Основные теоремы о непрерывных функциях

Непрерывность элементарных функций

Теорема Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная (для частного за исключением тех значений аргумента, в которых делитель равен нулю)

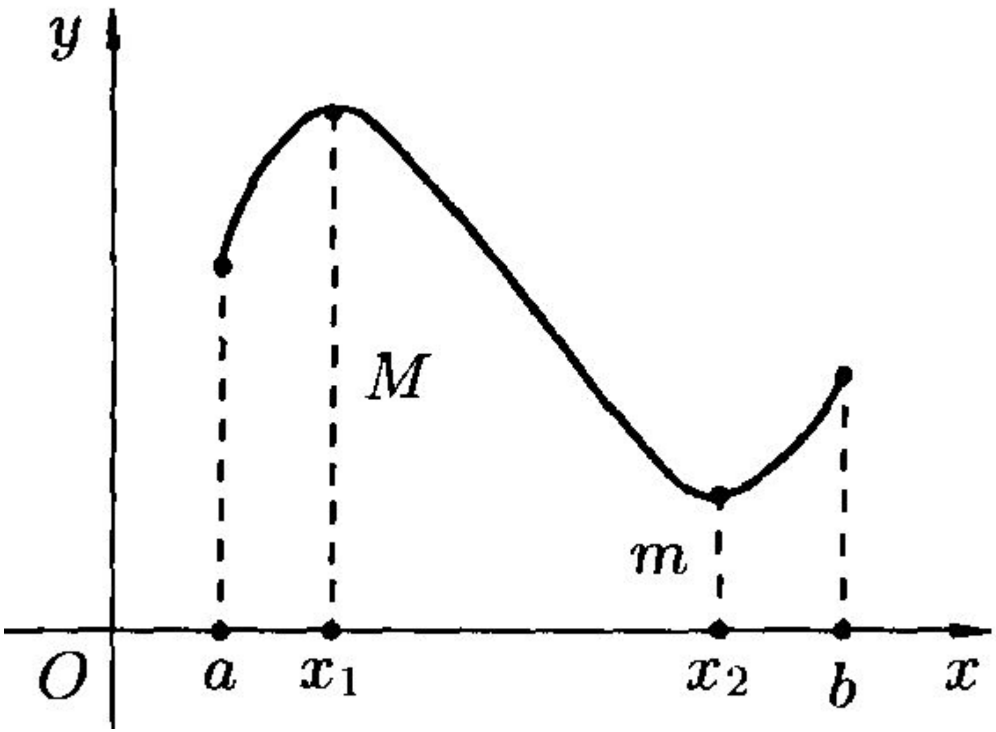
Теорема Пусть функции $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $f(\varphi(x))$, состоящая из непрерывных функций, непрерывна в точке x_0.

Теорема Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $[a;b]$ оси Ox, то обратная функция $y = \varphi(x)$ также непрерывна и монотонна на соответствующем отрезке $[c;d]$ оси Oy (без доказательства).

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема (Вейерштрасса) Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

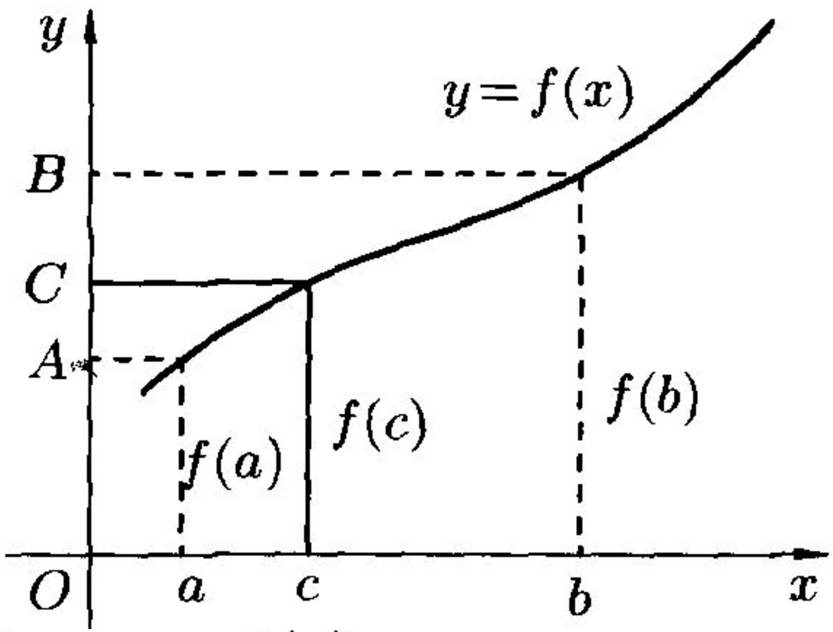
Для любого $x \in [a; b]$ имеет место неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$.



Следствие

Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

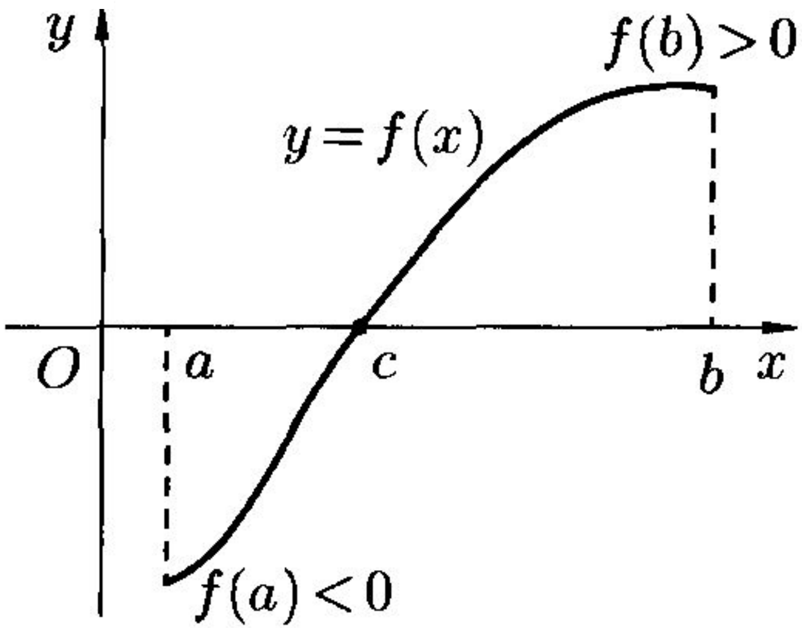
Теорема **(Больцано-Коши)** Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на его концах неравные значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между A и B.

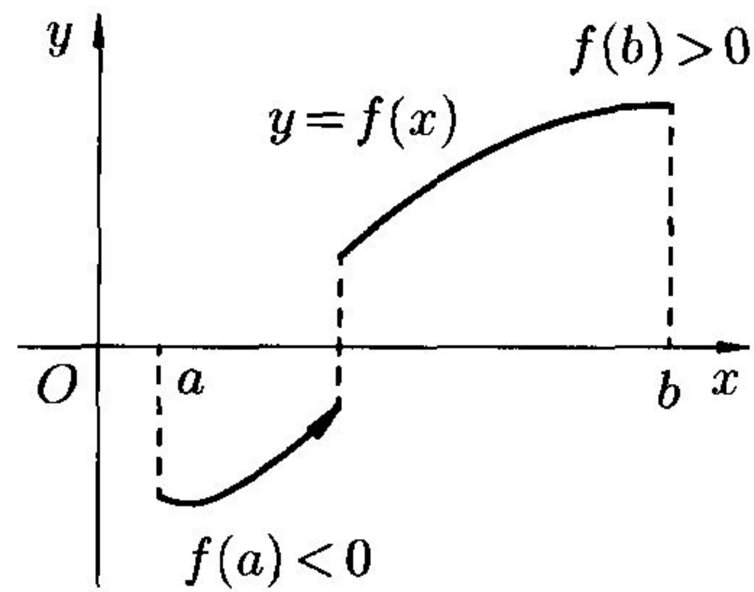


Следствие

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на его концах принимает значения разных знаков. то внутри отрезка $[a;b]$ найдется хотя бы одна точка c, в которой данная функция $f(x)$ обращается в нуль: $f(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы: если график непрерывной функции переходит с одной стороны оси Ox на другую, то он пересекает ось Ox





Утверждения теорем, вообще говоря, делаются неверными, если нарушены какие-либо из ее условий: функция непрерывна не на отрезке $[a; b]$, а в интервале $(a; b)$, либо функция на отрезке $[a; b]$ имеет разрыв.

Пример 19.5. Определить с точностью до $\varepsilon = 0{,}00001$ корень уравнения $e^{2x+1} + x^2 - 5 = 0$, принадлежащий отрезку $[0;1]$, применив метод половинного деления.

❍ Решение: Обозначим левую часть уравнения через $f(x)$.

Шаг 1. Вычисляем $\varphi = f(a)$ и $\psi = f(b)$, где $a = 0$, $b = 1$.

Шаг 2. Вычисляем $x = \dfrac{a+b}{2}$.

Шаг 3. Вычисляем $y = f(x)$. Если $f(x) = 0$, то x — корень уравнения.

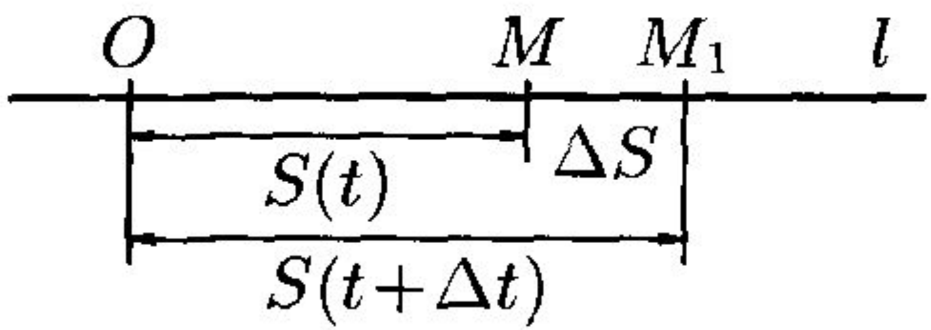
Шаг 4. При $f(x) \neq 0$ если $y \cdot \varphi < 0$, то полагаем $b = x$, $\psi = y$, иначе полагаем $a = x$, $\varphi = y$.

Шаг 5. Если $b - a - \varepsilon < 0$ то задача решена. В качестве искомого корня (с заданной точностью ε) принимается величина $x = \dfrac{a+b}{2}$. Иначе процесс деления отрезка $[a;b]$ пополам продолжаем, возвращаясь к шагу 2.

В результате произведенных действий получим: $x = 0{,}29589$. ●

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Задачи, приводящие к понятию производной



Если в некоторый момент времени t точка занимает положение M, то в момент времени $t+\Delta t$ (Δt — приращение времени) точка займет положение M_1, где $OM_1 = S + \Delta S$ (ΔS — приращение расстояния)

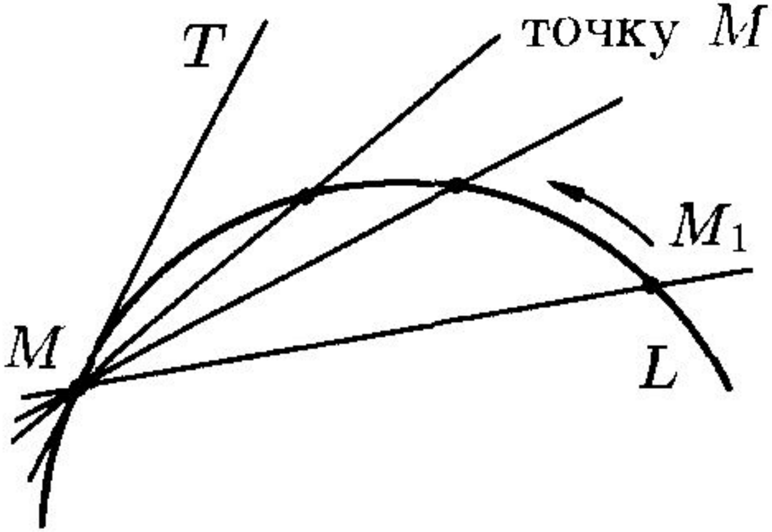
$$V_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

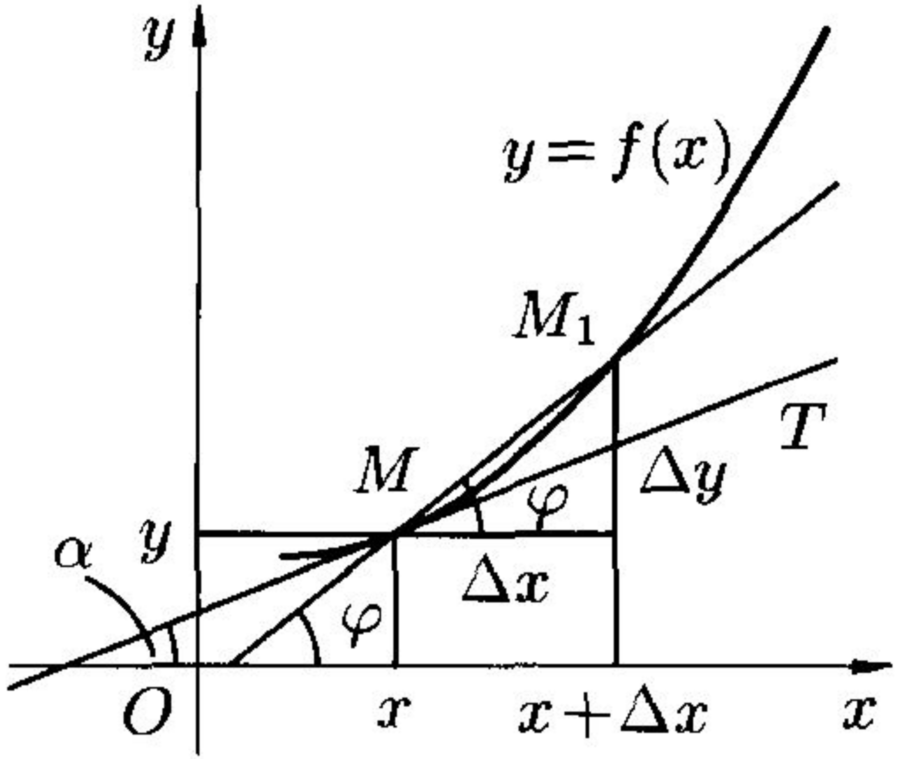
Предел средней скорости движения при стремлении к нулю промежутка времени Δt называется *скоростью движения точки в данный момент времени* (или мгновенной скоростью). Обозначив эту скорость через V, получим

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad \text{или} \quad V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Касательная к кривой

Касательной к данной кривой в данной точке M называется предельное положение MT секущей MM_1, проходящей через точку M, когда вторая точка пересечения M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M_1





$$k_{\text{сек}} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha.$$

Поэтому угловой коэффициент касательной равен

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

К нахождению пределов приводят решения множества других задач

– если $Q = Q(t)$ — количество электричества, проходящего через поперечное сечение проводника за время t, то *сила тока в момент времени* t равна

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t};$$

– если $N = N(t)$ — количество вещества, вступающего в химическую реакцию за время t, то *скорость химической реакции в момент времени* t равна

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t};$$

– если $m = m(x)$ — масса неоднородного стержня между точками $O(0;0)$ и $M(x;0)$, то *линейная плотность стержня в точке* x есть

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}.$$

Определение производной; ее механический и геометрический смысл. Уравнение касательной и нормали к кривой

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале $(a; b)$. Проделаем следующие операции:

– аргументу $x \in (a; b)$ дадим приращение Δx: $x + \Delta x \in (a; b)$;

– найдем соответствующее приращение функции: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$;

– составим отношение приращения функции к приращению аргумента: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

– найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta x} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если этот предел существует, то его называют производной функции $f(x)$ и обозначают одним из символов f'_x, $f'(x)$; y'; $\dfrac{dy}{dx}$; y'_x.

Производной функции $y = f(x)$ ***в точке*** x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Итак, по определению

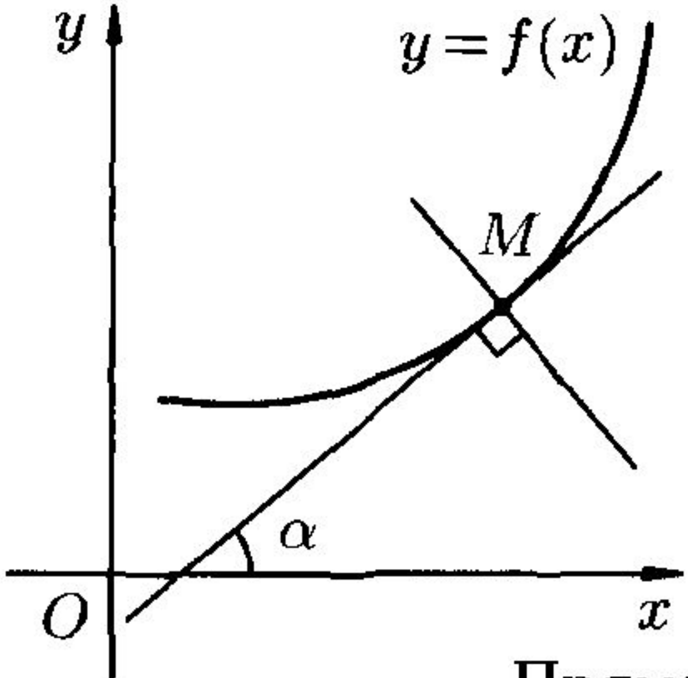
$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$$

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a; b)$, называется ***дифференцируемой*** в этом интервале; операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием.***

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad f'(x) = \operatorname{tg}\alpha = k,$$

производная $f'(x)$ ***в точке*** x ***равна угловому коэффициенту касательной к графику функции*** $y = f(x)$ ***в точке, абсцисса которой равна*** x.

Если точка касания M имеет координаты $(x_0; y_0)$, то угловой коэффициент касательной есть $k = f'(x_0)$.



$M(x_0; y_0)$, то ***уравнение касательной***:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется ***нормалью к кривой.***

Так как нормаль перпендикулярна касательной, то ее угловой коэффициент

$$k_{\text{норм.}} = -\frac{1}{k_{\text{кас}}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

уравнение нормали имеет вид $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$ (если $f'(x_0) \neq 0$)

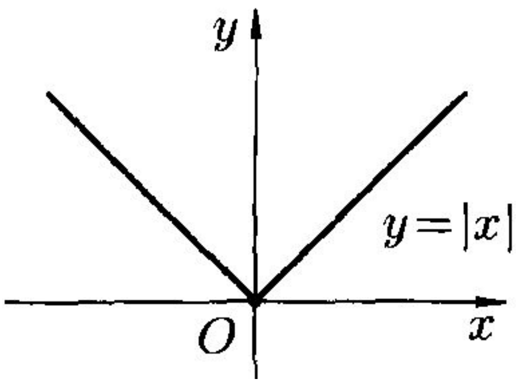
Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Теорема Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней

❑ Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

Отсюда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, имеем $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то есть $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$

Переходя к пределу, при $\Delta x \to 0$, получаем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. А это и означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x. ■



Обратная теорема неверна. непрерывная функция может не иметь производной Примером такой функции является функция

$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

функция непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема в ней.

Замечания: 1. Существуют односторонние пределы функции $y = |x|$ в точке $x = 0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -1$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$. В таких случаях говорят, что функция имеет ***односторонние производные*** (или «производные слева и справа»), и обозначают соответственно $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$.

Если $f'_+(x) \neq f'_-(x)$, то производная в точке не существует. Не существует производной и в точках разрыва функции.

2. Производная $y' = f'(x)$ непрерывной функции $y = f(x)$ сама не обязательно является непрерывной.

Если функция $y = f(x)$ имеет непрерывную производную $y' = f'(x)$ в некотором интервале (a, b), то функция называется ***гладкой***.

Производная суммы, разности, произведения и частного функций

Пусть функции $u = u(x)$ *и* $v = v(x)$ *две дифференцируемые в некотором интервале* $(a; b)$ *функции.*

Теорема Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций $(u \pm v)' = u' \pm v'$

❑ Обозначим $y = u \pm v$. По определению производной и основным теоремам о пределах получаем:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)) - (u(x) \pm v(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v',$$

т. е. $(u \pm v)' = u' \pm v'$. ■

Теорема Производная произведения двух функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго: $(u \cdot v)' = u'v + v'u$

а) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, где $c = \text{const}$;

б) $(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$.

Теорема Производная частного двух функций $\frac{u(x)}{v(x)}$, если $v(x) \neq \neq 0$ равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $v \neq 0$.

❑ Пусть $y = \frac{u}{v}$. Тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x) \cdot v(x) + v(x) \cdot \Delta u - u(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot \Delta v}{\Delta x \cdot (v(x) + \Delta v) v(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{\Delta x \cdot (v^2 + v \cdot \Delta v)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \Delta v} =$$

$$= \frac{v \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v} = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

т. е. $\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. $\blacksquare$

Следствие $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{1}{c} \cdot u'$

$$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c \cdot v'}{v^2},$$ где $c = \mathrm{const}$