Обзор теоретического материала

гос магистры

Множественная линейная регрессия: общая формулировка, методы оценки

- Зависимая (эндогенная, объясняемая) переменная y представляется в виде функции $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_k,\beta_1,\ldots,\beta_p)$
  от независимых (экзогенных, объясняющих) переменных $x_1,x_2,\ldots,x_k$.
  $\beta_1,\ldots,\beta_p$ – параметры модели, которые подлежат определению
- В зависимости от *вида функции* модели делятся на
  - *линейные*
  - *нелинейные*
- В зависимости от количества экзогенных переменных
  - *на модели парной регрессии*
  - *на модели множественной регрессии*

Классическая линейная регрессионная модель . Общий вид

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \ldots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & \ldots & x_{1k} \\ 1 & x_{22} & \ldots & x_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{n2} & \ldots & x_{nk} \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_k \end{bmatrix}$$

Соотношение предполагается справедливым для всех возможных наблюдений, но мы наблюдаем только выборку из n наблюдений. **Y** – n-мерный вектор, **X** –матрица размерности nxk (по строкам – значения каждого из факторов в i-м наблюдении, по столбцам – значения j-го фактора в каждом из наблюдений).

Метод наименьших квадратов

$$RSS = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_1 - b_2 x_i)^2 \to \min$$

$$RSS = (\mathbf{Y} - \mathbf{Xb})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{Xb}) \to \min$$

Метод наименьших квадратов

$$\frac{\partial RSS}{\partial \mathbf{b}} = -2\mathbf{X}^T\mathbf{Y} + 2\mathbf{X}^T\mathbf{X}\mathbf{b} = 0$$

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y}$$

Другие методы оценки

- Метод максимального правдоподобия
  - Является альтернативой МНК
  - Применим для обобщенных моделей регрессии
- Нелинейный метод наименьших квадратов
  - Для оценки нелинейных моделей
- Взвешенный метод наименьших квадратов
  - Для оценки моделей с

Предпосылки классической регрессионной модели с нестохастическими регрессорами

- (A.1) Модель линейна по **параметрам** и правильно специфицирована
  - Примеры линейных по параметрам моделей:
- $y=\alpha+\beta x+\varepsilon$
- $\ln(y)= \alpha+\beta \ln(x)+\varepsilon$
- $y=\alpha+\beta/x+\varepsilon$

Предпосылки регрессионной модели с нестохастическими регрессорами

- (A.2) Матрица **X** –матрица размерности nxk имеет ранг $k \leq n$ (отсутствие совершенной мультиколлинеарности)
  - Математически это означает, что для $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ имеется обратная матрица
  - Для простой (парной) регрессии это условие означает, что объясняющая переменная в выборке имеет ненулевую дисперсию

Предпосылки классической регрессионной модели с нестохастическими регрессорами

- (A.3) $E(\varepsilon) = 0$ – математическое ожидание случайного возмущения равно нулю и в среднем линия регрессии должна быть истинной
  - Ожидаемое значение случайного возмущения равно нулю в каждом наблюдении
  - Случайный член не имеет систематического смещения ни в положительную, ни в отрицательную сторону

Предпосылки классической регрессионной модели с нестохастическими регрессорами

- (A.4) $E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T)=\sigma^2\mathbf{I}$ – регрессионные остатки гомоскедастичны и нет автокорреляции
- Т.е. ковариационная матрица вектора регрессионных остатков пропорциональна единичной матрице, а значит

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \mathrm{Const} = \sigma^2$$

Все регрессионные остатки имеют одну и ту же дисперсию

$$\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$$

Разные регрессионные остатки не коррелируют

Гомоскедастичность и отсутствие автокорреляции

Ковариационная матрица вектора регрессионных остатков

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T) = \begin{pmatrix} Var(\varepsilon_1) & \mathrm{Cov}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)..... & \mathrm{Cov}(\varepsilon_1,\varepsilon_n) \\ \mathrm{Cov}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) & Var(\varepsilon_2)..... & \mathrm{Cov}(\varepsilon_2,\varepsilon_n) \\ ..... & & \\ Cov(\varepsilon_n\varepsilon_1) & \mathrm{Cov}(\varepsilon_n\varepsilon_2).....Var(\varepsilon_n) \end{pmatrix} = \sigma^2\mathbf{I}$$

Теорема Гаусса- Маркова

- При соблюдении предпосылок (A1)-(A4) оценки МНК будут BLUE оценками, то есть
  - наилучшими (наиболее эффективными)

    Best
  - линейными (комбинациями наблюдаемых Y_i)

    Linear
  - несмещенными оценками параметров регрессии

    Unbiased Estimators

Несмещенность оценки параметров регрессии

$$E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}$$

- Повторяя оценку уравнения регрессии на различных выборках мы ожидаем, что среднее значение полученных оценок каждого параметра равно его истинному (теоретическому) значению
- Нарушение предположения о гомоскедастичности и отсутствии автокорреляции не влияет на несмещенность оценок
  - Это следствие предположенияA3

Несмещенность оценки дисперсии случайной составляющей

Оценка дисперсии случайной составляющей

$$\hat{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = s^2 = (\mathbf{e}^T\mathbf{e})/(n-k) = RSS/(n-k)$$

Эта оценка является несмещенной

$$E(\hat{Var}(\boldsymbol{\varepsilon})) = \sigma^2$$

Свойства оценок на конечных выборках

- Оценка дисперсии случайной составляющей s^2 имеет χ^2 распределение с (n-k) степенями свободы
- Оценки вектора параметров и оценка дисперсии случайной составляющей не коррелируют и независимы друг от друга
- Свойства оценок важны для проведения тестов относительно неизвестных параметров регрессии
  - Тест Фишера на значимость уравнения в целом
  - Тест Стьюдента на значимость оценки параметров

Понятие автокорреляции, ее причины, последствия, способы выявления и устранения

- Наличие корреляции между остатками текущих и предыдущих наблюдений

(нарушение предпосылки A4)

Исходные предпосылки обобщенной модели

Предположения

- (A.4) $E(\varepsilon\varepsilon^T)=\sigma^2\mathbf{I}$ **(классическая регрессия)**
- (A.4′) $E(\varepsilon\varepsilon^T)=\sigma^2\,\mathbf{\Omega}\neq\sigma^2\mathbf{I}$ **(обобщенная регрессия)**

Ω – положительно определенная матрица

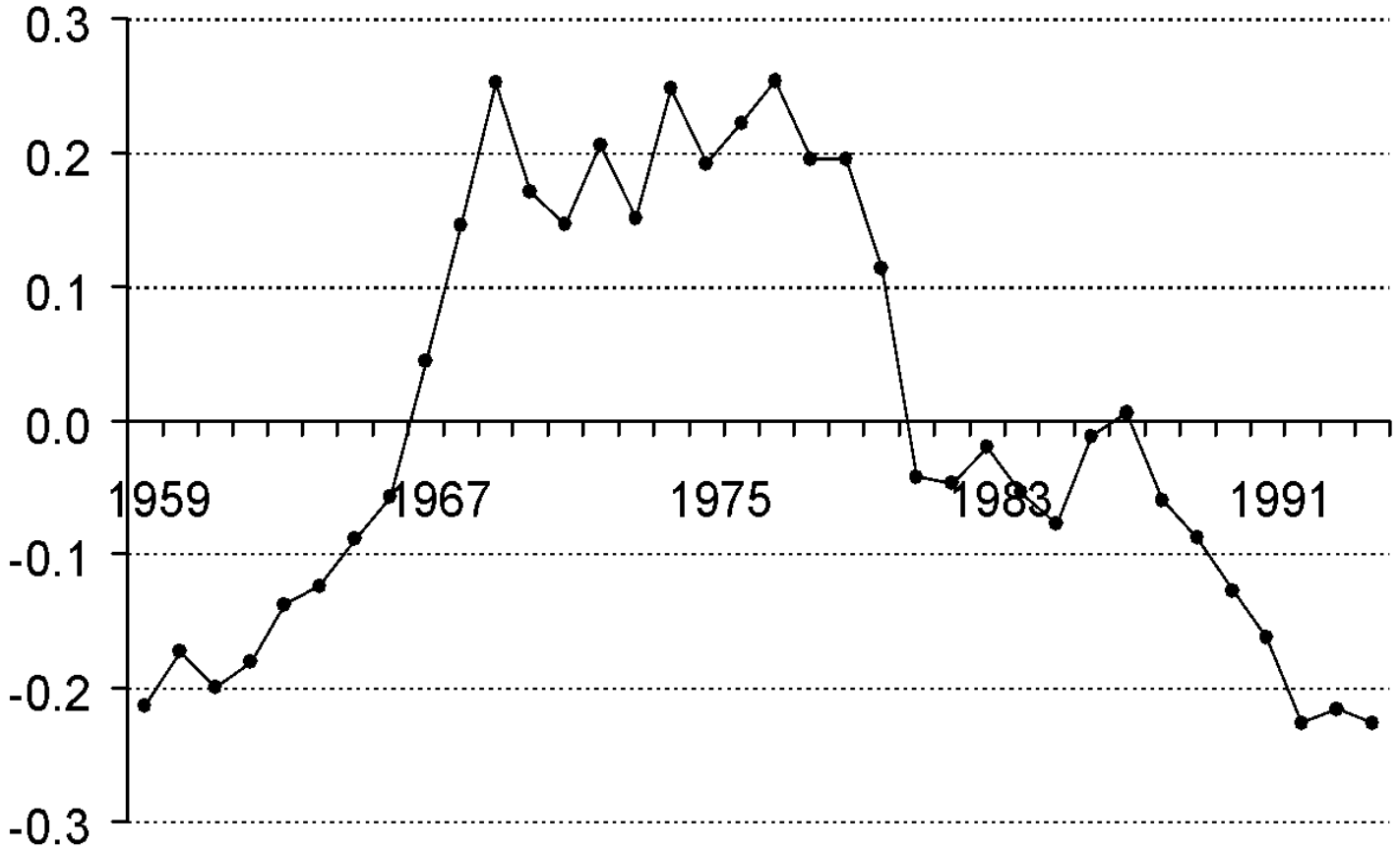
Следствия

- МНК-оценка **эффффективная**
- МНК-оценка остается несмещенной и состоятельной, но становится **неэффффективной**
- Формулы для вычисления стандартных ошибок изменяются

Ковариационная матрица вектора регрессионных остатков в случае авторегрессии первого порядка

$$\sigma^2\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 \ldots \rho^{T-2} & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho & \ldots . \rho^{T-2} \\ \rho^2 & \rho^3 & 1 & \ldots . \rho^{T-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ \rho^{T-1} \ldots . & & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

График остатков в случае сильной положительной автокорреляции



Причины автокорреляции

- Ошибки спецификации модели (пропуск важной объясняющей переменной, использование ошибочной функциональной зависимости между переменными и т.д.)
- Ошибки измерений
- Характер наблюдений (например, данные временных рядов)

Последствия автокорреляции

- Оценки параметров остаются несмещенными
- Оценка дисперсии возмущений смещена
  - Смещены оценки стандартных ошибок
  - Некорректно определяются доверительные интервалы параметров модели и значений эндогенной переменной

Автокорреляция первого порядка

Простейший вид АК

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t$$

$-1<\rho<1$ – коэф. автокорреляции 1-го порядка

v_t – свободная от АК случайная составляющая

Тест Дарбина -Уотсона

H_0: ρ=0 – нет АК

H_1: ρ>0 – есть положительная АК

Проверка гипотезы:

1. Рассчитывается тестовая статистика

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n} (e_t - e_{t-1})^2}{RSS}$$

$$d \to 2 - 2\rho$$

2. По таблице Дарбина –Уотсона находятся значения d_L d_U (верхняя и нижняя границы для критических значений, определяется для выбранного уровня значимости по числу наблюдений)

Тест Дарбина -Уотсона

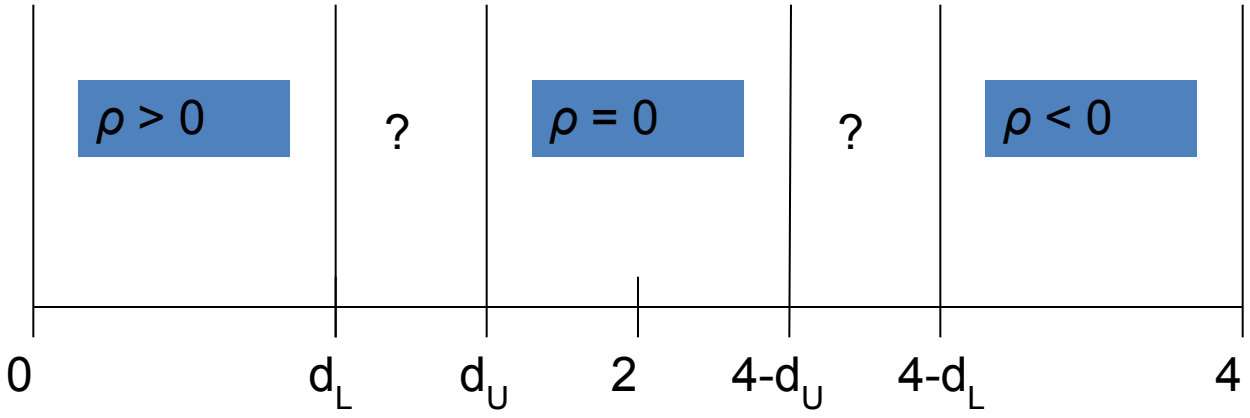
3. Сравниваем расчетное с табличным. Если

$$d \in [0, d_L) \Rightarrow \rho > 0$$

$$d \in (d_L, 2] \Rightarrow \rho = 0$$

$$d \in [d_L, d_U] \Rightarrow ???$$

Тест Дарбина -Уотсона



Способы корректировки автокорреляции

- Использование обычного МНК с коррекцией стандартных ошибок по методу Ньюи-Веста
- Использование обобщенного МНК
- Нелинейный МНК

Гетероскедастичность

- Нарушение независимости дисперсии возмущений от номера (момента) наблюдений (предпосылки A4)
- Причины:
  - Неоднородность исследуемых объектов
  - Характер наблюдений
- Последствия те же, что и в случае автокорреляции

$$\sigma^2\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2\ 0..... & 0 \\ 0 & \sigma_2^2.... \ 0 \\ ..... & \\ 0 & 0.....\sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Обнаружение гетероскедастичности

- Тест Голдфельда-Квандта
- Предпосылки теста:
  - Пропорциональность дисперсии случайного возмущения величине некоторого регрессора X_j
  - Случайное возмущение распределено нормально и не подвержено автокорреляции

Тест Голдфельда-Квандта

1. Упорядочиваются выборочные данные по величине модуля регрессора $|X_{jt}|$, относительно которого есть подозрение на гетероскедастичность
2. Отбрасываются r центральных наблюдений
3. По первым и последним n` (k+1<n`=(n-r)/2) данным выборки оцениваются две частные регрессии и вектора остатков e_1 и e_2 соответственно
4. По остаткам частных регрессии вычисляются RSS_1 и RSS_2
5. Вычисляются

$F_{стат}=RSS_1/RSS_2$ и $F_{стат}^{-1}=RSS_2/RSS_1$

Тест Голдфельда-Квандта

5. По таблице определяется

   $F_{кр}(\gamma, n`-k-1, n`-k-1)$

6. H0: $Var(\varepsilon_i)=\sigma^2$ (гомоскедастичность) не отвергается, если выполняются оба неравенства

$F_{стат} \leq F_{кр}$

$F_{стат}^{-1} \leq F_{кр}$

В противном случае делается вывод о гетероскедастичности случайных возмущений

Методы устранения последствий гетероскедастичности

- Вывод альтернативной оценки, которая при предположении (A4′) является наилучшей несмещенной оценкой
- Сохранение МНК-оценки, но с коррекцией стандартных ошибок
- Пересмотр спецификации исходной модели

Взвешенный метод наименьших квадратов

1. Выявляется гетероскедастичность (непостоянство дисперсии остатков)
   a) графически
   b) с помощью различных тестов
2. В соответствии с поведением остатков подбираются «веса»
3. Каждое наблюдение «взвешивается» и оценивается преобразованная модель

Линейные и нелинейные модели

1. Линейная зависимость – Y линейна и по переменной X и по параметрам β_1 и β_2
2. Нелинейная зависимость 1 типа - Y нелинейна по переменной X, но линейна по параметрам β_1 и β_2
3. Нелинейная зависимость 2 типа - Y нелинейна по переменной X и нелинейна по параметрам β_1 и β_2

Линейные и приводимые к линейным (нелинейные 1-го типа)

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X$$

$$Y = \beta_1 + \beta_2 \frac{1}{X}$$

$$Y = \beta_1 X^{\beta_2}$$

Линеаризация производственной функции (эконометрическая модель модель)

$$Y_t = \alpha_0 \cdot K^{\alpha}{}_t \cdot L^{1-\alpha}{}_t \cdot \nu_t$$

$$\ln\left(\frac{Y_t}{L_t}\right) = \gamma + \alpha \cdot \ln\left(\frac{K_t}{L_t}\right) + \varepsilon_t$$

$$\gamma = \ln(\alpha_0), \qquad \varepsilon_t = \ln(\nu_t)$$

Случайное возмущение ε_t удовлетворяет условиям Гаусса-Маркова
Получено уравнение для выпуска на одного работника в зависимости от затрат капитала на одного работника

Параметр α – эластичность выпуска по капиталу

Полулогарифмическая модель

- Показательная функция может быть приведена к линейному виду логарифмическим преобразованием
- Исходная модель

$$Y = \beta_1 e^{X\beta_2} \nu$$

Здесь *v* – случайная составляющая

- Преобразованная модель

$$\ln Y = \ln \beta_1 + \beta_2 X + \varepsilon$$

Здесь $\varepsilon = \ln v$

Полулогарифмическая модель

- Коэффициент регрессии β_2 в этом случае интерпретируется как *относительное* изменение Y в расчете на единицу *абсолютного* изменения X
- Если говорится о процентном изменении Y, то оценку коэффициента β_2 нужно умножить на 100
- Такая интерпретация справедлива при малых β_2 (<0,1)

ТЕСТЫ НА ФУНКЦИОНАЛЬНУЮ ФОРМУ

- 1. RESET тест Рамсея
- 2. J-тест Дэвидсона и МакКиннона
- 3. PE-тест МакКиннона
- 4. Метод Зарембки
- 5. Тест Кокса-Бокса

Тест Рамсея

- RESET Test – Regression Specification Error Test– тест на спецификацию (Ramsey, 1969)
- Тестируется спецификация

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

на ошибки следующих типов:

  - Пропущенные переменные: матрица $\mathbf{X}$ содержит не все нужные переменные
  - Неправильная функциональная форма: переменные должны быть прологарифмированы, или взяты в квадрат и пр.
  - Ненулевая корреляция между регрессорами и случайным фактором, вызванная, например,
    - Ошибками измерений
    - Одновременностью (объем продаж и затраты на рекламу)
    - Присутствием в уравнении лагированных значений эндогенной переменной при автокорреляции остатков

Тест Рамсея

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

- При таких ошибках спецификации МНК-оценка будет смещенной и несостоятельной
- Рамсей показал, что в этом случае случайный фактор имеет ненулевой математическое ожидание
- Тест Рамсея тестирует нулевую гипотезу

$$H_0 : \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I})$$

Против альтернативной $H_1 : \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mu, \sigma^2 \mathbf{I})$

Тест Рамсея

- Идея проверки: нелинейные функции от $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Xb}$ не должны улучшать объяснение поведения $\mathbf{Y}$
- Алгоритм теста
  - Оценивается уравнение $\mathbf{Y} = \mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$
  - Определяются расчетные значения $\hat{\mathbf{Y}}$
  - Оценивается вспомогательная регрессия

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X\beta} + \alpha_1 \hat{\mathbf{Y}}^2 + \alpha_2 \hat{\mathbf{Y}}^3 + \alpha_4 \hat{\mathbf{Y}}^4 + \ldots + \boldsymbol{\varepsilon}'$$

  - Проверяется гипотеза, что все коэффициенты при степенях расчетных $\hat{\mathbf{Y}}$ равны нулю одновременно