Обратные тригонометрические функции

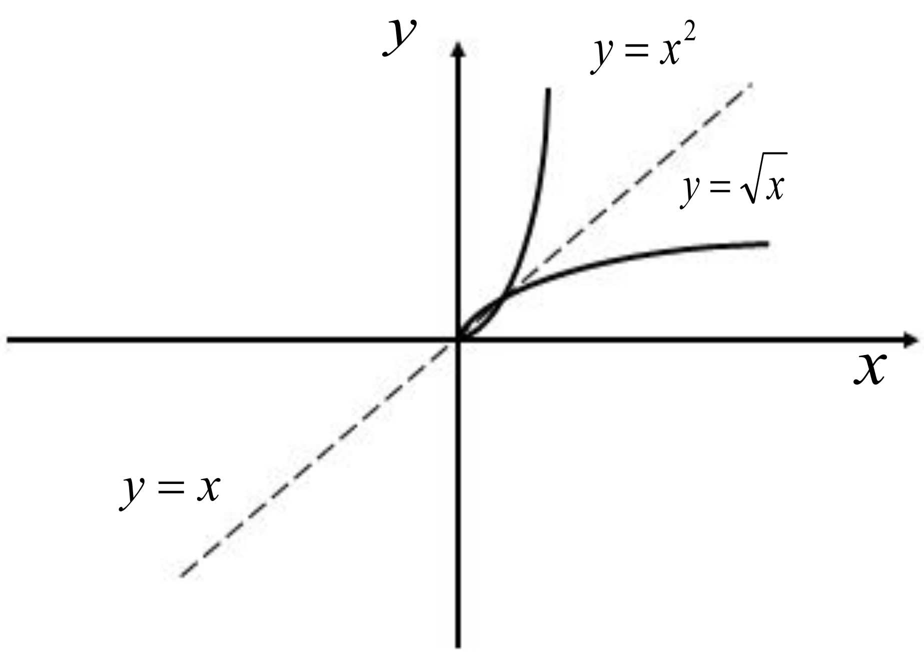
$y = x^2, x > 0$

?

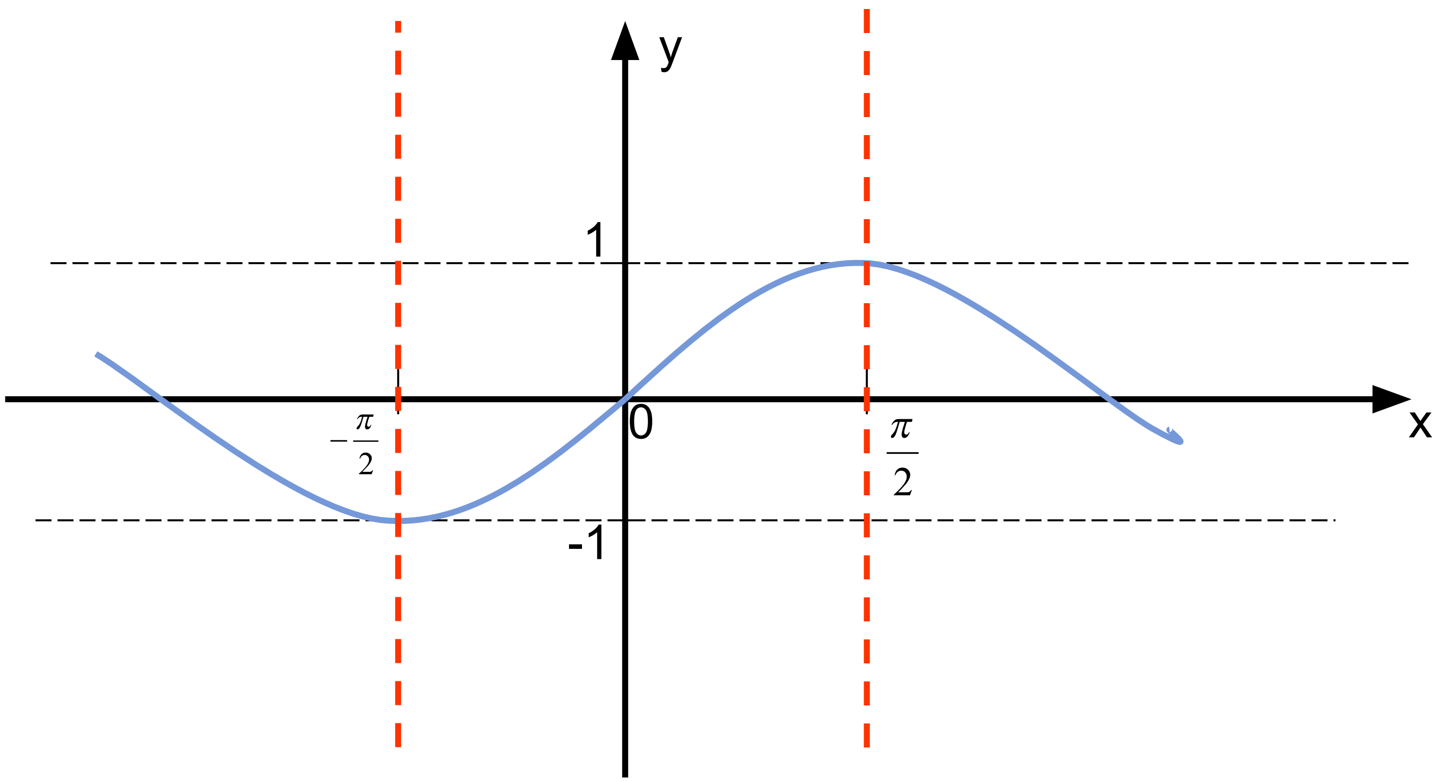
$y = \sqrt{x}$

D = [0;+∞)
E = [0;+∞)

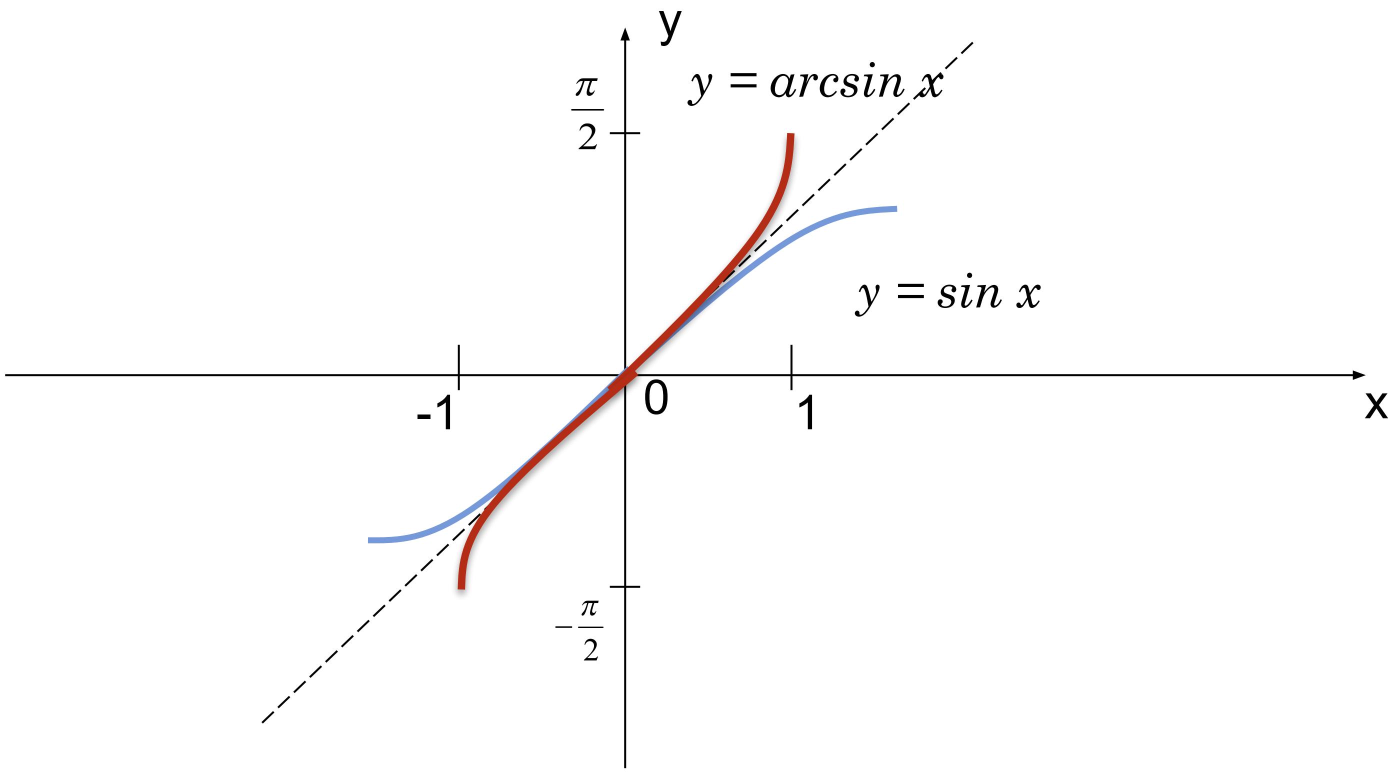
D = [0;+∞)
E = [0;+∞)



Функция $y = \ sin\ x$



Функция *y = arcsin x*



Свойства функции *y = arcsin x*

- D(f) = [-1;1].
- E(f) = [-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$].
- Функция является нечётной:

  arcsin(- x) = - arcsin x.
- *Функция возрастает.*
- *Функция непрерывна.*

Определение 1.

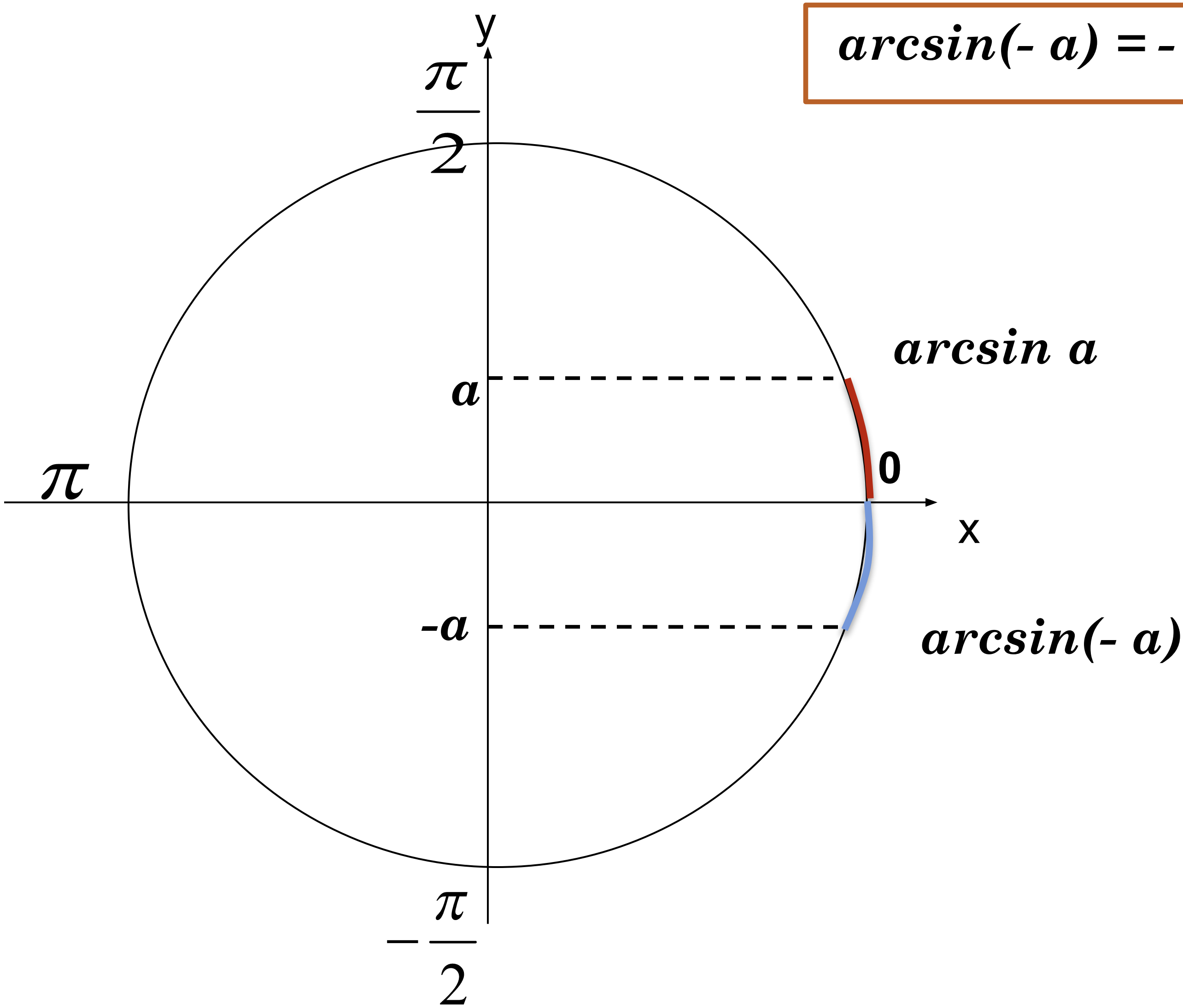
Если |a| ≤ 1, то

$$\arcsin a = t \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin t = a, \\ -\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$$

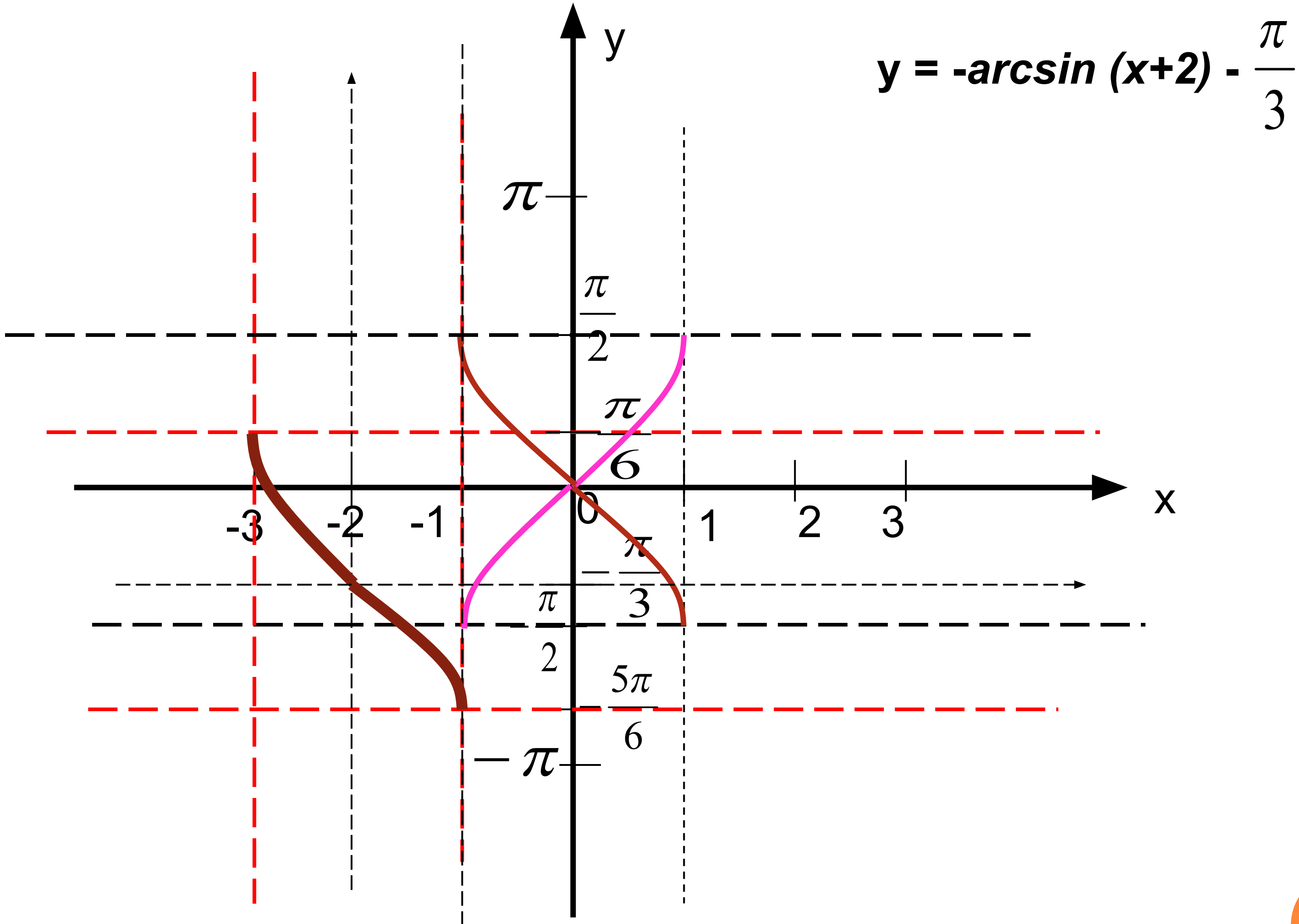
$$\sin(\arcsin a) = a$$

Геометрическая иллюстрация

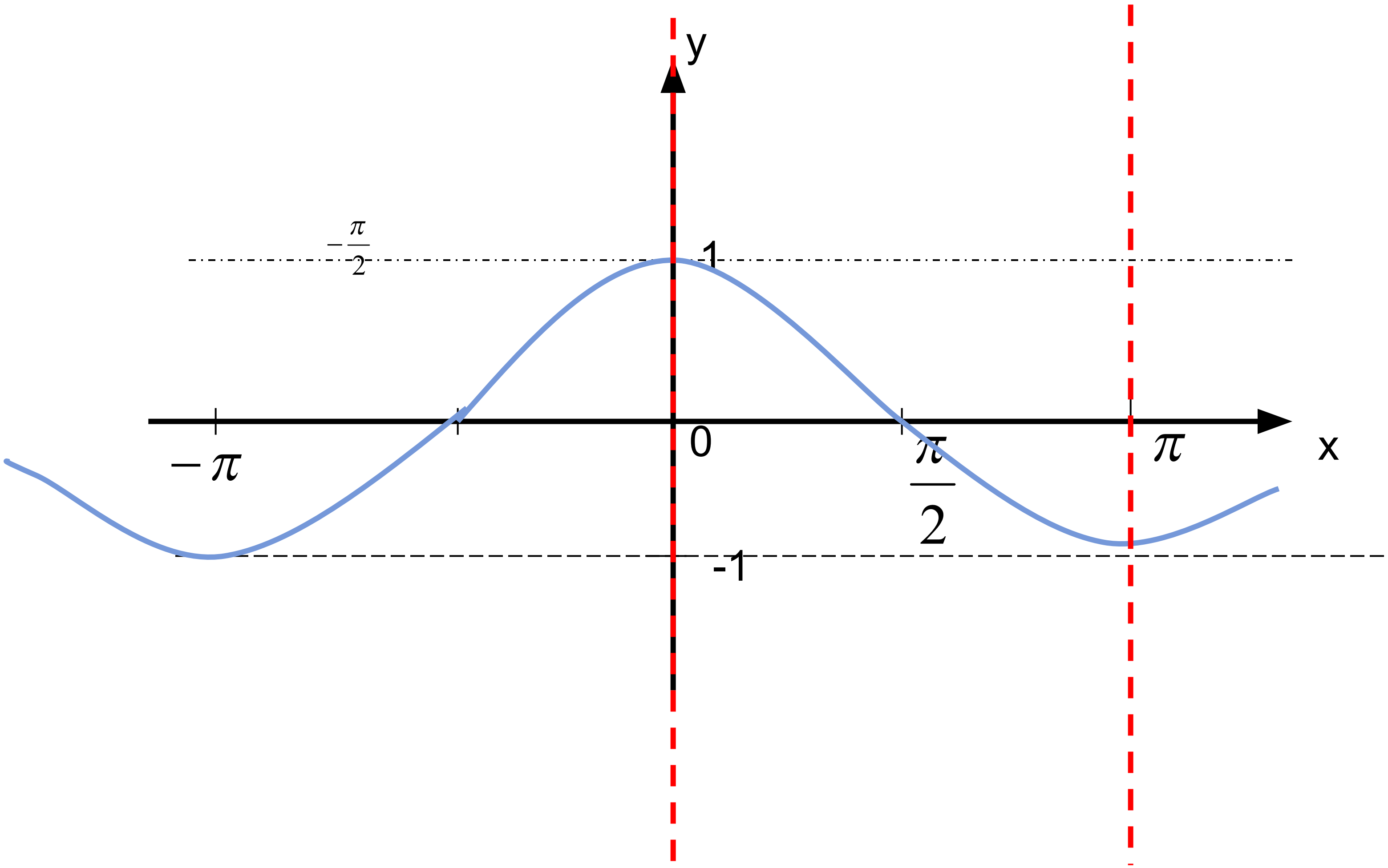
$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$



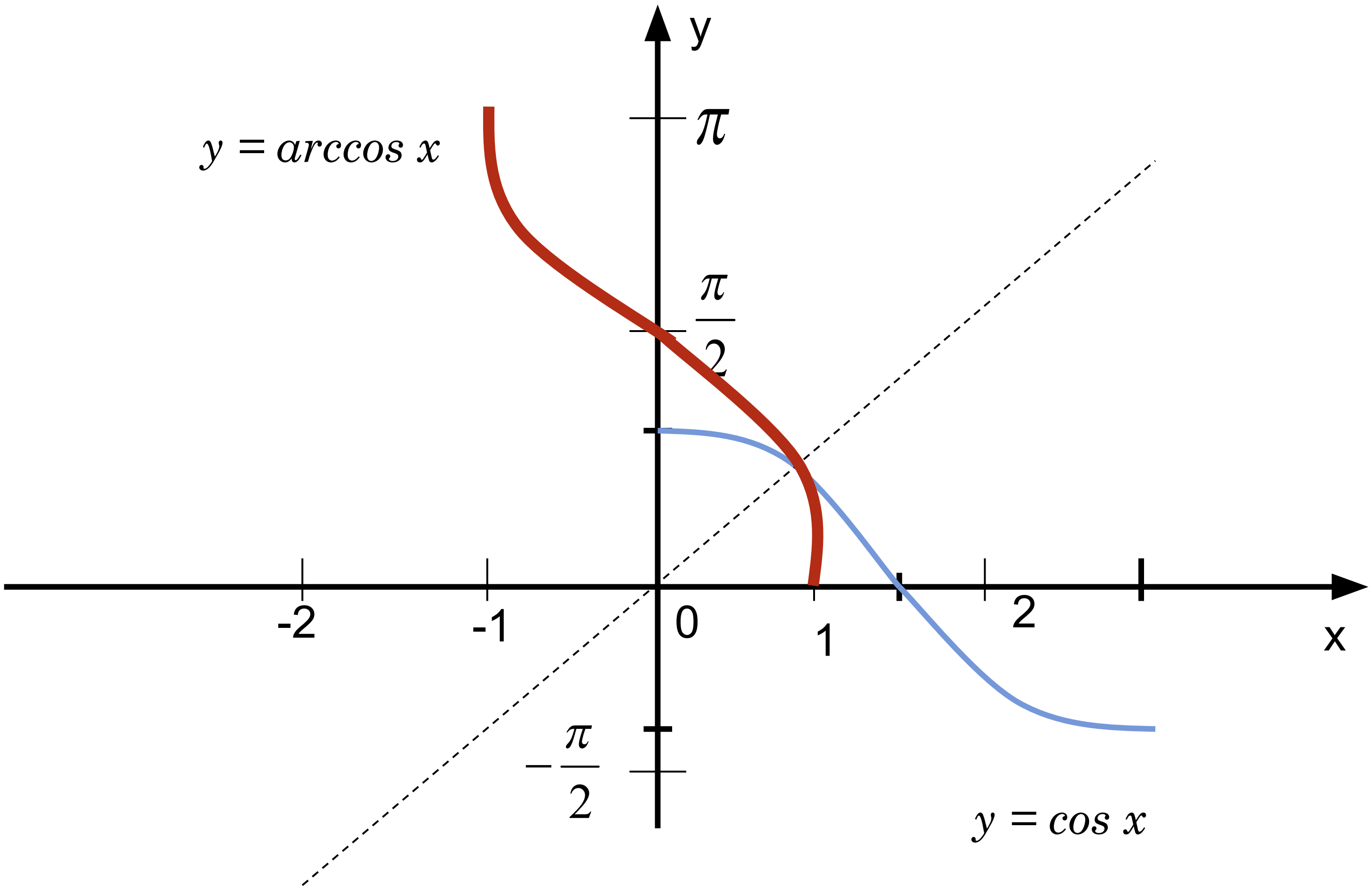
Проверка задания № 21.8 (б)



Функция $y = \cos x$



Функция *y = arccos x*



Свойства функции $y = arccos\ x$

- D(f) = [-1;1].
- E(f) = [0;π].
- Функция не является ни чётной, ни нечётной.
- *Функция убывает.*
- *Функция непрерывна.*

Определение 2.

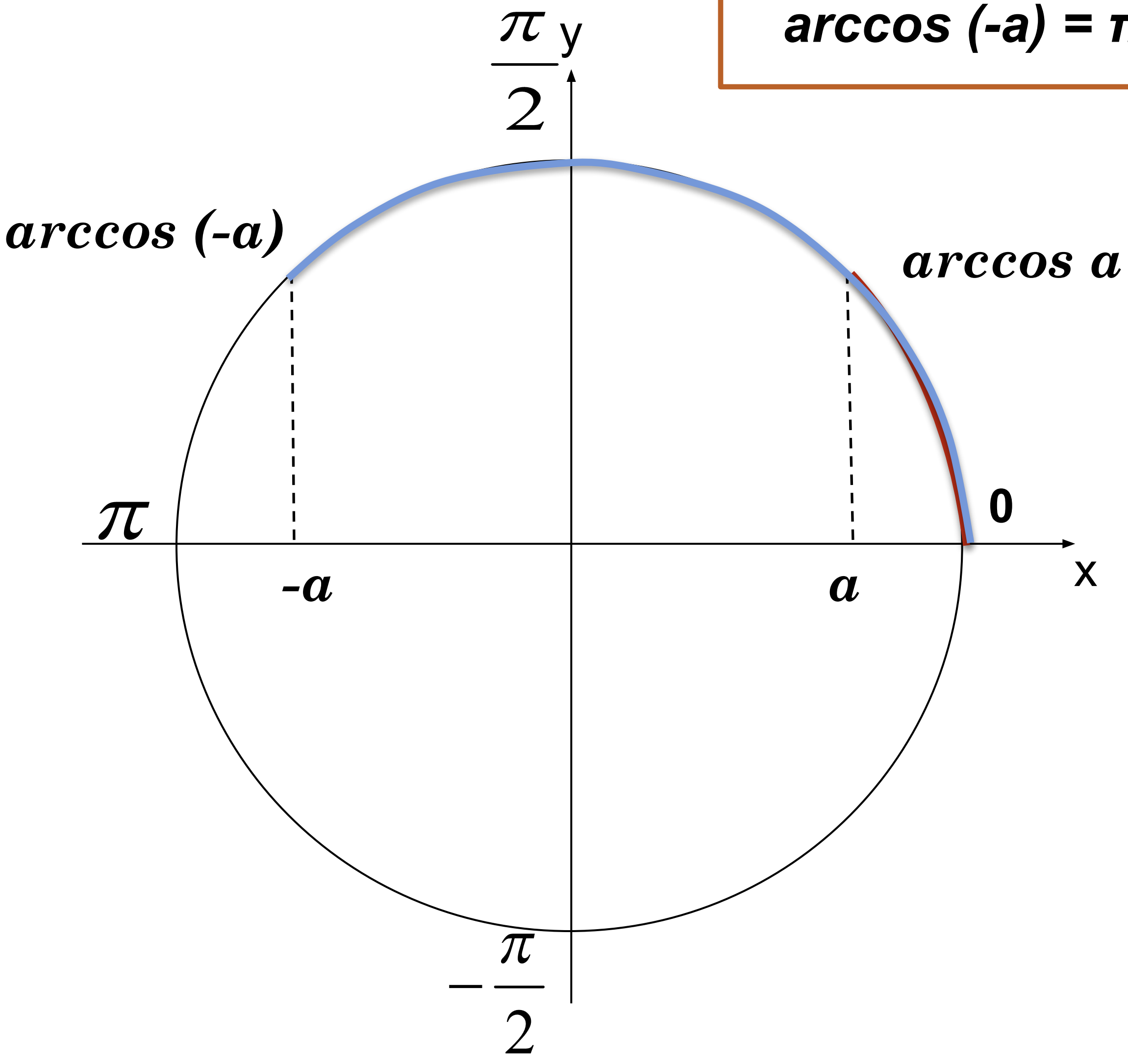
Если $|a| \le 1$, *то*

$$\arccos a = t \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos t = a, \\ 0 \le t \le \pi; \end{cases}$$

$$\cos(\arccos a) = a$$

Геометрическая иллюстрация

arccos (-a) = π – arccos a



Вычислите:

а) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$

б) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$

в) $\mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$

Домашнее задание

- Учебник §21п.1,2 (учить опр., свойства, формулы), п.3,4(конспект)
- Задачник №21.26а), №21.17.

Упражнение 1.

- Заполните пропуски в таблице:

a	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
arcsin a	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	0	—	—	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$
arccos a	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	—	—	π	$\frac{5\pi}{6}$
arctg a	$\frac{\pi}{4}$	—	0	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	—
arcctg a	$\frac{\pi}{4}$	—	—	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	—

Упражнение 2

- Найдите область определения и область значений выражений:

Выражение	Область определения	Область значений
$2\arccos x$	$[-1;1]$	$[0;2\pi]$
$\arcsin 3x$	$\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$	$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
$\operatorname{arctg}\sqrt{x}$	$[0;+\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$
$-3\operatorname{arcctg} x$	$(-\infty;+\infty)$	$(-3\pi;0)$

Упражнение 3

- Имеет ли смысл выражение:

$\arcsin(-1/2)$	$\arccos\sqrt{5}$	$\arcsin(3-\sqrt{20})$
да	нет	нет
$\arcsin 1{,}5$	$\arccos(-\sqrt{3}+1)$	$\arccos\dfrac{\pi}{5}$
нет	да	да

Упражнение 4

- Сравните числа:

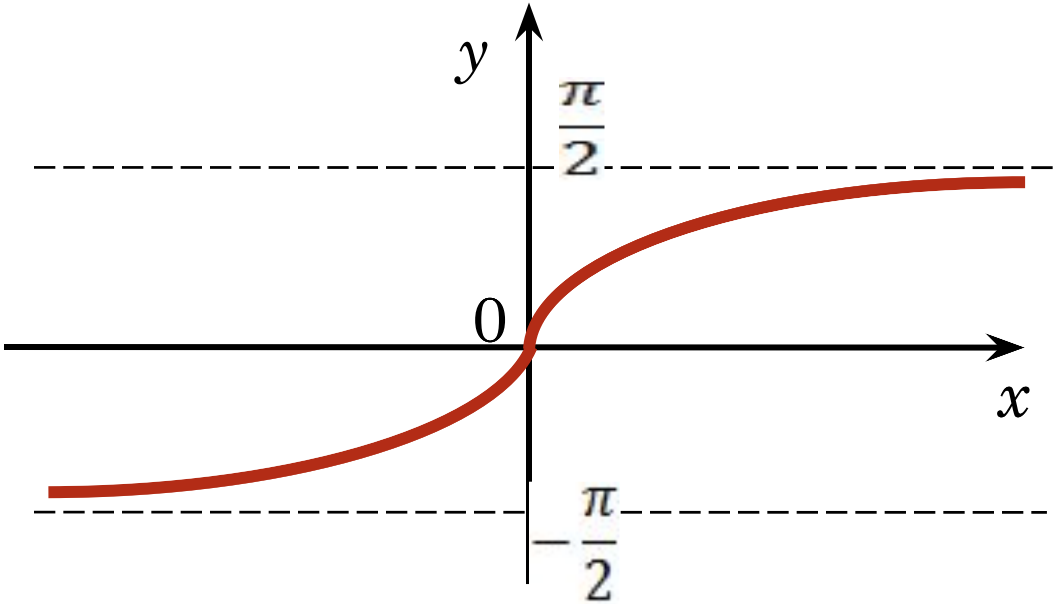
$\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ < $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\arccos 0{,}3$ > $\arccos 0{,}7$

$\arcsin \frac{1}{3}$ < $\arcsin \frac{2}{3}$

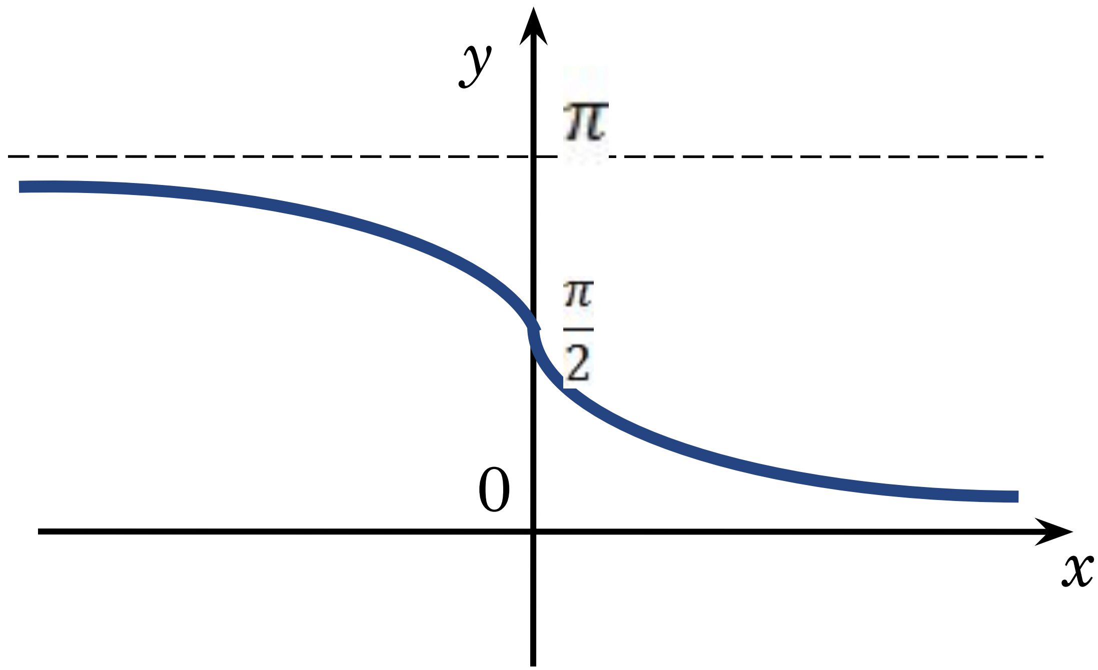
$arctg 1$ < $arctg 1{,}5$

Функция *y = arctg x*



- D (*f*) = (- ∞; +∞).
- E (*f*) = $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- Функция нечётная: $arctg(-x) = -arctg\,x$
- Функция возрастает.
- Функция непрерывна.

Функция *y = arcctg x*



- D (*f*) = (- ∞; +∞).
- E (*f*) = (0; π).
- Функция не является ни чётной, ни нечётной.
- Функция убывает.
- Функция непрерывна.

Тригонометрические операции над обратными тригонометрическими функциями

$\sin(\arcsin x) = x \quad , \ \|x\| \le 1$	$\cos(\arccos x) = x \quad , \ \|x\| \le 1$
$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \ \|x\| \le 1$	$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \quad , \ \|x\| \le 1$
$tg(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ , \ \|x\| < 1$	$tg(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad , \|x\| \le 1, \ x \ne 0$
$ctg(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \ \|x\| \le 1, \ x \ne 0$	$ctg(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ , \ \|x\| < 1$
$tg(arctg x) = x$	$ctg(arcctg x) = x$
$\sin(arctg x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\sin(arcctg x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cos(arctg x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos(arcctg x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$ctg(arctg x) = \frac{1}{x} \quad , \quad x \ne 0$	$tg(arcctg x) = \frac{1}{x} \ , \quad x \ne 0$

Домашнее задание

- 1) §21(л.1,2,3,4 – повт., п. 5 – чит.)

- 2) Дано $arcsin\frac{7}{\sqrt{50}}$. Выразить через остальные аркфункц.....

- 3) Вычислить: а) $\arcsin(sin10)$; б) $arcctg(ctg(-3))$

- 4) №21.52 а)б) (по желанию).

Упражнение 5

Варианты ответов:

1. Вычислить $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$ — а) $\frac{\pi}{3}$ б) $\frac{\pi}{6}$ в) $\frac{\pi}{4}$ г) $\frac{\pi}{2}$
2. Вычислить $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ — а) $\frac{\pi}{3}$ б) $\frac{2\pi}{3}$ в) $-\frac{\pi}{3}$ г) $-\frac{\pi}{6}$
3. Вычислить $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ — а) $\frac{\pi}{3}$ б) $\frac{5\pi}{6}$ в) $\frac{\pi}{4}$ г) $\frac{\pi}{2}$
4. Вычислить $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ — а) $-\frac{\pi}{4}$ б) $\frac{3\pi}{4}$ в) $\frac{\pi}{4}$ г) $\frac{\pi}{2}$
5. Вычислить $\mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$ — а) $\frac{2\pi}{3}$ б) $-\frac{\pi}{3}$ в) $\frac{\pi}{6}$ г) $-\frac{\pi}{6}$
6. Вычислить $\mathrm{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ — а) $\frac{5\pi}{6}$ б) $\frac{3\pi}{4}$ в) $\frac{2\pi}{3}$ г) $-\frac{\pi}{6}$

Упражнение 6

Найти область определения функции $y = \arcsin \frac{x}{6}$

Найти область определения функции $y = \arccos 7x$

Найти область определения функции $y = \mathrm{arctg}\, 12x$

Найти область определения функции $y = \mathrm{arcctg} \frac{x}{9}$

Упражнение 7

Найдите наименьшее значение *а*, при котором существует выражение

$$arcsin\,(3-8a)$$

Решение.

$$-1 \leq 3 - 8a \leq 1$$

$$-4 \leq -8a \leq -2$$

$$0{,}25 \leq a \leq 0{,}5$$

Значит, наименьшее значение $\boldsymbol{a}$ = 0,25.

Вид уравнения	Пример
Простейшие уравнения (по определению аркфункции)	$\arcsin(x^2 - 4x + 3) = 0$
Уравнения, приводимые к квадратным уравнениям	$2\arcsin^2 x - 7\arcsin x + 3 = 0$
Уравнения, левая и правая части которых являются одноименными тригонометрическими функциями	$\arcsin(x^2 - 3x) = \arcsin(-2x)$
Уравнения, левая и правая части которых являются разноименными тригонометрическими функциями	$\arcsin 2x = arccos x$