4!}\mu\delta^4 y_{1/2} + \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)(t-1/2)}{5!}\delta^5 y_{1/2} + \cdots +$$
$$+ \frac{t(t-1)(t+1)\cdots(t-k)(t+k-1)(t-1/2)}{(2k+1)!}\delta^{2k+1} y_{1/2}$$

- застосовується при інтерполяції функцій для значень x, близьких середині а між двома вузлами; тут природно брати парне число вузлів

  X-k, … , X-1, Xo, X1, … , Xk, Xk+1, і розташовувати їх симетрично щодо а(Xo < a < X1).

Презентацію виконав студент групи К 11 1/9 Тараненко Юрій