ЛЕКЦИЯ 2

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

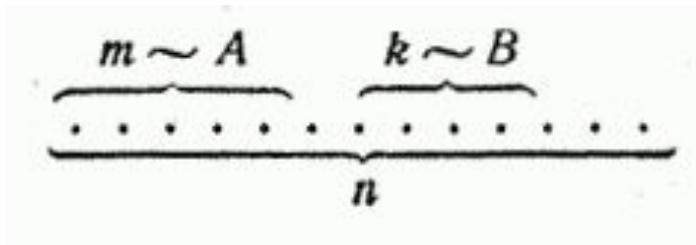
1. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий:

.

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \quad (1)$$

Докажем теорему сложения вероятностей для схемы случаев. Пусть возможные исходы опыта сводятся к совокупности случаев, которые мы для наглядности изобразим в виде n точек:



Предположим, что m из этих случаев благоприятны событию А,

а – n событию В.

Тогда

$$P(A)=\frac{m}{n};P(B)=\frac{k}{n}.$$

Так как события А и В несовместимы, то нет таких случаев, которые благоприятны и А, и В вместе. Следовательно, событию А и В благоприятны m+n случаев и

$$P(A+B)=\frac{m+k}{n}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (1), получим тождество.

Теорема доказана.

Обобщим теорему сложения на случай трех событий.

Обозначая событие A+B буквой D , и присоединяя к сумме еще одно событие C, легко доказать, что:

$$P(A+B+C)=P(D+C)=P(D)+P(C)=P(A+B)+P(C)=P(A)+P(B)+P(C).$$

методом полной индукции обобщим теорему сложения на произвольное число несовместных событий.

1. предположим, что она справедлива для n событий:

$$A_1, A_2, \dots, A_n,$$

2. докажем, что она будет справедлива для n+1 событий:

$$A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}.$$

Пусть

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_{n+1} = C.$$

Тогда

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n + A_{n+1}) = P(C + A_{n+1}) = P(C) + P(A_{n+1})$$

Но так как для n событий мы считаем теорему уже доказанной, то

$$P(C) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

Следовательно

$$P(C) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

что и требовалось доказать

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

СЛЕДСТВИЯ ТЕОРЕМЫ

Следствие 1. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Доказательство:

Так как события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу, то появление хотя бы одного из них – достоверное событие:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1$$

Так как они несовместные события, то к ним применима теорема сложения вероятностей

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Следовательно $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$

что и требовалось доказать

Определение: Противоположными событиями называются два несовместных события, образующих полную группу.($\overline{A}$)

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Это следствие есть частный случай следствия 1

Пример

В лотерее 1000 билетов; из них на один билет падает выигрыш 500 руб., на 100 билетов – выигрыши по 100 руб., на 50 билетов – выигрыши по 20 руб., на 100 билетов – выигрыши по 5 руб., остальные билеты невыигрышные. Некто покупает один билет. Найти вероятность выиграть не менее 20 руб.

Решение: Рассмотрим события:

А– выиграть не менее 20 руб

A_1- выиграть 20 руб.,

A_2- выиграть 100 руб.,

A_3 - - выиграть 500 руб.

Очевидно,

$$A=A_1 + A_2 + A_3$$

Т.к. события не совместимы применим теорему вероятностей для несовместимых событий

Ответ - ?

Пример 2. В урне 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Вынули один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар а) синий или черный; б) белый, черный или синий.

Решение. Обозначим следующие события:

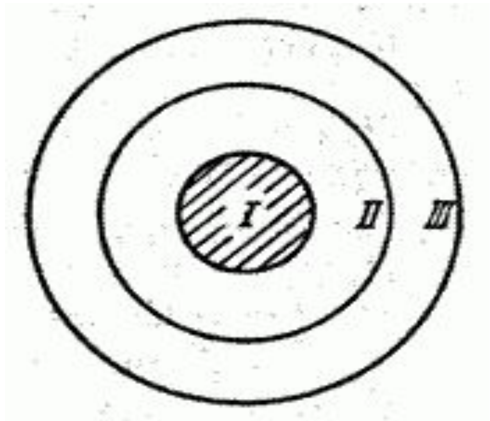
Б – вынули белый шар, ;

Ч – вынули черный шар, ;

С – вынули синий шар, ;

К – вынули красный шар, .

Пример 3. Круговая мишень (рис.) состоит из трех зон: I, II и III. Вероятность попадания в первую зону при одном выстреле 0,15, во вторую 0,23, в третью 0,17. Найти вероятность промаха.



Решение. Обозначим –A- промах, $\bar{A}$- попадание. Тогда

$$\bar{A} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3$$

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1) + P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_3) = 0,15 + 0,23 + 0,17 = 0,55$$

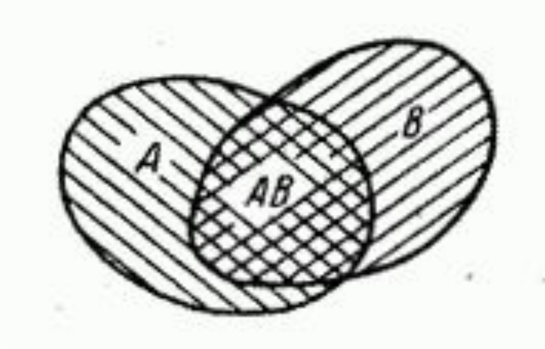
$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0,45$$

тогда

Вероятность суммы двух совместимых событий выражается формулой

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

В справедливости формулы можно наглядно убедиться



ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Определение: Событие А называется независимым от события В, если вероятность события А не зависит от того, произошло событие В или нет.

Определение: Событие А называется зависимым от события В , если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло событие В или нет.

Пример: Определить зависимы события или нет

1) Опыт состоит в бросании двух монет; рассматриваются события:

А– появление герба на первой монете,

В – появление герба на второй монете.

2) В урне два белых шара и один черный; два лица вынимают из урны по одному шару; рассматриваются события:

А – появление белого шара у 1-го лица,

В– появление белого шара у 2-го лица.

Вероятность события А до того, как известно что-либо о событии В , равна 2/3.

Если стало известно, что событие В произошло, то вероятность события А становится равной ½, из чего заключаем, что событие зависит от события .

Определение : Вероятность события , вычисленная при условии, что имело место другое событие , называется условной вероятностью события и обозначается:

$$P(A \backslash B)$$

Условие независимости события А от события В можно записать в виде: $P(A \backslash B)=P(A)$

а условие зависимости – в виде: $P(A \backslash B) \neq P(A)$

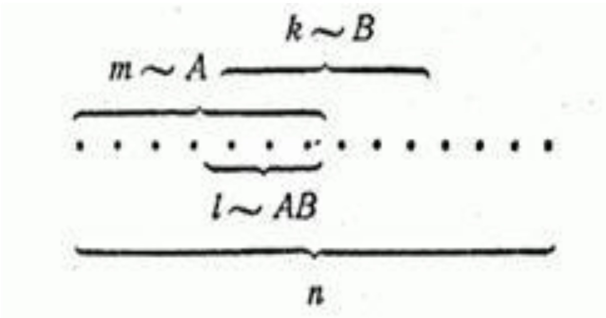
.

Теорема: Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место:

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) \tag{2}$$

Доказательство:

Докажем для схемы случаев. Пусть возможные исходы опыта сводятся к n случаям, которые мы для наглядности изобразим в виде точек:



Предположим, что событию A благоприятны m случаев, а событию B благоприятны k случаев. Так как мы не предполагали события A и B несовместными, то вообще существуют случаи, благоприятные и событию A, и событию B одновременно. Пусть число таких случаев-l .

Тогда

$$P(AB) = \frac{l}{n}; P(A) = \frac{m}{n}$$

Вычислим , условную вероятность события В в предположении, что А имело место.

Если известно, что событие А произошло, то из ранее возможных n случаев остаются возможными только те m , которые благоприятствовали событию А. Из них l случаев благоприятны событию В.

Следовательно,

$$P(B \mid A) = \frac{l}{m}$$

Подставляя полученные выражения и в формулу (2), получим тождество.

Теорема доказана.

при применении теоремы умножения безразлично, какое из событий и считать первым, а какое вторым,

$$P(AB) = P(B)P(A|B)$$

Следствие 1.

Если событие A не зависит от события B , то и событие B не зависит от события A.

Доказательство. Дано, что событие не зависит от , т.е.

$$P(A)= P(A\backslash B) \qquad (3)$$

Требуется доказать, что и событие B не зависит от A , т.е.

$$P(B)= P(B\backslash A)$$

При доказательстве будем предполагать, что $P(A) \neq 0$

Напишем теорему вероятности в двух формах:

$$P(AB) = P(A)P(B\,|\,A)$$

$$P(AB) = P(B)P(A\,|\,B)$$

Следовательно $$P(A)P(B\,|\,A) = P(B)P(A\,|\,B)$$

или, согласно условию (3), $$P(A)P(B\,|\,A) = P(B)P(A) \qquad (4)$$

Разделим обе части равенства (4) на P(A) . Получим:

$$P(B\,|\,A) = P(B)$$

что и требовалось доказать.

Из следствия 1 вытекает, что зависимость или независимость событий всегда взаимны.

<u>Определение:</u> Два события называются независимыми, если появление одного из них не изменяет вероятности появления другого.

Понятие независимости событий может быть распространено на случай произвольного числа событий. Несколько событий называются независимыми, если любое из них не зависит от любой совокупности остальных.

$$\frac{1}{4}$$

Следствие 2. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Следствие непосредственно вытекает из определения независимых событий.

$$\frac{1}{4}$$

Пример:

1. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.
2. **Вероятность попадания в цель у первого стрелка 0,8, у второго – 0,9. Стрелки делают по выстрелу. Найти вероятность: а) двойного попадания; б) двойной промах; в) хотя бы одного попадания; г) одного попадания.**
3. **Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочниках равны 0,6; 0,7 и 0,8 соответственно. Вычислить вероятность того, что формула содержится 1) только в одном справочнике; 2) только в двух справочниках; 3) во всех трех справочниках.**