ОБЫКНОВЕННЫЕ ОБЩИЕ АННУИТЕТЫ

Темы, изучаемые сегодня:

1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ОБЩИЕ АННУИТЕТЫ
2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ОБЩИХ АННУИТЕТОВ В ПРОСТЫЕ АННУИТЕТЫ
3. ИТОГОВАЯ СУММА И НАСТОЯЩАЯ СТОИМОСТЬ ОБЫКНОВЕННОГО ОБЩЕГО АННУИТЕТА
4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТЫХ АННУИТЕТОВ В ОБЩИЕ
5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ ДЛЯ ОБЩЕГО АННУИТЕТА
6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРОКА ОБЩЕГО АННУИТЕТА

ОБЫКНОВЕННЫЕ ОБЩИЕ АННУИТЕТЫ

Аннуитет был определен как последовательность платежей, обычно равной величины, делаемых через равные промежутки времени. Он был назван простым аннуитетом, если интервал платежа точно совпадает с периодом конверсии; в противном случае он называется “общим аннуитетом”

Например: Иванов вносит вклады по 50 тыс. руб. на счет в сберегательном банке в конце каждого квартала. Если банк начисляет проценты поквартально, вклады образуют простой аннуитет. Если банк использует другой период конверсии, вклады образуют общий аннуитет.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ОБЩИХ АННУИТЕТОВ В ПРОСТЫЕ АННУИТЕТЫ

Введем обозначения:

W- платежи общего аннуитета;

p- количество платежей общего аннуитета в год;

i- норма процента за период конверсии;

m- число периодов начисления процента в год;

R- платежи обыкновенного простого аннуитета, который является эквивалентной заменой общего аннуитета, делаемые m раз в год.

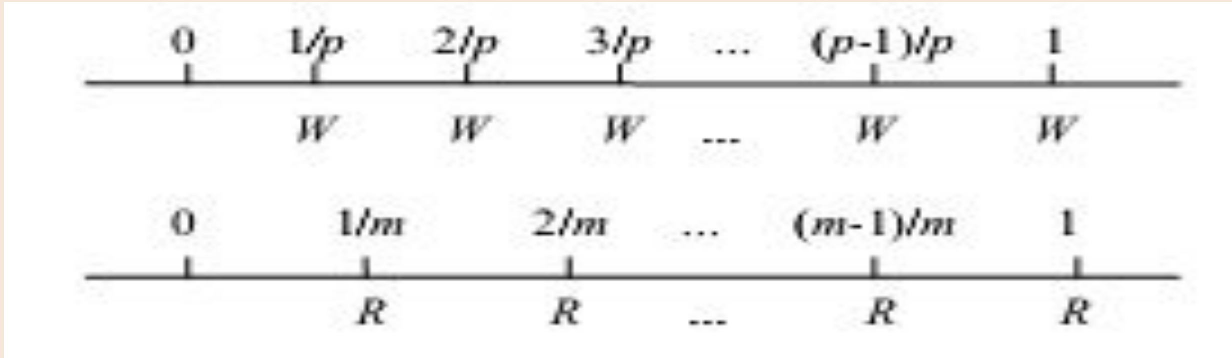
Если аннуитет заменяется другим аннуитетом, то должны быть выполнены следующие два условия :

a) норма процента должна быть

той же самой или эквивалентной;

b) стоимости обоих аннуитетов

должны быть одинаковыми в любой момент времени



Для того, чтобы эти аннуитеты были эквивалентными, определим норму процента **i'** за интервал платежа общего аннуитета, которая эквивалентна норме **i** за период начисления процента.Тогда:

$$(1+i')^p = (1+i)^m .$$

Если теперь приравнять аннуитеты в конце года, получим :

$$R\ s_{\overline{m}|i} = W\ s_{\overline{p}|i}$$

Заменяя функции составных платежей $s_{\overline{m}|i}$ и $s_{\overline{p}|i}$ их явными выражениями в обеих частях(2), будем иметь:

$$R\frac{(1+i)^m-1}{i} = W\frac{(1+i')^p-1}{i'}$$

Подставляя это в(4) окончательно получаем: $$R = W\frac{i}{(1+i)^{m/p}-1} .$$

Дробь в правой части этого равенства является обратным значени $s_{\overline{n}|i}$ функции *для дробного параметра* $n = m/p$.Так что справедливы равенства (6):

$$R = W\frac{1}{s_{\overline{m/p}|i}} \quad \text{и} \quad W = Rs_{\overline{m/p}|i}\,.$$

Значение дроби *m/p в общем случае может быть любым.*

Однако практически встречается один из следующих вариантов :

a) *m/p является целым числом : в этом случае для анализа общего* аннуитета можно использовать обычные таблицы для целочисленных значений параметра;

b) *m/p является дробью вида* $k/12$, $k = 1, 2, 3, 4$ или 6 , поскольку такие дроби встречаются довольно часто для них также составлены соответствующие таблицы функций составных платежей.

Пример 1

Сидоров получает пенсию 5 млн. руб. в конце каждого года. Какие ежемесячные выплаты эквивалентны этой сумме, если деньги стоят $j_{12} = 6\%$?

Решение: Здесь W= 5 млн. руб, p= 1, i = 1/2 %, m= 12 и нужно

определить R.

Использование равенства (6) дает:

$$R = 5000 \,/\, s_{\overline{12}|0,5\%} = 405{,}35 \text{ тыс рб}.$$

Таким образом, Сидоров мог бы получать ежемесячно 405350 рб вместо получения 5 млн рб в конце года. Такой результат получился бы, если бы мы воспользовались уравнением эквивалентности с датой сравнения в конце года.

Пример 2

Заменить платежи по 500 тыс. руб. в конце каждого квартала на полугодовые платежи, если норма процента 5% , $m = 2$.

Решение: $W = 500000$, $p = 4$, $i = 2{,}5\ \%$ и $m = 2$.

Из уравнения (6) получаем:

$$R = 500/\, s_{\overline{1/2}|2,5\%} = 500 \times 2{,}01242284 = 1006{,}2 \text{ тыс рб}$$

Таким образом, полугодовые платежи 1006,2 тыс. руб. эквивалентны по квартальным платежам 500 тыс. руб. при норме процента $j2 = 5\ \%$.

ИТОГОВАЯ СУММА И НАСТОЯЩАЯ СТОИМОСТЬ ОБЫКНОВЕННОГО ОБЩЕГО АННУИТЕТА

Идея определения итоговой суммы и настоящей стоимости обыкновенного общего аннуитета остается прежней преобразовать обыкновенный общий аннуитет в эквивалентный ему обыкновенный простой аннуитет и затем определить требуемую характеристику известными методами для простых аннуитетов.

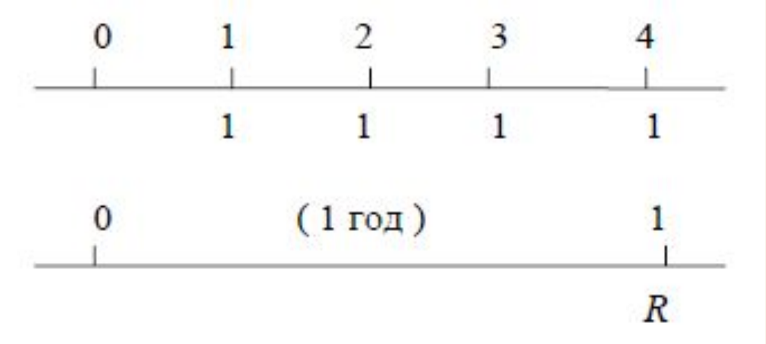
Проблемой, таким образом, является лишь преобразование общего аннуитета в простой. Как только это сделано, анализ простого аннуитета происходит стандартными способами.

Никаких дополнительных трудностей не возникает и в случае отсроченных общих аннуитетов. Они преобразовываются в простые тем же самым образом. Покажем это на примерах.

Пример 1

Иванов вносит в банк по 1 млн рб в конце каждого квартала при норме процента *j1 = 4% . Какая сумма будет у него в банке через пять* лет ?

Решение: Составим сравнительную временную диаграмму, на основе которой будет легко сделать преобразование общего аннуитета в простой. *W = 1 млн, p = 4 , m = 1 , i = 4% .*



Из уравнения (6) имеем:

$$R = 1000000 \,/\, s_{\overline{1/4}|4\%} = 1000000 \times 4{,}059510 = 4059510 \text{ рб} .$$

Аннуитет продолжается в течение пяти периодов начисления, поэтому

$$S = R\, s_{\overline{5}|4\%} = 4059510 \times 5{,}41632256 = 21987615 \text{ рб.}$$

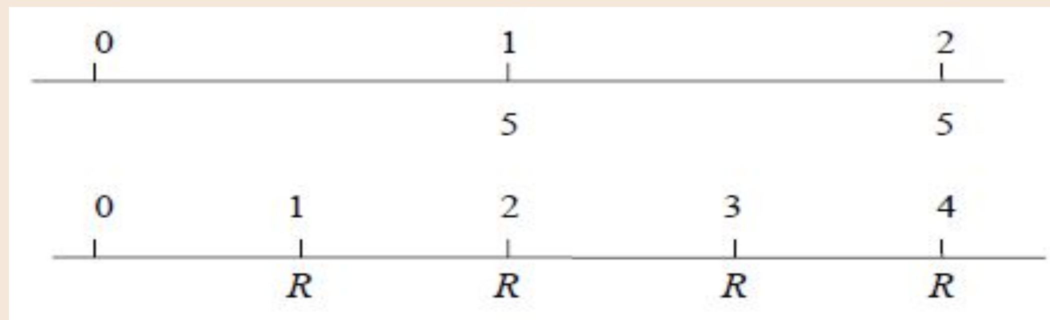
Пример 2

Найти настоящую стоимость серии полугодовых платежей по 5 млн. руб. в течение 8 лет, первый платеж в конце пятого года, если норма процента $j4 = 5\%$.

Решение: Снова изображаем исходные данные на сравнительной временной диаграмме продолжительностью 1 год. $W = 5$ *млн*, $p = 2$,$m = 4$,

$i = 1{,}25\ \%$.

Используем уравнение (6) и получаем равенство:



$$R = 5000000/\, s_{\overline{2}|1,25\%} = 5000000 \times 0{,}49689441 = 2484472 \text{ рб},$$

которое определяет квартальные платежи, эквивалентные полугодовым выплатам по 5 млн рб. Срок аннуитета равен 8 лет (32 периода конверсии) и отсрочен на 4,5 года (18 периодов конверсии). Используя ранее разработанную технику расчетов находим настоящую стоимость *A*

$$A = 2484472\ (a_{\overline{50}|1,25\%} - a_{\overline{18}|1,25\%}) =$$

$$= 2484472\ (37{,}01287574 - 16{,}02954893) = 52132488 \text{ рб.}$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТЫХ АННУИТЕТОВ В ОБЩИЕ

Иногда появляется необходимость перевода обыкновенных простых аннуитетов в обыкновенные общие аннуитеты.

Преобразование можно сделать достаточно просто с помощью второго равенства (6) и таблиц функций составных платежей. Такая задача появляется, когда требуется най[illegible] б[illegible]итета.

$$R = W\frac{1}{s_{\overline{m/p}|i}} \quad \text{и} \quad W = Rs_{\overline{m/p}|i}\,.$$

Идея нахождения общего аннуитета состоит в определении простого аннуитета, который мог бы быть использован для выполнения намеченных целей, а затем преобразования этого простого аннуитета в эквивалентный общий аннуитет

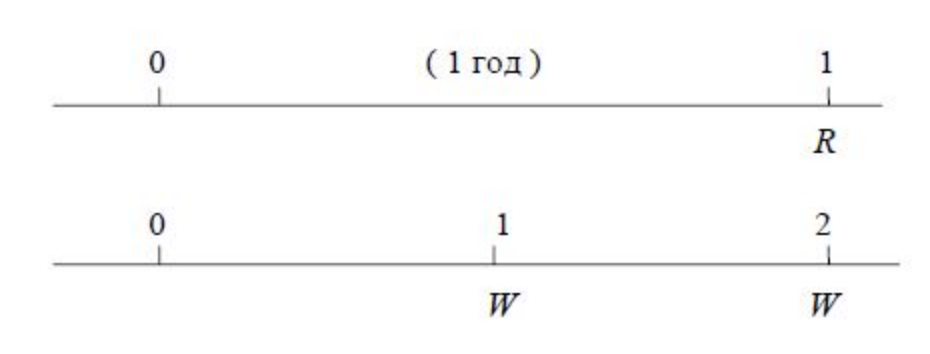
Пример 1

Дом, оцененный в 120 млн.рб, продается за 20 млн рб наличными и последовательность одинаковых полугодовых платежей в течение следующих 20 лет. Какими должны быть платежи при норме процентов $i1 = 4,5\ \%$?

Решение : Сначала решим задачу о простом аннуитете : какие понадобятся ежегодные платежи ? В этом случае в качестве ежегодных платежей простого аннуитета должны быть

$$R = 100 \text{ млн} \;/\; a_{\overline{20}|4,5\%} = 100 \times 0{,}07687614 = 7687614 \text{ рб.}$$

Теперь преобразуем простой аннуитет в требуемый общий аннуитет.
Мы имеем $R = 7687614$, $m = 1$, $p = 2$, $i = 4,5\ \%$.



Из второго уравнения (6) получаем эквивалентные полугодовые платежи W:

$$W = R\, s_{\overline{0,5}|4,5\%} = 7687614 \times 0{,}49449811 = 3801511 \text{ рб.}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ ДЛЯ ОБЩЕГО АННУИТЕТА

Простейший способ определения нормы процента для общего аннуитета
состоит в определении нормы процента для простого аннуитета на
интервал платежа, а затем преобразовании этой нормы в
эквивалентную норму на требуемый период начисления процентов.

При этом в отсутствии вычислительных средств снова можно для
получения приближенного решения воспользоваться методом линейной
интерполяции и таблицами функций составных платежей.

Это мы сможем увидеть на примере

Пример 1

Обыкновенный аннуитет на 750 тыс рб поквартально на 7 лет может быть куплен за 15750 тыс рб. Какая номинальная норма, конвертируемая ежемесячно, использована для реализации инвестиции покупателя ?

Решение: Сначала решим задачу простого аннуитета : какой должна быть поквартальная норма *i начисления процентов ?*

Для этой вспомогательной задачи используем равенство

$$750\ a_{\overline{28}|i} = 15750 \quad \text{или} \quad a_{\overline{28}|i} = (1 - (1+i)^{-28})/i = 21.$$

Составим следующую вспомогательную табличку (для рассматриваемого

72 примера анализ основывается на первых трех строчках этой вспомогательной таблицы)

i	2 %	i	2,25 %
j_{12}	0,0795	j_{12}	0,0893
$a_{\overline{28}\|i}$	21,2813	21,0000	20,6078
j_2	0,0808	j_2	0,0910

Пропорция линейной интерполяции для *i имеет вид:*

$$\frac{i - 0{,}02}{0{,}0225 - 0{,}02} = \frac{21{,}0000 - 21{,}2813}{20{,}6078 - 21{,}2813} = \frac{0{,}2813}{0{,}6735}$$

что дает i = 0,02104 или i = 2,1 % . Однако нам нужно определить не i , а j12 , которая должна быть связана с i соотношением эквивалентности

$$(1 + j_{12}/12)^{12} = (1 + i)^4 .$$

Разрешая его относительно *j12 получим:* $$j_{12} = 12\,((1 + i)^{1/3} - 1) .$$

Вычисление по этой формуле дает *j12 = 0,0835764 .*

Если возведение в дробную степень вызывает затруднение, можно далее воспользоваться приведенной выше вспомогательной табличкой, составляя новую пропорцию линейной интерполяции

$$\frac{j_{12} - 0{,}0795}{0{,}0893 - 0{,}0795} = \frac{21{,}0000 - 21{,}2813}{20{,}6078 - 21{,}2813} = \frac{0{,}2813}{0{,}6735}$$

что приводит к результату *j2 = 0,0850602 .*

Точность линейной интерполяции в данном случае равна 0,0000150 .

Спасибо за внимание !