

# ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ФОРМУЛИ ЛАНГРАНЖА, НЬЮТОНА, ГАУСА, СТІРЛІНГА, БЕСЕЛЛЯ

Виконав студент  
групи К 11 1/9  
Тараненко Юрій

# Інтерполяційний многочлен Лагранжа

- многочлен мінімального степеня, що приймає дані значення у даному наборі точок. Для  $n+1$  пар чисел  $(X_0, Y_0), (X_1, Y_1) \dots (X_n, Y_n)$ ,

де всі  $X_i$  різні, існує єдиний многочлен  $L(x)$  степеня не більшого від  $n$ , для якого  $L(X_i) = Y_i$ .

У найпростішому випадку  $n=1$  - це лінійний многочлен, якого — пряма, що проходить через дві задані точки.

# Визначення

Лагранж, запропонував спосіб обчислення таких  $L(x) = \sum_{j=0}^n y_j l_j(x)$  рівнів: де базисні поліноми визначаються за формулою:

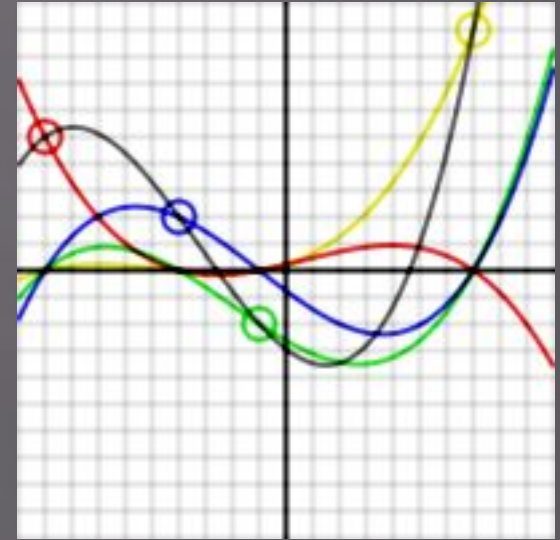
$$l_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \dots \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \dots \frac{x - x_n}{x_j - x_n}$$

Очевидно, що  $l_j(x)$  мають такі властивості:

1. Це поліноми степеня  $n$
2.  $l_j(x_j) = 1$
3.  $l_j(x_i) = 0$  при  $i \neq j$

Звідси випливає, що  $L(x)$ , як лінійна комбінація

$l_j(x)$ , може мати ступінь не більший від



Цей приклад представляє інтерполяційний многочлен Лагранжа для чотирьох точок  $(-9, 5)$ ,  $(-4, 2)$ ,  $(-1, -2)$  і  $(7, 9)$ , а також поліноми  $y_j l_j(x)$ , кожен з яких проходить через одну з виділених точок, та приймає нульове

# Застосування

- ▣ Поліноми Лангранжа використовуються для інтерполяції, а також для чисельного інтегрування. Нехай для функції  $f(x)$  відомі значення  $y_j = f(x_j)$  у деяких точках. Тоді ця функція може інтерполюватися  $f(x) \approx \sum_{j=0}^n f(x_j)l_j(x)$ . Зокрема  $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=0}^n f(x_j) \int_a^b l_j(x)dx$ . Значення інтегралів від  $l_j$  не залежать від  $f(x)$ , тож їх можна обчислювати заздалегідь, знаючи послідовність  $X_i$ .

# Для випадку рівномірного розподілу на відрізок вузлів інтерполяції

- У вказаному випадку можна виразити  $X_i$  через відстань між вузлами інтерполяції  $h$  та початкову точку  $X_0$ :  $x_j \equiv x_0 + jh$  і як наслідок  $x_i - x_j \equiv (i - j)h$

Якщо підставити ці вирази у формулу базисного полінома та винести  $h$  за знаки множення у чисельнику та знаменнику, отримаємо

$$l_i(x) = \prod_{j=0, i \neq j}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{\prod_{j=0, i \neq j}^n (x - x_0 - jh)}{h^{n-1} \prod_{j=0, i \neq j}^n (i - j)} = \frac{h^{n-1} \prod_{j=0, i \neq j}^n \left(\frac{x-x_0}{h} - j\right)}{h^{n-1} \prod_{j=0, i \neq j}^n (i - j)}$$

# Для випадку рівномірного розподілу на відрізку вузлів інтерполяції

Після цього можна ввести заміну змін  $y = \frac{x - x_0}{h}$  і отримати поліном від  $y$ , який будується з використанням лише цілочисленної арифметики. Недоліком цього підходу є факторіальна складність чисельника та знаменника, що вимагає використання алгоритмів з багатобайтним представленням чисел.

# Інтерполяційні формули Ньютона

- ▣ - формули обчислювальної математики, що застосовуються для полиноміального інтерполяції.

Якщо вузли інтерполяції рівновіддалені і впорядковані за величиною, так що  $x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$ , тобто  $x_i = x_0 + ih$ , то інтерполяційний многочлен можна записати у формі Ньютона.

Інтерполяційні поліноми у формі Ньютона зручно використовувати, якщо точка інтерполяції знаходиться поблизу початку (пряма формула Ньютона або кінця таблиці (зворотна формула Ньютона)).

# Коротка форма інтерполяційної формули Ньютона

- У разі рівновіддалених центрів інтерполяції, що знаходяться на одиничному відстані один від одного, справедливі  $P_n(x) = \sum_{m=0}^n C_x^m \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} C_m^k f(k)$  де  $C_x^m$  - узагальнені на область дійсних чисел біноміальні коефіцієнти.



# Пряма інтерполяційна формула Ньютона

- Або перша інтерполяційна формула Ньютона, застосовується для інтерполяції

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

$$q = \frac{x - x_0}{h}, y_i = f_i$$

$$\Delta^k y_i$$

де

а вирази виду  $\Delta^k y_i$  кінцеві різниці.

# Зворотня інтерполяційна формула Ньютона

- або друга інтерполяційна формула Ньютона, застосовується для інтерполяції

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

$$q = \frac{x - x_n}{h}$$

де

# Інтерполяційна формула Гауса

- - формула, що використовує як вузли інтерполяції, найближчі до точки інтерполяції  $x = x_0 + th$  пів. Якщо  $t \in [0, 1]$ , то

$$G_{2n+1}(x_0+th) = f_0 + f_{1/2}^1 t + f_0^2 \frac{t(t-1)}{2!} + \dots + f_0^{2n} \frac{t(t^2-1) \dots [t^2 - (n-1)^2](t-n)}{(2n)!}, \quad (1)$$

$$x_0, x_0 + h, x_0 - h, \dots, x_0 + nh, x_0 - nh$$

написана по вузлах

називається формулою Гауса для

$$G_{2n+1}(x_0+th) = f_0 + f_{-1/2}^1 t + f_0^2 \frac{t(t+1)}{2!} + \dots + f_0^{2n} \frac{t(t^2-1) \dots [t^2 - (n-1)^2](t+n)}{(2n)!}, \quad (2)$$

$$x_0, x_0 - h, x_0 + h, \dots, x_0 - nh, x_0 + nh$$

написана по вузлах

# Інтерполяційна формула Гауса

називається формулою Гауса для інтерполяції назад . У формулах ( 1 ) і ( 2 ) використані кінцеві різниці , що визначаються таким чином:

$$f_{i+1/2}^1 = f_{i+1} - f_i, \quad f_i^m = f_{i+1/2}^{m-1} - f_{i-1/2}^{m-1}$$

Перевага інтерполяційної формули Гауса полягає в тому , що зазначений вибір вузлів інтерполяції забезпечує найкращу оцінку залишкового члена в порівнянні з будь-яким іншим вибором, а впорядкованість вузлів по мірі їх близькості до точки інтерполяції зменшує обчислювальну погрішність інтерполяції.

# Інтерполяційна формула Стірлінга

$$f(x_0 + th) = y_0 + \frac{t}{1!} \mu \delta y_0 + \frac{t^2}{2!} \delta^2 y_0 + \frac{t(t^2 - 1^2)}{3!} \mu \delta^3 y_0 + \frac{t^2(t^2 - 1^2)}{4!} \delta^4 y_0 + \\ + \frac{t(t^2 - 1^2)(t^2 - 2^2)}{5!} \mu \delta^5 y_0 + \dots + \frac{t^2(t^2 - 1^2)(t^2 - 2^2) \dots [t^2 - (k-1)^2]}{(2k)!} \delta^{2k} y_0$$

- застосовується при інтерполяції функцій для значень  $x$ , близьких до одного з середніх вузлів  $a$ ; в цьому випадку природно взяти непарне число вузлів  $X-k, \dots, X-1, X_0, X_1, \dots, X_k$ , вважаючи  $a$  центральним вузлом  $X_0$ .

# Інтерполяційна формула Бесселя

$$f(x_0+th) \approx \mu y_{1/2} + \frac{(t-1/2)}{1!} \delta y_{1/2} + \frac{t(t-1)}{2!} \mu \delta^2 y_{1/2} + \frac{t(t-1)(t-1/2)}{3!} \delta^3 y_{1/2} + \\ + \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)}{4!} \mu \delta^4 y_{1/2} + \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)(t-1/2)}{5!} \delta^5 y_{1/2} + \dots + \\ + \frac{t(t-1)(t+1)\dots(t-k)(t+k-1)(t-1/2)}{(2k+1)!} \delta^{2k+1} y_{1/2}$$

- застосовується при інтерполяції функцій для значень  $x$ , близьких середині  $a$  між двома вузлами; тут природно брати парне число вузлів  $X_{-k}, \dots, X_{-1}, X_0, X_1, \dots, X_k, X_{k+1}$ , і розташовувати їх симетрично щодо  $a$  ( $X_0 < a < X_1$ ).

Презентацію виконав  
студент групи К 11 1/9  
Тараненко Юрій