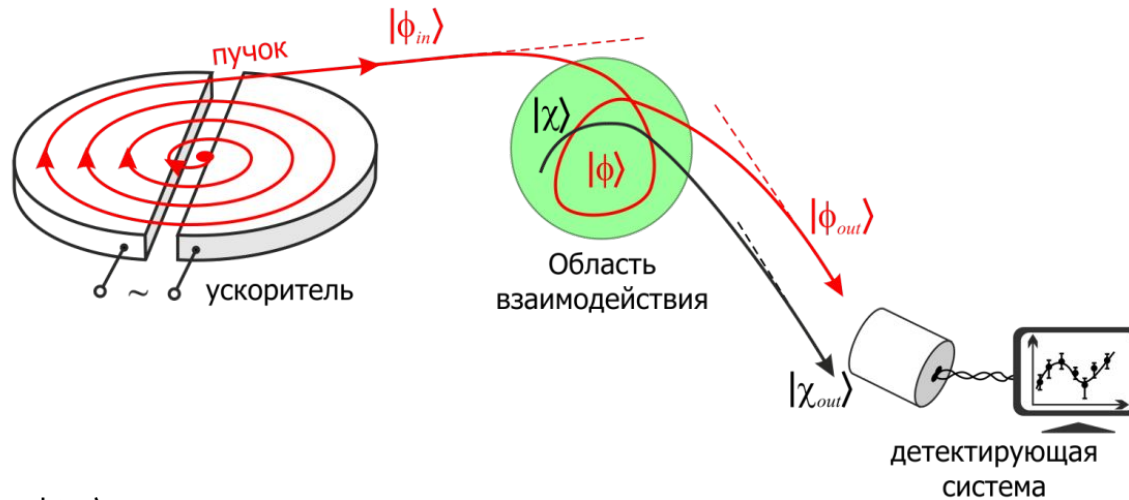


Оптическая модель упругого рассеяния

Деникин А.С.

Сечение в квантовой механики



- $|\phi_{in}\rangle$ Начальное состояние, формируемое источником частиц
- $|\phi\rangle$ Состояние, формирующееся в результате взаимодействия
- $|\phi_{out}\rangle$ Состояние, сформированное в результате взаимодействия
- $|\chi_{out}\rangle$ Состояние, «ожидаемое» настройками детектора
- $|\chi\rangle$ Состояние, из которого должно появиться «ожидаемое» состояние

$|\phi_{out}\rangle = \hat{S}|\phi_{in}\rangle$ Оператор рассеяния \hat{S} включает в себя всю информацию о процессе рассеяния и взаимодействии

$\omega(\chi \leftarrow \phi) = |\langle \chi | \phi \rangle|^2 = |\langle \chi_{out} | \hat{S} | \phi_{in} \rangle|^2$ Вероятность процесса рассеяния из начального состояния ϕ_{in} в конечное состояние χ_{out}

Для количественного анализа удобно использовать импульсное представление (т.е. разложение по плоским волнам)

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}$$

$$\phi_{out}(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p} | \phi_{out} \rangle = \langle \mathbf{p} | \hat{\mathbf{S}} | \phi_{in} \rangle = \int d\mathbf{p}' \langle \mathbf{p}' | \hat{\mathbf{S}} | \mathbf{p} \rangle \phi_{in}(\mathbf{p}')$$

Нет рассеяния

$$\langle \mathbf{p}' | \hat{\mathbf{S}} | \mathbf{p} \rangle = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + \frac{i\hbar^2}{2\pi m} \delta(E' - E) f(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})$$

Содержит
информацию о
рассеянии

$$\phi_{out}(\mathbf{p}) = \phi_{in}(\mathbf{p}) + \frac{i\hbar^2}{2\pi m} \int \delta(E' - E) f(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) \phi_{in}(\mathbf{p}') d\mathbf{p}'$$

Вероятность того, что в конечном состоянии система имеет импульс \mathbf{p}

$$\omega(d^3\mathbf{p} \leftarrow \phi_{in}) = d^3\mathbf{p} |\phi_{out}(\mathbf{p})|^2$$

Вероятность рассеяния в телесный угол Ω_p в направлении импульса \mathbf{p}

$$\omega(d\Omega_p \leftarrow \phi_{in}) = d\Omega_p \int_0^\infty |\phi_{out}(\mathbf{p})|^2 p^2 dp$$

Число частиц рассеянных в заданный телесный
угол

$$dN(d\Omega_p) = \sum_i \omega(d\Omega_p \leftarrow \phi_i) = \int j_0 \omega(d\Omega_p \leftarrow \phi_\rho) d^2\rho$$

Будем полагать, что здесь каждое суммируемое
состояние (событие) до столкновения есть копия
начального состояния, смещенного в
перпендикулярной плоскости на некоторый

$$|\phi_\rho\rangle = e^{-i\mathbf{p}\rho} |\phi_{in}\rangle$$

прицельный параметр ρ

Сечение рассеяния (угловое распределение рассеянных
частиц):

$$\begin{aligned} d\sigma(d\Omega_p) &= \frac{dN(d\Omega_p)}{j_0} = \int \omega(d\Omega_p \leftarrow \phi_\rho) d^2\rho = \\ &= d\Omega_p \frac{\hbar^4}{4\pi^2 m^2} \int d^2\rho \int_0^\infty p^2 dp \iint d^3\mathbf{p}' d^3\mathbf{p}'' \delta(E - E') \delta(E - E'') \times \\ &\quad \times f(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}') f^*(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}'') \phi(\mathbf{p}') \phi^*(\mathbf{p}'') e^{i\rho(\mathbf{p}'' - \mathbf{p}')} = \\ &= d\Omega_p |f(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}')|^2 \end{aligned}$$

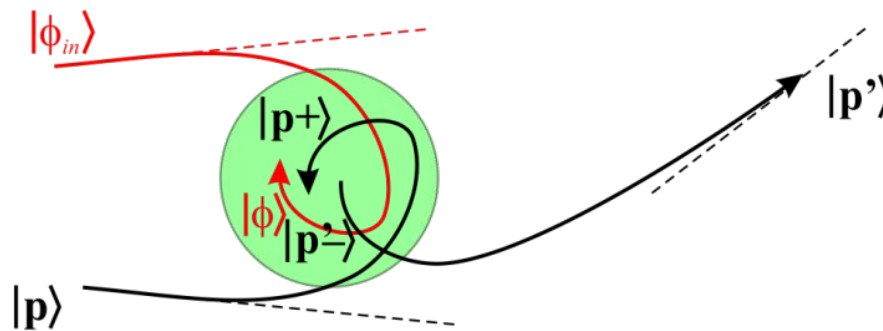
Таким образом, знание амплитуды рассеяния позволяет определить сечение.

Как вычислить амплитуду рассеяния?

Амплитуда рассеяния связана с матричными элементами T оператора (см. подробно книгу Дж. Тейлора, Квантовая теория рассеяния):

$$f(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) = -(2\pi)^2 \frac{m}{\hbar^2} \langle \mathbf{p}' | \hat{T} | \mathbf{p} \rangle = -(2\pi)^2 \frac{m}{\hbar^2} \langle \mathbf{p}' | \hat{V} | \mathbf{p}^+ \rangle$$

здесь \mathbf{V} – это оператор взаимодействия, а вектор $|\mathbf{p}^+\rangle$ – это, так называемое, стационарное состояние рассеяния, соответствующее истинному состоянию, реализующемуся из начальной плоской волны $|\mathbf{p}\rangle$.



Таким образом, если мы умеем находить $|\mathbf{p}^+\rangle$, то мы можем вычислить и сечение рассеяния.

Как вычислить волновую функцию, соответствующую стационарному состоянию?

1 способ: решение интегрального уравнения Липпмана-Швингера (так никто не делает!)

$$|\mathbf{p} \pm\rangle = |\mathbf{p}\rangle + \hat{\mathbf{G}}_0 \hat{\mathbf{V}} |\mathbf{p} \pm\rangle$$

В координатной форме это уравнение имеет вид:

$$\Psi_p^{(\pm)}(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{\pm ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}') \Psi_p^{(\pm)}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$$

Отметим, что асимптотика волновой функции имеет вид

$\Psi_p^{(\pm)}(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \left(e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} - (2\pi)^2 \frac{m}{\hbar^2} \langle \mathbf{p}' | \hat{\mathbf{V}} | \mathbf{p} \pm \rangle \frac{e^{\pm ipr}}{r} \right)$

Падающая плоская волна
 Расходящаяся (или сходящаяся) сферическая волна
 Амплитуда рассеяния

2 способ: решение уравнения Шрёдингера, для которого стационарное состояние является собственным

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2 \hat{\mathbf{L}}^2}{2mr^2} + V(r) \right] \Psi_p^{(\pm)}(\mathbf{r}) = E \Psi_p^{(\pm)}(\mathbf{r})$$

Решение удобно искать используя парциальное разложение в.ф.

$$\Psi_p^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{pr} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{lm} i^l \varphi_l(p, r) Y_{lm}(\Omega_r) Y_{lm}^*(\Omega_p)$$

Парциальные волновые функции имеют асимптотику знакомого вида:

$$\frac{1}{pr} \varphi_l(p, r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} j_l(pr) + f_l(p) \frac{e^{i(pr - \pi l/2)}}{r}$$

где появляются парциальные амплитуды, связанные с амплитудой рассеяния

Парциальная амплитуда

$$f(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) = 4\pi \sum_{lm} f_l(p) Y_{lm}(\Omega_p) Y_{lm}^*(\Omega'_p) = \sum_l (2l + 1) \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ip} P_l(\cos \theta)$$

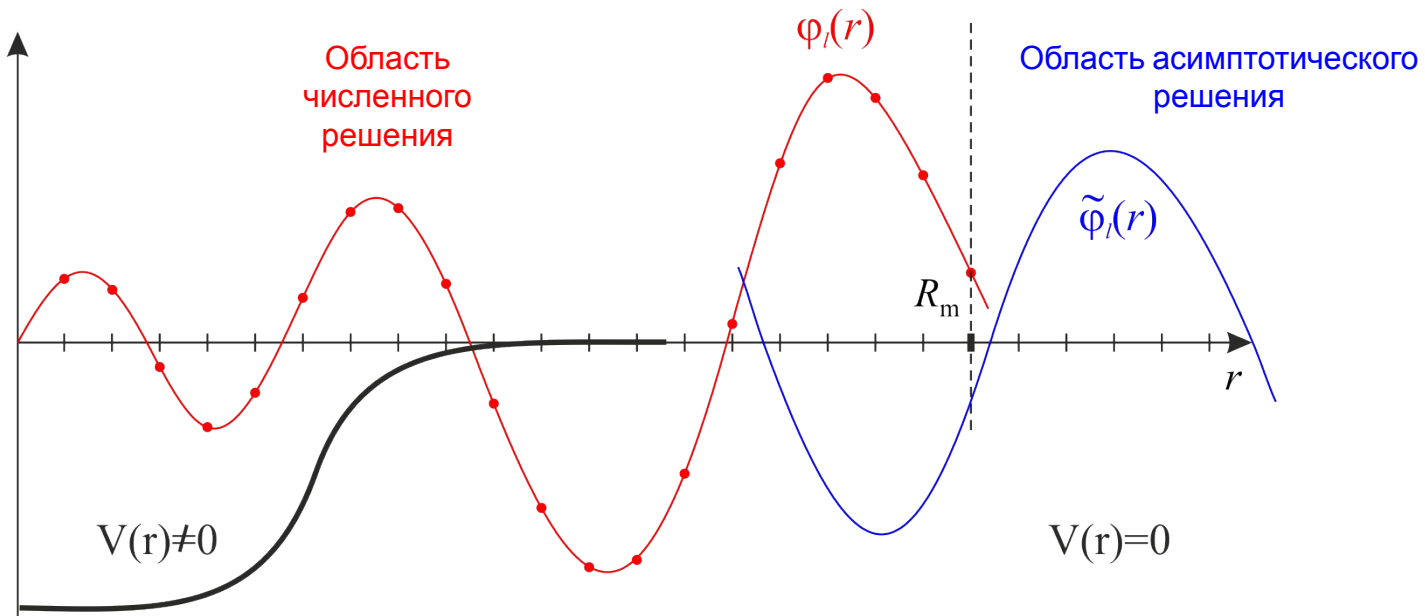
Таким образом, для нахождения амплитуды рассеяния в данном случае достаточно найти ограниченный набор парциальных амплитуд (заметим, что начиная с некоторого l фазы рассеяния $\delta_l = 0$, а значит вклад этих слагаемых в амплитуду равен нулю). Сделать это можно выполнив численное решение парциальных уравнений Шрёдингера.

При подстановке частичного разложения 3х-мерной волновой функции в уравнение Шрёдингера, использования свойств ортогональности сферических гармоник, получим набор радиальных уравнений

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + p^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) \right] \varphi_l(p, r) = 0$$

дополненных граничными условиями

$$\varphi_l(p, 0) = 0; \quad \varphi_l(p, r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \tilde{j}_l(pr) + \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2i} \tilde{h}_l^{(+)}(pr)$$



«Сшивка» численного и асимптотического решения в точке R_m дает возможность получить значения частичных амплитуд.

Оптическая модель

Метод проекционных операторов Фешбаха

$$\mathbf{H}\psi = E\psi$$

Пусть мы интересуемся исключительно упругой компонентой полной волновой функции. Тогда введем проекционный оператор, выделяющий именно упругую компоненту

$$\psi_P = \mathbf{P}\psi$$

Очевидно, что оператор $\mathbf{Q} = 1 - \mathbf{P}$ будет выделять ψ_Q – оставшуюся часть в. ф., содержащую информацию обо всех неупругих каналах.

$$(\mathbf{H} - E)(\mathbf{P} + \mathbf{Q})\psi = 0$$

$$(\mathbf{P}\mathbf{H}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{H}\mathbf{Q})\psi = E\mathbf{P}\psi; \quad (\mathbf{Q}\mathbf{H}\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{H}\mathbf{Q})\psi = E\mathbf{Q}\psi$$

$$\mathbf{H}_{PP}\psi_P + \mathbf{H}_{PQ}\psi_Q = E\psi_P \quad \psi_Q = \frac{1}{E - \mathbf{H}_{QQ}}\mathbf{H}_{QP}\psi_P$$

$$\left[\mathbf{T} + \mathbf{H}'_{PP} + \mathbf{H}_{PQ} \frac{1}{E - \mathbf{H}_{QQ}} \mathbf{H}_{QP} \right] \psi_P = E\psi_P$$

Это и есть обобщенный оптический потенциал!

Обобщенный оптический потенциал

- ❑ Теория Фешбаха показывает, что многоканальную задачу можно свести к полностью одноканальной задаче!
- ❑ Платой за такое упрощение служит исключительная сложность расчета оптического потенциала. Его вычисление эквивалентно решению исходной многоканальной задачи!
- ❑ Однако, самое важное следствие теории Фешбаха состоит в том, что **оптический потенциал существует в принципе!**

Обобщенный оптический потенциал

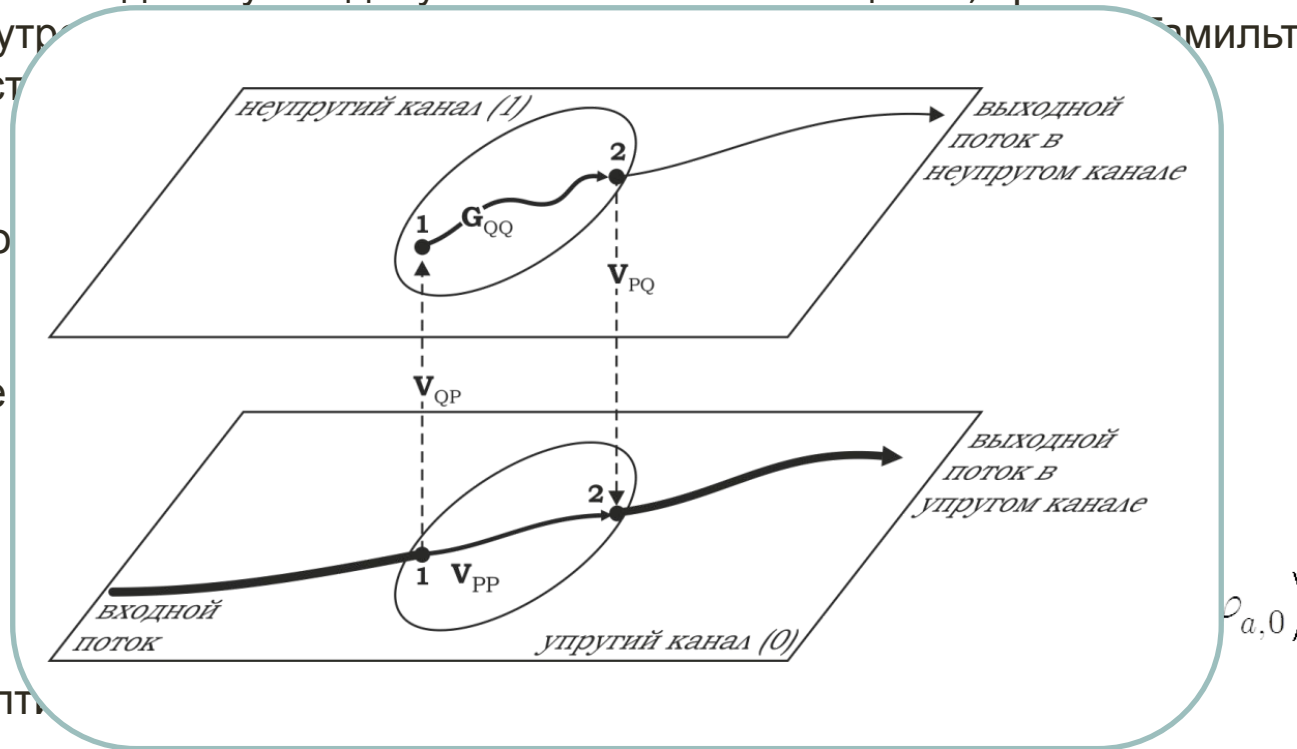
Рассмотрим модельную задачу: столкновение частиц $a + b$, при этом частица a имеет внутреннюю степень свободы. Гамильтониан такой системы

Проекция

Действие

где V_{PP}

и тогда опти



$$V_{OM} = V_{PP} + V_{PQ} \frac{1}{E - \mathbf{H}_{QQ}} V_{QP}$$

Оператор Грина – пропатор

Оптический потенциал нелокальный, комплексный и зависит от энергии

Феноменологическая оптическая модель

Вывод о существовании оптического потенциала оправдывает попытки подобрать его в простой для применения форме. Наиболее часто на практике применяют оптический потенциал в виде суммы нескольких слагаемых

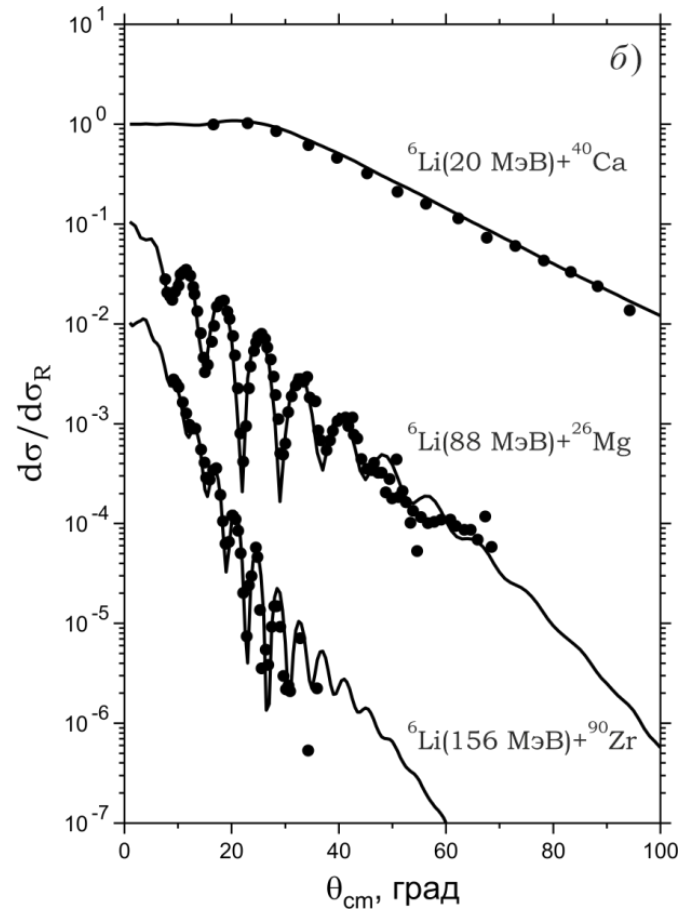
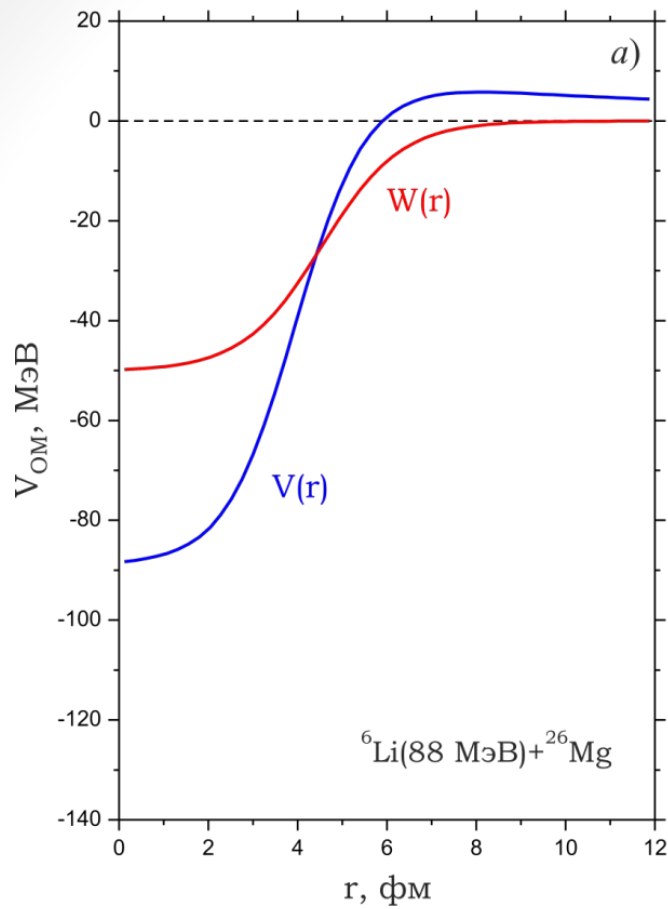
$$V_{OM}(r) = V_C(r) + V_0 f(r, R_W, a_W) + iW_0 f(r, R_W, a_W) + \\ -4V_D \frac{d}{dr} f(r, R_D, a_D) - i4W_D \frac{d}{dr} f(r, R_{WD}, a_{WD}) + \\ + 2(\vec{L} \cdot \vec{s})(V_{SO} + iW_{SO}) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f(r, R_{SO}, a_{SO})$$

Радиальная зависимость каждого из них (кроме кулоновского) имеет вид функции Вудса-Саксона

$$f(r, R, a) = \frac{1}{1 + \exp \frac{r-R}{a}}$$

Параметры потенциала подбираются так, чтобы описать имеющиеся экспериментальные данные по упругому рассеянию атомных ядер.

Для некоторых ядер-снарядов оказалось возможным подобрать параметры в виде аналитических функции энергии и массы мишени, получая при этом хорошее согласие с данным в широком диапазоне масс и энергий столкновения!



$$V_0 = -109.5 \text{ MeV}, \quad r_V = 1.326 \text{ fm}, \quad a_V = 0.811 \text{ fm}$$

$$W_0 = -58.16 + 0.328A - 0.00075A^2 \text{ MeV},$$

$$r_W = 1.534 \text{ fm}, \quad a_W = 0.884 \text{ fm},$$

$$r_C = 1.3 \text{ fm}$$

Упругое рассеяние нуклонов

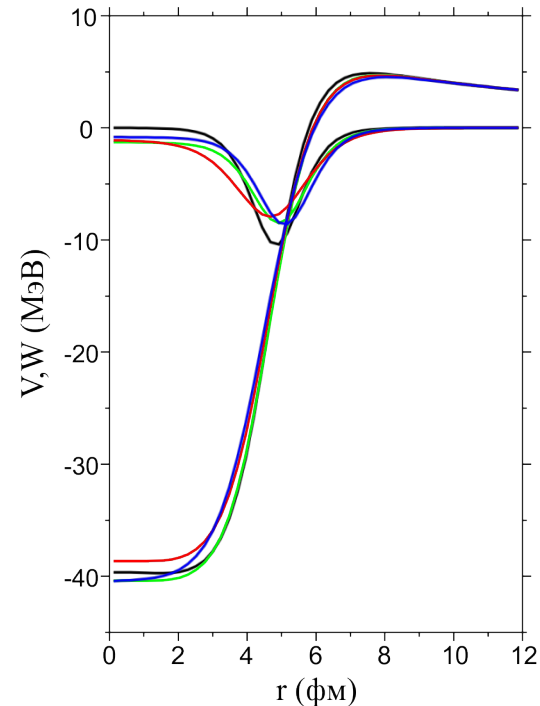
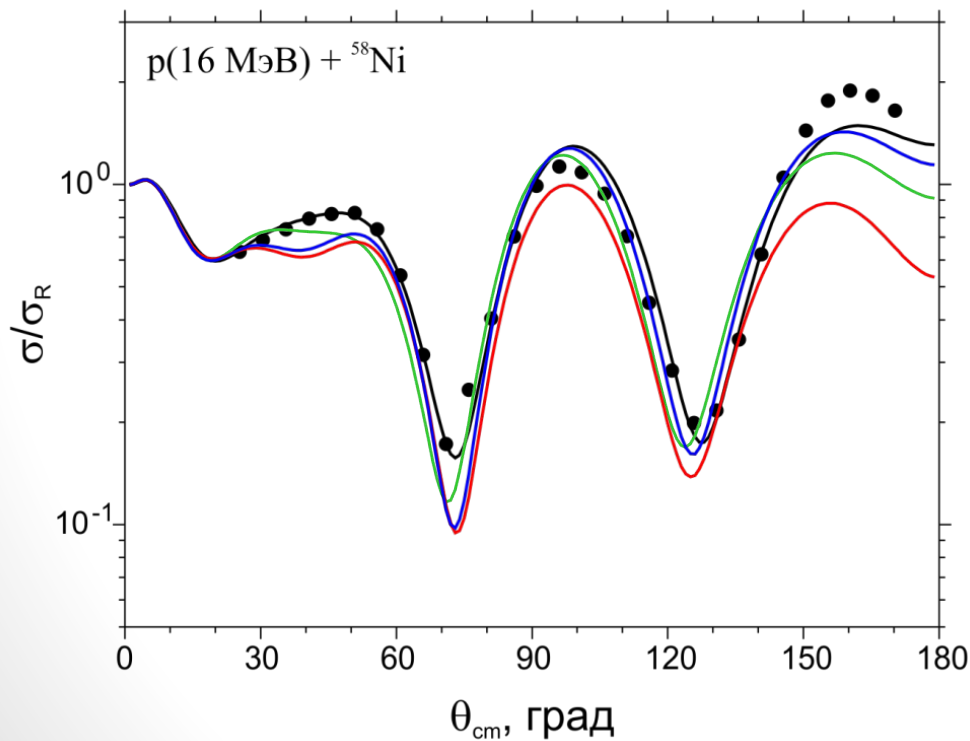
В NRV предоставлена возможность выбора из нескольких глобальных оптических нуклон-ядерных потенциалов:

1. LOCAL AND GLOBAL NUCLEON OPTICAL MODELS FROM 1 keV TO 200 MeV, A.J. Koning, J.P. Delaroche, Nuclear Physics A713(2003) 231–310

2. A GLOBAL NUCLEON OPTICAL MODEL POTENTIAL, R.L. VARNER, W.J. THOMPSON, T.L. McABEE, E.J. LUDWIG and T.B. CLEGG, Phys. Rep. 201 (1991) 57-119

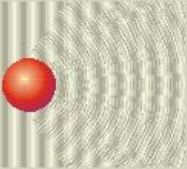
3. NUCLEON-NUCLEUS OPTICAL-MODEL POTENTIAL, $A > 40$, $E > 50$ MeV, F.D. Becchetti, G.W. Greenlees, Phys. Rev. 182 (1969) p.1190

4. Также можно выполнить автоматическую подгонку параметров потенциала



Here you may easily, effectively and reliably analyze the intermediate energies.

Model



Reaction

Projectile

Target

Energy 16

Experimental data

Global OMP

Potential forces

10⁴ dσ/dΩ (mb/sr), ¹H(16.0MeV) + ⁵⁹Ni

Available OMP Systematics

- Neutrons
 - A.J. Koning and J.P. Delaroch
 - R.L. Varner et al.
 - J. Rapaport et al.
 - F.D. Becchetti, G.W.Greenlees
- Protons
 - A.J. Koning and J.P. Delaroch**
 - R.L. Varner et al.
 - F.D. Becchetti, G.W.Greenlees
- Deuteron
 - Haikia An et al.
 - Bojowald et al.
 - Lohr et al.
- Tritium
 - Xiaohua Li et al.

OMP Potenti



LOCAL AND GLOBAL NUCLEON OPTICAL MODELS FROM 1 keV TO 200 MeV

A.J. Koning, J.P. Delaroché
Nuclear Physics A713 (2003) pp.231-310

The phenomenological, OMP for nucleon-nucleus scattering, U , is defined as

$$U(r, E) = -V_V(r, E) - iW_V(r, E) + iW_D(r, E) + (V_{SO}(r, E) + iW_{SO}(r, E))(\vec{l} \cdot \vec{\sigma}) + V_C(r), \quad (1.1)$$

where $V_{V,SO}$ and $W_{V,D,SO}$ are the real and imaginary components of the volume-central (V), surface-central (D) and spin-orbit (SO) potentials, respectively. E is the laboratory energy of the incident particle in MeV. All components are separated in E -dependent well depths, V_V , W_V , W_D , V_{SO} , and W_{SO} , and energy-independent radial parts f , namely

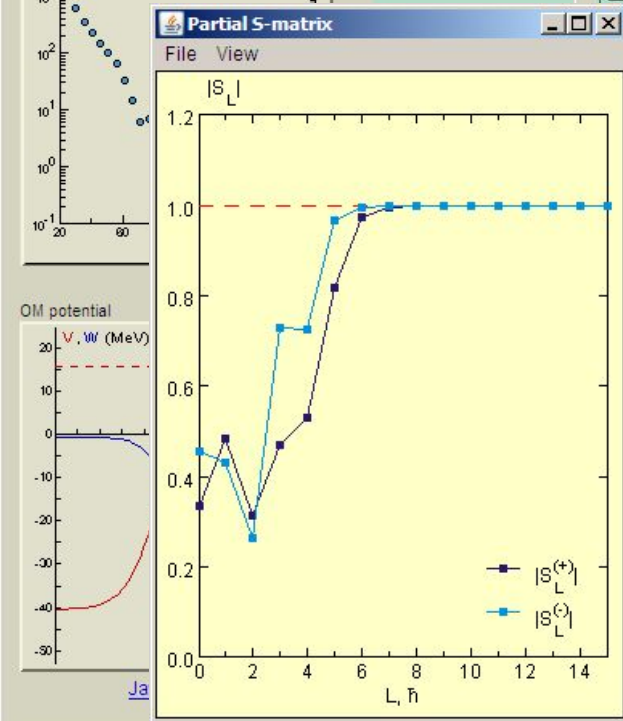
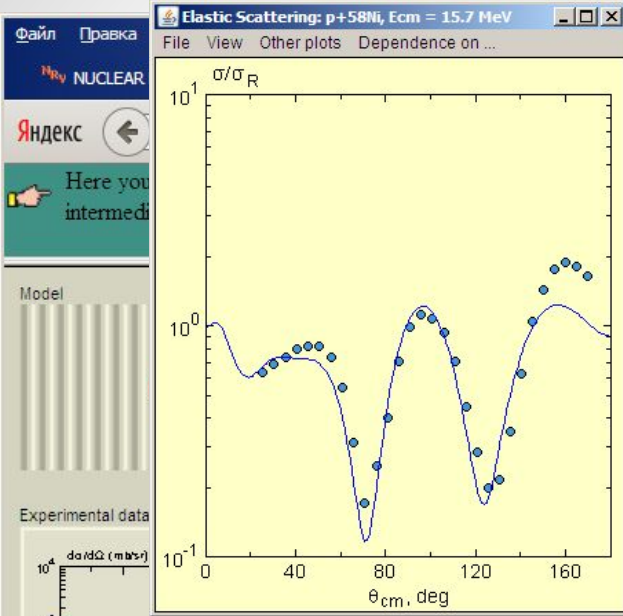
$$\begin{aligned} V_V(r, E) &= V_V(E) f(r, R_V, a_V), \\ W_V(r, E) &= W_V(E) f(r, R_V, a_V), \\ W_D(r, E) &= -4a_D W_D(E) \frac{d}{dr} f(r, R_D, a_D), \\ V_{SO}(r, E) &= V_{SO}(E) \left(\frac{\hbar}{m_\pi c}\right)^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f(r, R_{SO}, a_{SO}), \\ W_{SO}(r, E) &= W_{SO}(E) \left(\frac{\hbar}{m_\pi c}\right)^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f(r, R_{SO}, a_{SO}). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Description

Open PDF file

Submit

Cancel



NRV: Optical Model of Elastic ...

nr.v.jinr.ru/nrv/webnrv/elastic_...

NRV: Optical Model

Elastic scattering of $^1\text{H} + ^{58}\text{Ni}$ at $E/A = 16$ MeV

Optical Model parameters			Other quantities			
	Real part			Imaginary part		
	V ₀ , MeV	r ₀ (R), fm	a, fm	W ₀ , MeV	r ₀ (R), fm	a, fm
Coulomb r ₀ (R), fm	1.259 (4.873)					
Volume	-52.865	1.199 (4.641)	0.669	-1.273	1.199 (4.641)	0.669
Surface				-7.995	1.281 (4.959)	0.549
Spin-Orbit	5.547	1.018 (3.941)	0.59	-0.068	1.018 (3.941)	0.59
Proximity						
Folding						

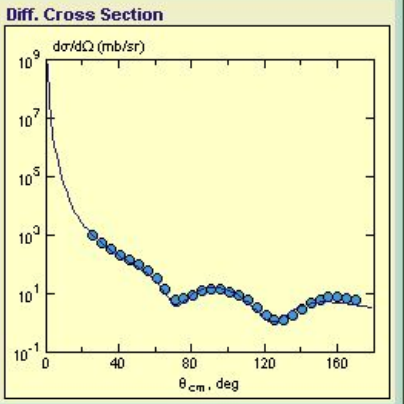
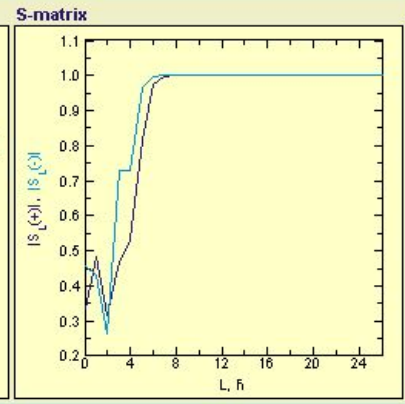
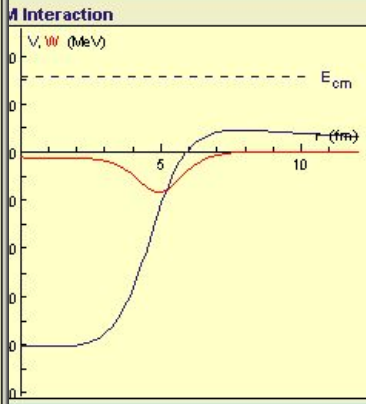
	Before fitting	After fitting
σ_R , mb	1025.52	-
σ_{tot} , mb	1899.18	-
χ^2 / N_{points}		-

Other quantities

- E_{lab} = 16 MeV
- E_{cm} = 15.729 MeV
- k = 0.86 fm⁻¹
- η = 1.102
- R_{max} = 16.28 fm
- dr = 0.2 fm

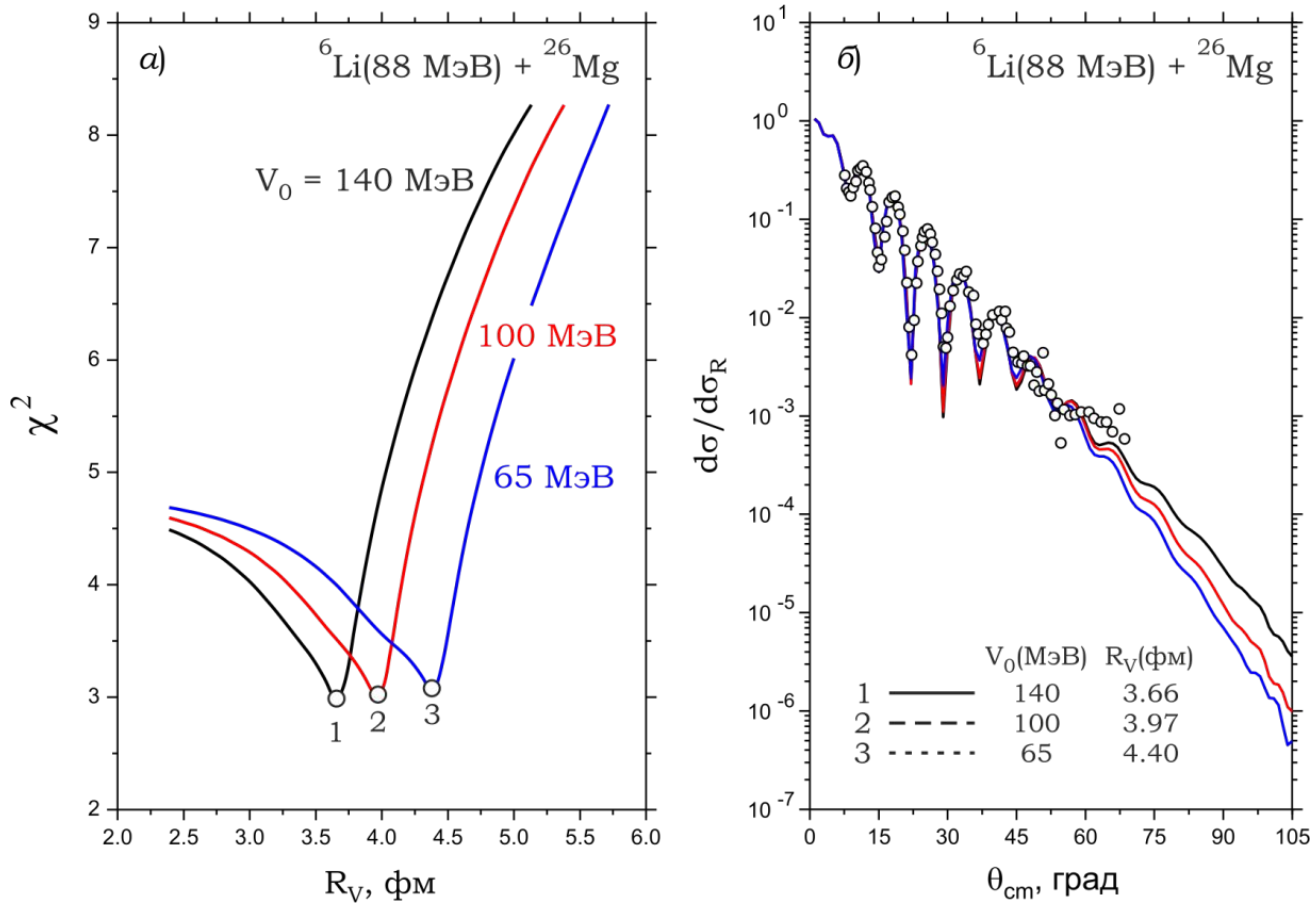
Fitting process

- N_{steps} = no fit
- $\Delta\chi^2/\chi^2$ = no fit
- Use obtained OMP in
- DWBA: Inelastic scattering (exit channel)



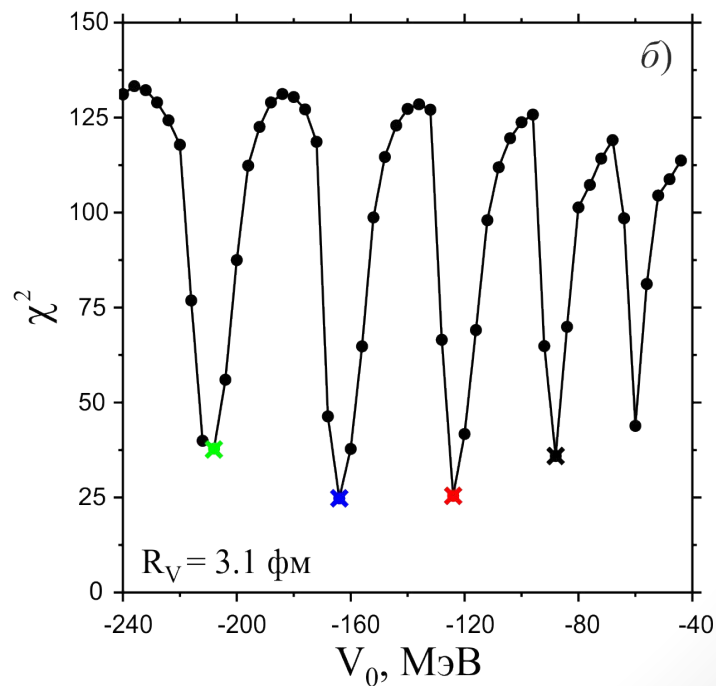
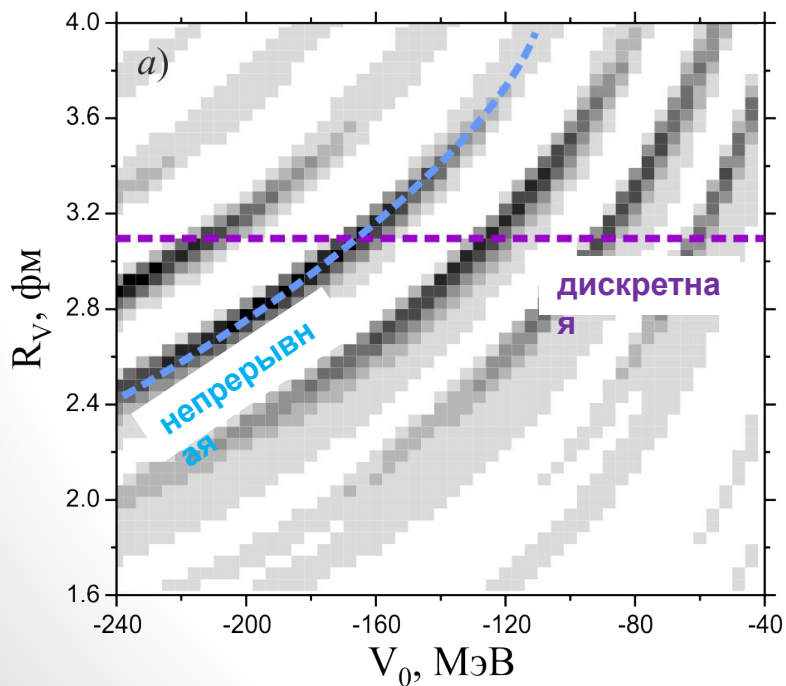
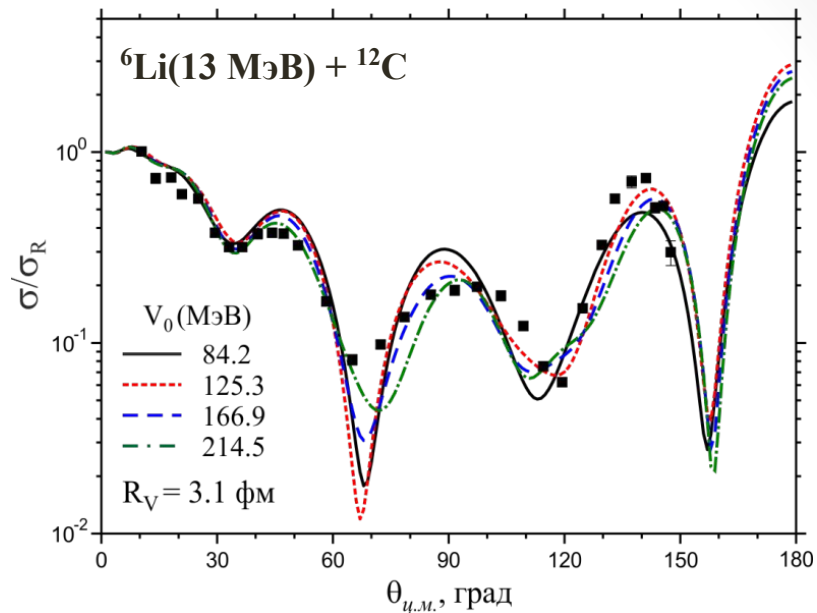
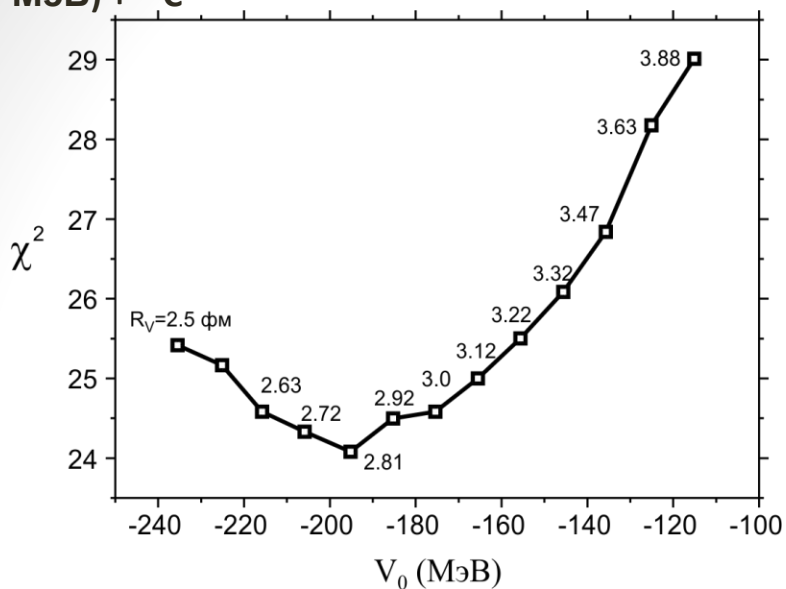
Неопределенность выбора параметров оптической модели

Проявление непрерывной неоднозначности выбора параметров ОП



$$c^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(s_{\text{th}}(q_i) - s_{\text{exp}}(q_i))^2}{D s_{\text{exp}}(q_i)}$$

Дискретная и непрерывная неоднозначности выбора параметров ОП для реакции ${}^6\text{Li}(13 \text{ МэВ}) + {}^{12}\text{C}$

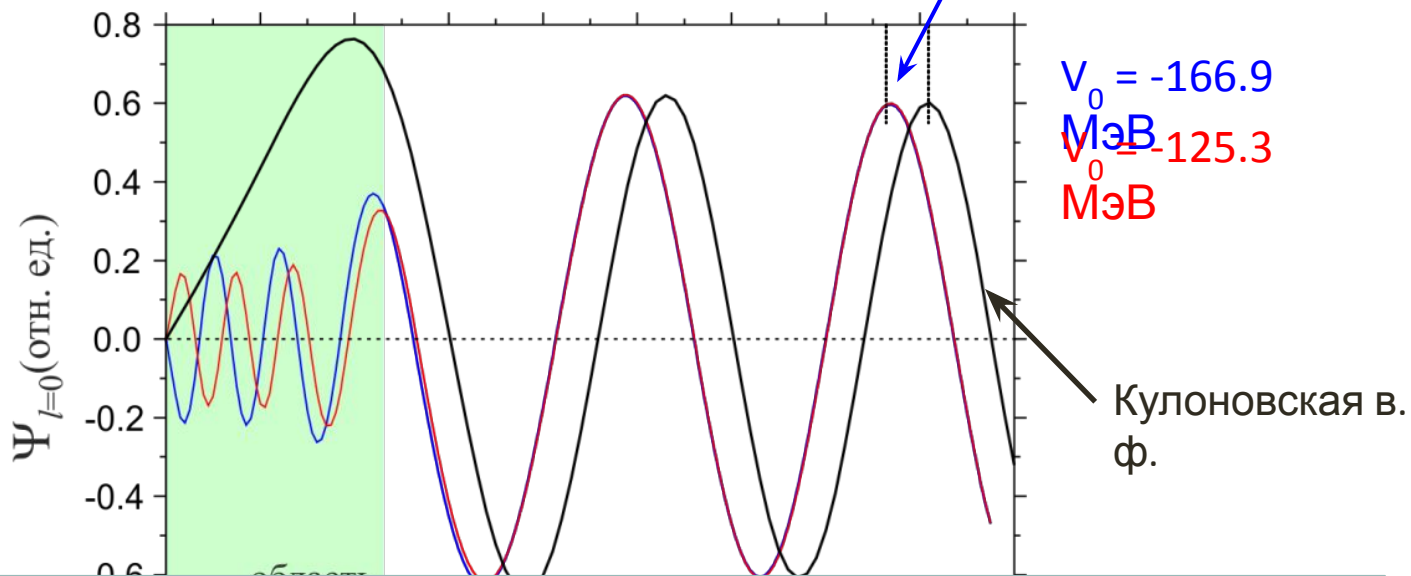


Причины для неоднозначности выбора параметров оптического потенциала

Асимптотика волновой функции и амплитуда рассеяния

$$\psi_l(p, r) \rightarrow j_l(pr) + f_l \frac{e^{i(pr - \pi l/2)}}{r} = \frac{e^{i\delta_l}}{pr} \sin\left(pr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l\right)$$

$$f(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) = 4\pi \sum_{lm} f_l(p) Y_{lm}(\Omega_p) Y_{lm}^*(\Omega'_p) = \sum_l (2l+1) \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ip} P_l(\cos \theta)$$



Два потенциала взаимодействия с разной геометрией могут приводить к одинаковому (или близкому) набору фаз рассеяния, а значит одинаковому сечению рассеяния! Отличие волновых функций состоит только в количестве нулей (т.е. связанных состояний) в области взаимодействия.

Заключение

- ❑ Оптическая модель базируется на строгой теории ядерных реакций
- ❑ Оптическая модель может служить инструментом извлечения информации о ядро-ядерном потенциале
- ❑ Имеется обширный экспериментальный материал по угловым распределениям упруго рассеянных ядерных частиц
- ❑ Имеется обширная успешная практика применения оптической модели к низкоэнергетическим ядерным реакциям. Построены глобальные параметризации оптических потенциалов для нуклон-ядерного рассеяния
- ❑ Расчет дифференциальных сечений упругого рассеяния в современных условиях является «простой» численной задачей
- ❑ Набор параметров феноменологического потенциала упругого рассеяния является неоднозначным