

**ОБРАТНЫЕ
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ**



$$y = x^2, x > 0$$

$$D = [0; +\infty)$$

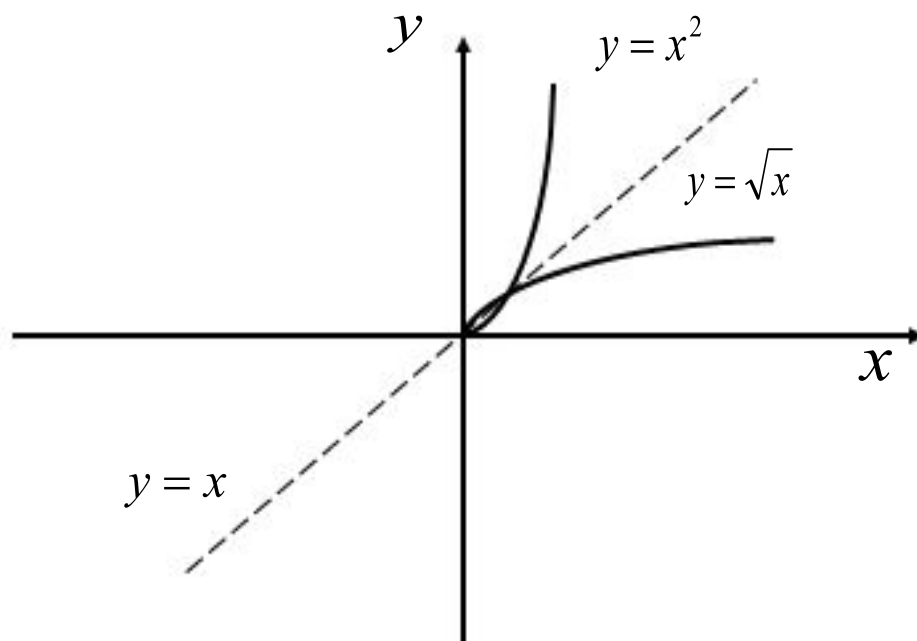
$$E = [0; +\infty)$$

?

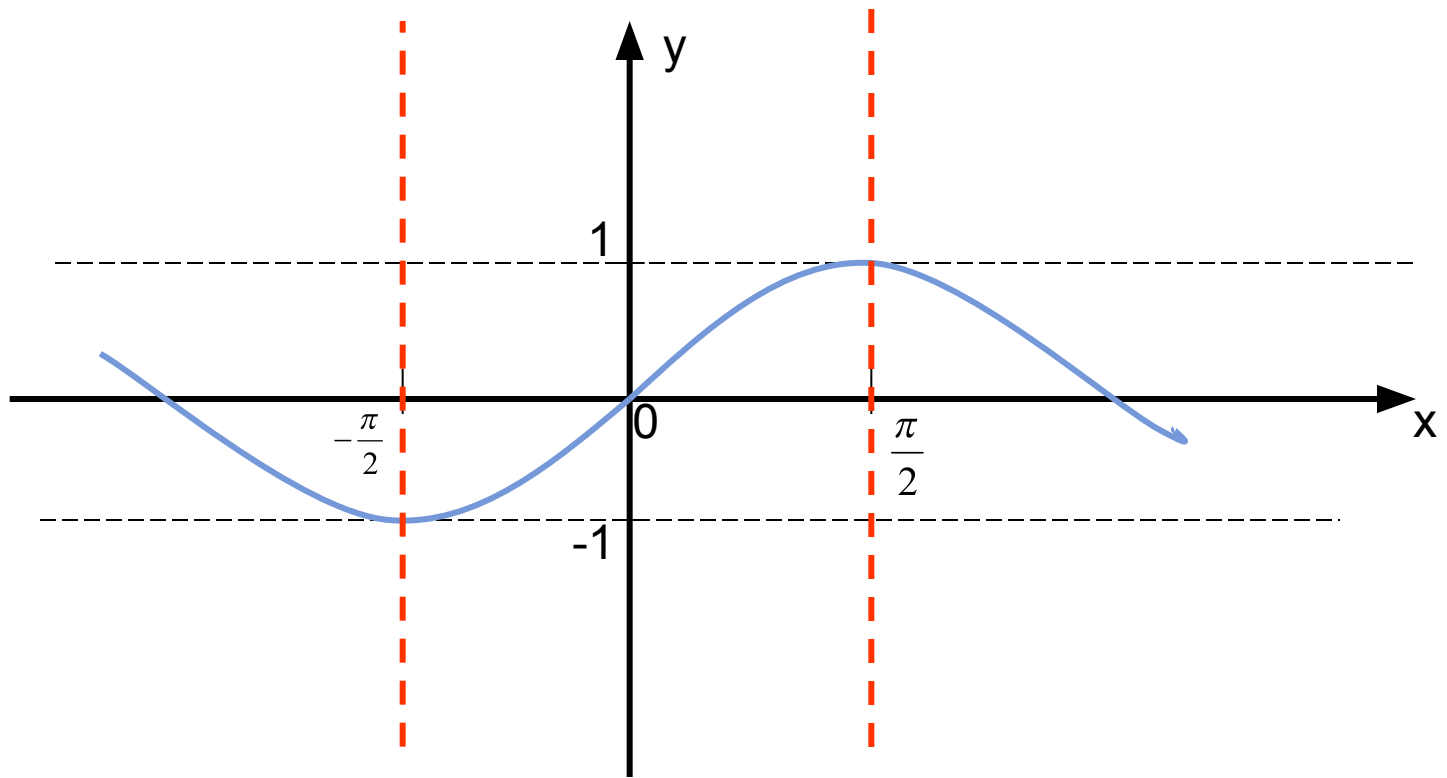
$$y = \sqrt{x}$$

$$D = [0; +\infty)$$

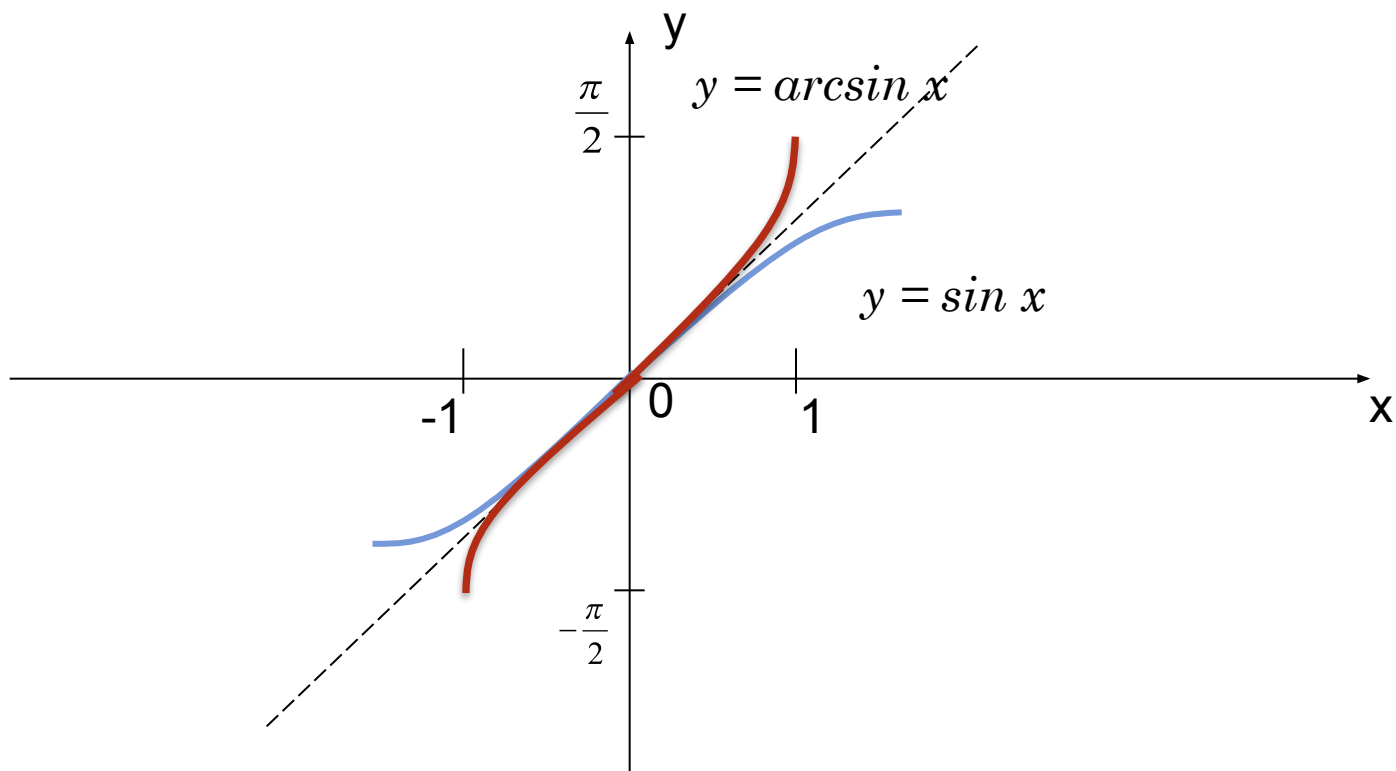
$$E = [0; +\infty)$$



Функция $y = \sin x$



Функция $y = \arcsin x$



Свойства функции $y = \arcsin x$

- $D(f) = [-1; 1]$.
- $E(f) = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
- Функция является нечётной:
$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$
- Функция возрастает.
- Функция непрерывна.



Определение 1.

Если $|a| \leq 1$, то

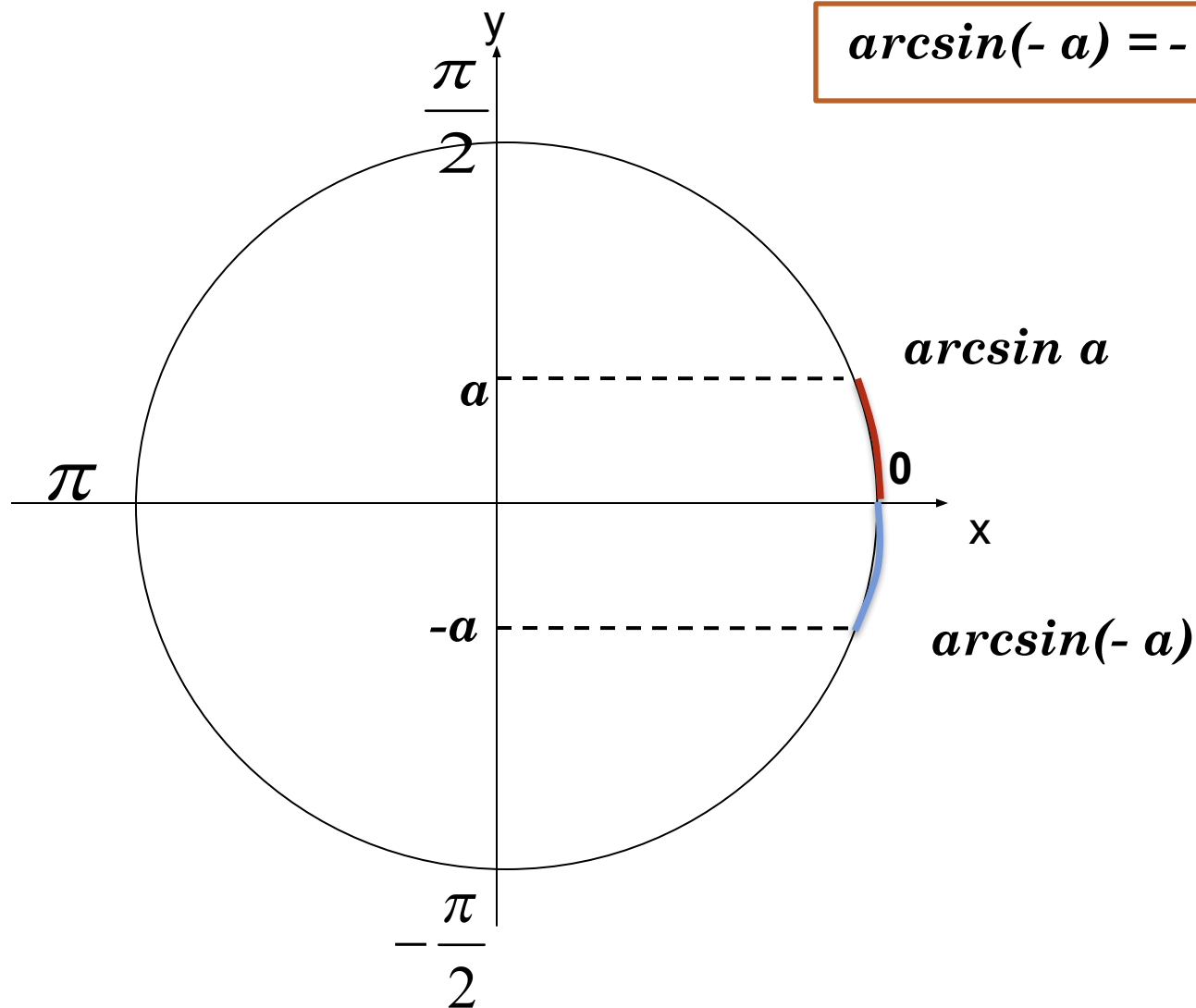
$$\arcsin a = t \iff \begin{cases} \sin t = a, \\ -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

$$\sin (\arcsin a) = a$$

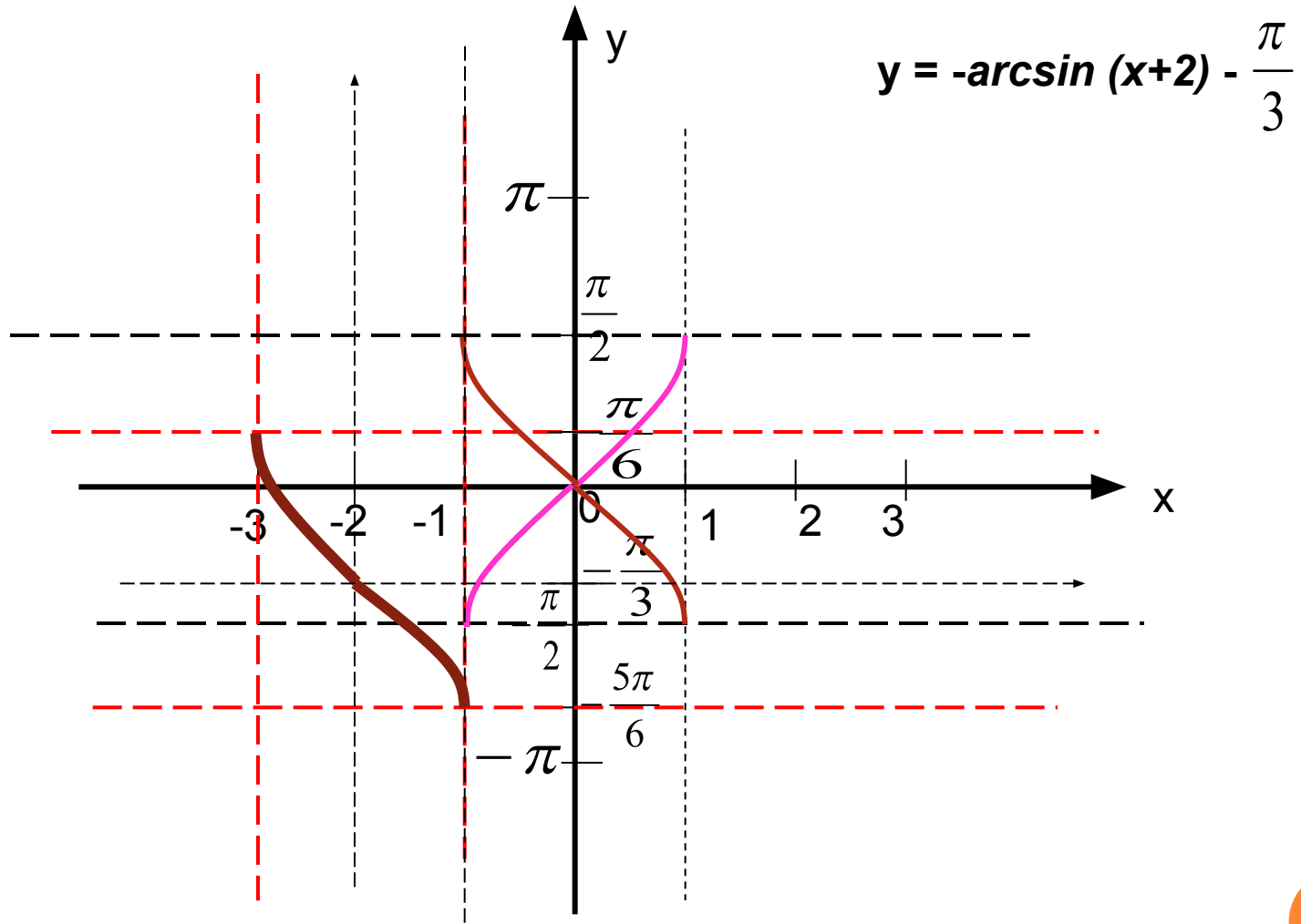


Геометрическая иллюстрация

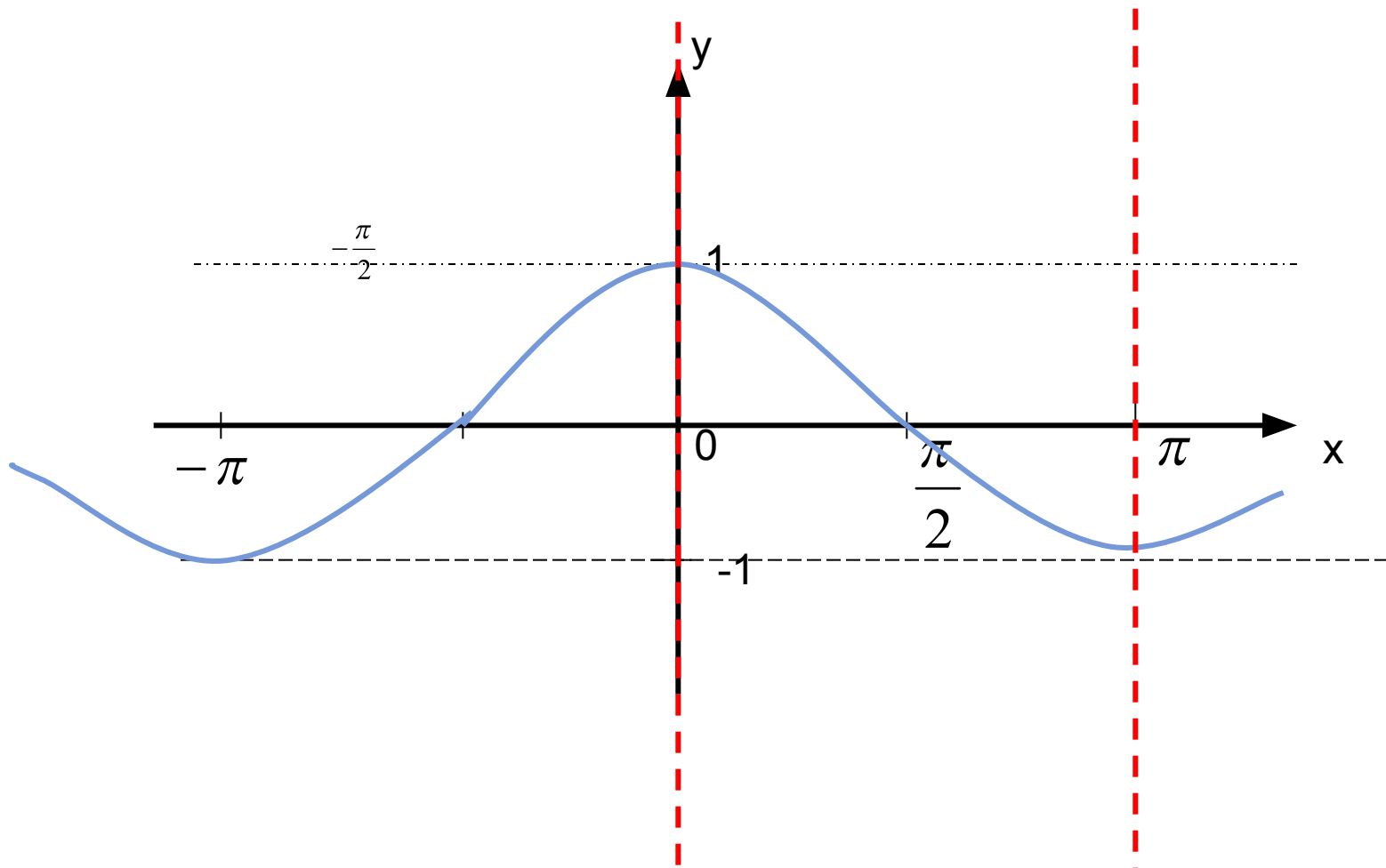
$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$



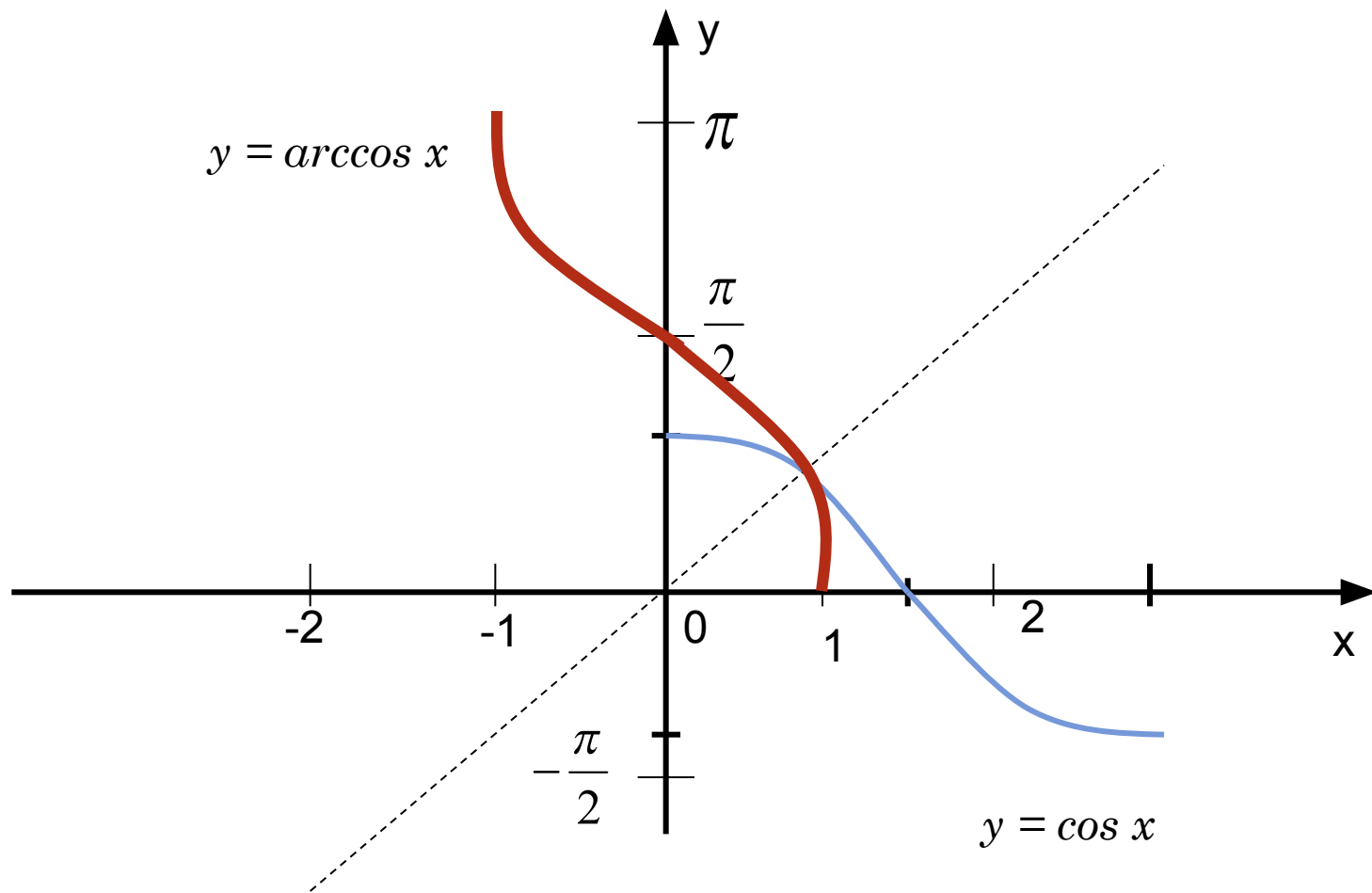
ПРОВЕРКА ЗАДАНИЯ № 21.8 (Б)



ФУНКЦИЯ $y = \cos x$



Функция $y = \arccos x$



Свойства функции $y = \arccos x$

- $D(f) = [-1; 1]$.
- $E(f) = [0; \pi]$.
- Функция не является ни чётной, ни нечётной.
- *Функция убывает.*
- *Функция непрерывна.*



Определение 2.

Если $|a| \leq 1$, то

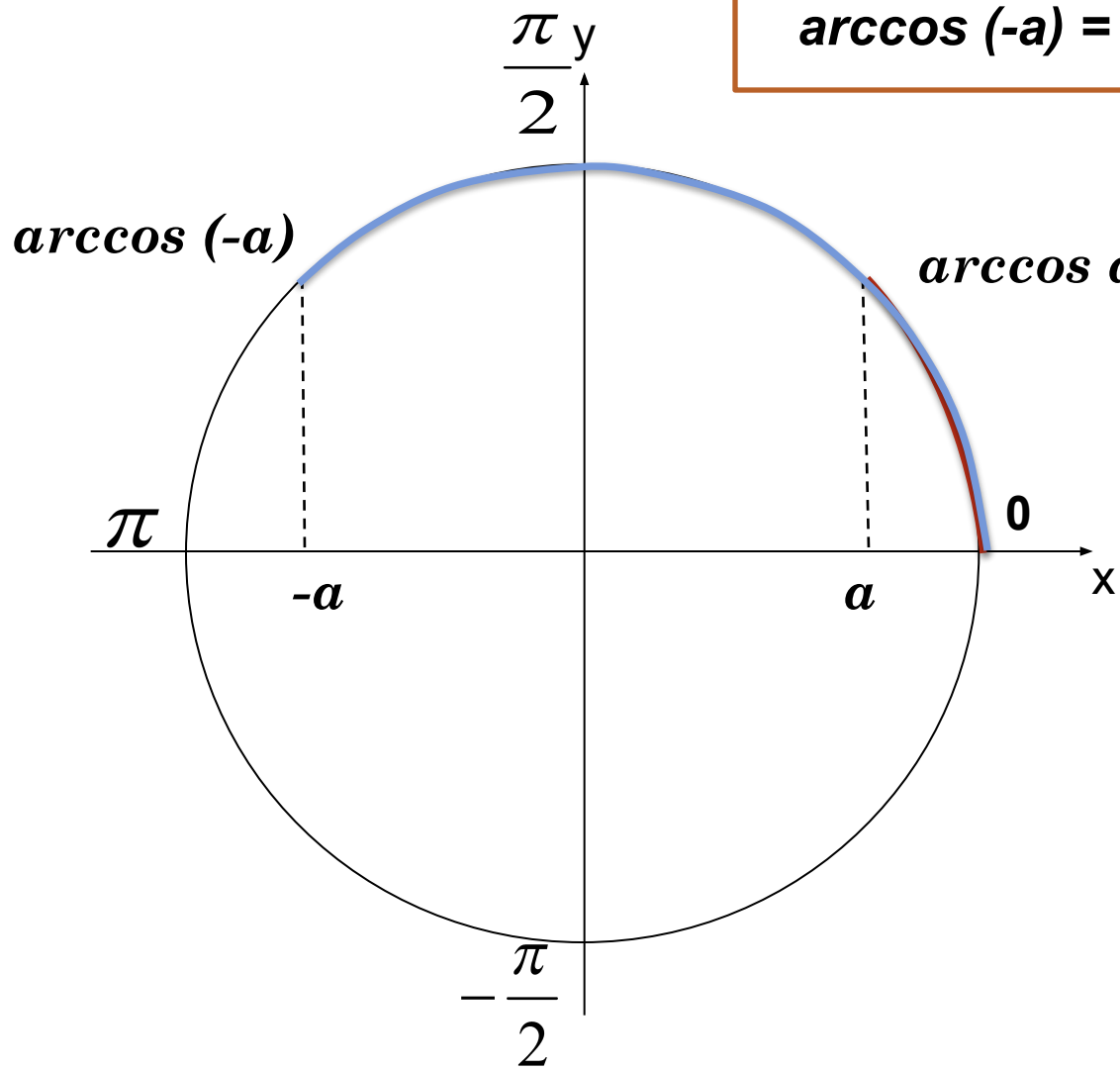
$$\arccos a = t \iff \begin{cases} \cos t = a, \\ 0 \leq t \leq \pi; \end{cases}$$

$$\cos (\arccos a) = a$$



Геометрическая иллюстрация

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$



Вычислите:

a) $\sin (\arcsin \frac{3}{5})$

б) $\cos (\arcsin \frac{3}{5})$

в) $\text{tg} (\arcsin \frac{3}{5})$



ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

- Учебник §21 п.1,2 (учить опр., свойства, формулы), п.3,4(конспект)
- Задачник №21.26а), №21.17.



УПРАЖНЕНИЕ 1.

□ Заполните пропуски в таблице:

a	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\arcsin a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	0	—	—	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$
$\arccos a$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	—	—	π	$\frac{5\pi}{6}$
$\arctg a$	$\frac{\pi}{4}$	—	0	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	—
$\text{arcctg } a$	$\frac{\pi}{4}$	—	—	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	—



УПРАЖНЕНИЕ 2

- Найдите область определения и область значений выражений:

Выражение	Область определения	Область значений
$2\arccos x$	$[-1;1]$	$[0;2\pi]$
$\arcsin 3x$	$\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$	$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
$\operatorname{arctg} \sqrt{x}$	$[0;+\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$
$-3\operatorname{arccotg} x$	$(-\infty;+\infty)$	$(-3\pi;0)$



УПРАЖНЕНИЕ 3

- Имеет ли смысл выражение:

$$\arcsin(-1/2)$$

да

$$\arccos \sqrt{5}$$

нет

$$\arcsin(3 - \sqrt{20})$$

нет

$$\arcsin 1,5$$

нет

$$\arccos(-\sqrt{3} + 1)$$

да

$$\arccos \frac{\pi}{5}$$

да



УПРАЖНЕНИЕ 4

□ Сравните числа:

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

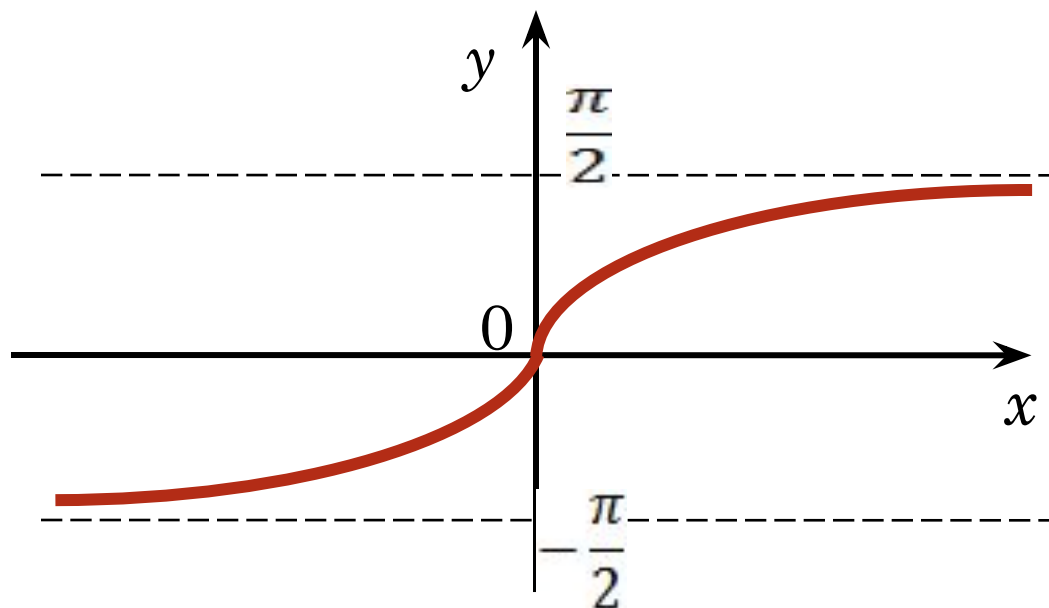
$$\arccos 0,3 > \arccos 0,7$$

$$\arcsin \frac{1}{3} < \arcsin \frac{2}{3}$$

$$\arctg 1 < \arctg 1,5$$



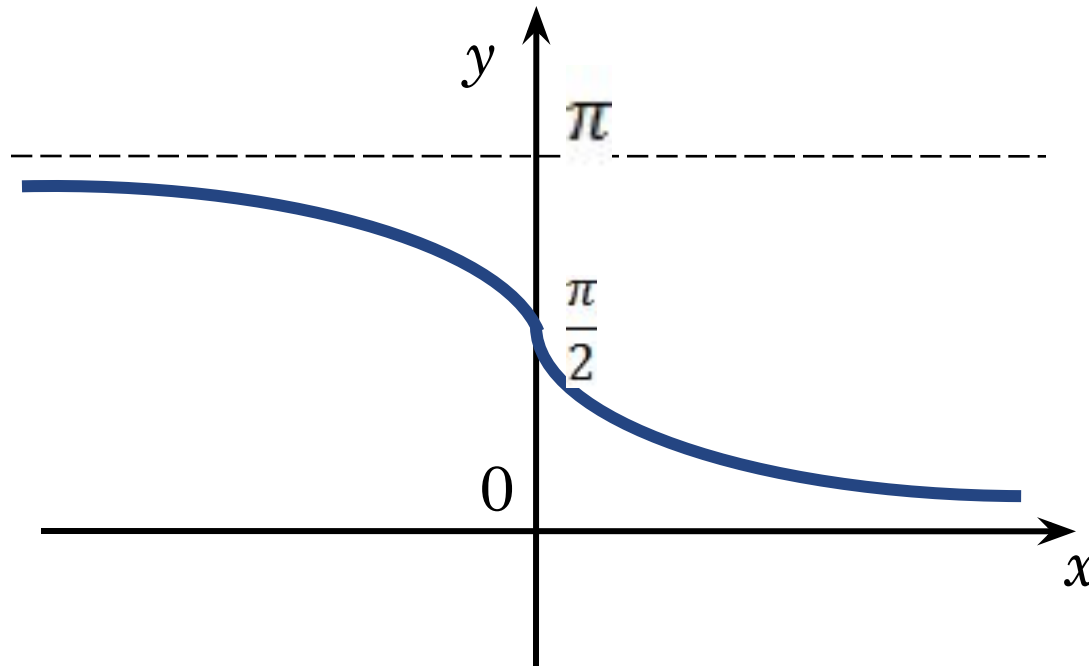
Функция $y = \operatorname{arctg} x$



- $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
- $E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- Функция нечётная: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$
- Функция возрастает.
- Функция непрерывна.



Функция $y = \operatorname{arcsctg} x$



- $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
- $E(f) = (0; \pi)$.
- Функция не является ни чётной, ни нечётной.
- Функция убывает.
- Функция непрерывна.



ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ОБРАТНЫМИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

$\sin(\arcsin x) = x$, $ x \leq 1$	$\cos(\arccos x) = x$, $ x \leq 1$
$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, $ x \leq 1$	$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, $ x \leq 1$
$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $ x < 1$	$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $ x \leq 1, x \neq 0$
$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $ x \leq 1, x \neq 0$	$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $ x < 1$
$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$	$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$
$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$	$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

- 1) §21(л.1,2,3,4 – повт., п. 5 – чит.)
- 2) Дано $\arcsin \frac{7}{\sqrt{50}}$. Выразить через остальные аркфункц.....
- 3) Вычислить: а) $\arcsin(\sin 10)$; б) $\text{arcctg}(\text{ctg}(-3))$
- 4) №21.52 а)б) (по желанию).



УПРАЖНЕНИЕ 5

1. Вычислить $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Вычислить $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$

3. Вычислить $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

4. Вычислить $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Вычислить $\operatorname{arctg} (-\sqrt{3})$

6. Вычислить $\operatorname{arctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Варианты ответов:

а) $\frac{\pi}{3}$ б) $\frac{\pi}{6}$ в) $\frac{\pi}{4}$ г) $\frac{\pi}{2}$

а) $\frac{\pi}{3}$ б) $\frac{2\pi}{3}$ в) $-\frac{\pi}{3}$ г) $-\frac{\pi}{6}$

а) $\frac{\pi}{3}$ б) $\frac{5\pi}{6}$ в) $\frac{\pi}{4}$ г) $\frac{\pi}{2}$

а) $-\frac{\pi}{4}$ б) $\frac{3\pi}{4}$ в) $\frac{\pi}{4}$ г) $\frac{\pi}{2}$

а) $\frac{2\pi}{3}$ б) $-\frac{\pi}{3}$ в) $\frac{\pi}{6}$ г) $-\frac{\pi}{6}$

а) $\frac{5\pi}{6}$ б) $\frac{3\pi}{4}$ в) $\frac{2\pi}{3}$ г) $-\frac{\pi}{6}$

6

УПРАЖНЕНИЕ 6

Найти область определения функции $y = \arcsin \frac{x}{6}$

Найти область определения функции $y = \arccos 7x$

Найти область определения функции $y = \operatorname{arctg} 12x$

Найти область определения функции $y = \operatorname{arcctg} \frac{x}{9}$



УПРАЖНЕНИЕ 7

Найдите наименьшее значение a , при котором существует выражение

$$\arcsin(3 - 8a)$$

Решение.

$$-1 \leq 3 - 8a \leq 1$$

$$-4 \leq -8a \leq -2$$

$$0,25 \leq a \leq 0,5$$

Значит, наименьшее значение $a = 0,25$.



Вид уравнения	Пример
Простейшие уравнения (по определению аркфункции)	$\arcsin(x^2 - 4x + 3) = 0$
Уравнения, приводимые к квадратным уравнениям	$2\arcsin^2 x - 7\arcsin x + 3 = 0$
Уравнения, левая и правая части которых являются одноименными тригонометрическими функциями	$\arcsin(x^2 - 3x) = \arcsin(-2x)$
Уравнения, левая и правая части которых являются разноименными тригонометрическими функциями	$\arcsin 2x = \arccos x$