
ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Линейное программирование – это *разновидность математического моделирования*, частный случай оптимального программирования.

Суть принципа оптимальности состоит в стремлении выбрать такое планово-управленческое решение

$$\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

где x_j , ($j = \overline{1, n}$) — его компоненты (параметры), *которое наилучшим образом учитывало бы внутренние возможности и внешние условия производственной деятельности хозяйствующего субъекта.*

Слова «наилучшим образом» здесь означают *выбор*
некоторого критерия оптимальности, т. е.
некоторого экономического показателя,
позволяющего сравнивать эффективность тех или
иных планово-управленческих решений.

Традиционные критерии оптимальности:
«максимум прибыли», «минимум затрат»,
«максимум рентабельности» и др.

Таким образом, реализовать на практике принцип оптимальности в планировании и управлении – это значит решить экстремальную задачу вида:

$$\max(\min)f(\bar{X}) \quad (1)$$

$$\bar{X} \in D \quad (2)$$

где $f(\bar{X})$ - математическая запись критерия оптимальности – *целевая функция*

D – область определения задачи. Совокупность чисел $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющих ограничениям задачи называется допустимым решением (или планом).

Задачу условной оптимизации (1), (2) обычно записывают в виде:

Найти *максимум* или *минимум* функции

$$f(\bar{X}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3)$$

При ограничениях

Обозначение $\{\leq, =, \geq\}$ говорит о том, что в конкретном ограничении возможен один из знаков: $\leq, =, \geq$

Задача (3 – 5) – *общая задача оптимального* (математического) *программирования*, иначе – *математическая модель* задачи **ОПТИМАЛЬНОГО** программирования.

План $\bar{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, при котором целевая функция задачи принимает максимальное (минимальное) значение, называется **ОПТИМАЛЬНЫМ**.

В случае линейного программирования целевая функция $f(\bar{X})$ может быть представлена в виде линейной формы

$$f(\bar{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

c_j – заданные постоянные величины, а связь с ограниченными ресурсами описывается линейными уравнениями и неравенствами

$$\max(\min) f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (6)$$

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (7)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (8)$$

Наиболее изучены задачи линейного программирования, для которых разработан универсальный метод решения – метод последовательного улучшения плана (симплекс-метод)

Пример 3. Задача о смесях.

Стандартом предусмотрено, что октановое число автомобильного бензина А-76 должно быть не ниже 76, а содержание серы в нем – не более 0,3%. Для изготовления такого бензина на заводе используется смесь из четырех компонентов. Данные о ресурсах смешиваемых компонентов, их себестоимости и их октановом числе, а также о содержании серы приведены в таблице.

Характеристика	Компонент автомобильного бензина			
	№1	№2	№3	№4
Октановое число	68	72	80	90
Содержание серы, %	0,35	0,35	0,3	0,2
Ресурсы, Т	700	600	500	300
Себестоимость, ден. ед./Т	40	45	60	90

Требуется определить, сколько тонн каждого компонента следует использовать для получения 1000 т автомобильного бензина А-76, чтобы его себестоимость была минимальной.

Решение

Для решения этой задачи сформулируем ее экономико-математическую модель.

Введем необходимые обозначения:

пусть x_j ($j = 1, 2, 3, 4$) - количество в смеси компонента с номером j . С учетом этих обозначений имеем задачу (критерий оптимальности – «минимум себестоимости»):

$$\min f(\bar{X}) = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000, \quad (1)$$

$$68x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 90x_4 \geq 76 \cdot 1000, \quad (2)$$

$$0,35x_1 + 0,35x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 \leq 0,3 \cdot 1000, \quad (3)$$

$$x_1 \leq 700,$$

$$x_2 \leq 600,$$

$$x_3 \leq 500,$$

$$x_4 \leq 300,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

Функциональное ограничение (1) отражает необходимость получения заданного количества смеси (1000 т), (2), (3) – ограничения по октановому числу и содержанию серы в смеси, остальные – ограничения на имеющиеся объемы соответствующих ресурсов.

Полученная *математическая задача-задача* *линейного программирования*. Она может быть решена симплекс-методом, который мы рассмотрим позже.

В результате решения получается оптимальное решение

$$\bar{X}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*):$$

$$x_1^* = 571 \text{ Т}, \quad x_2^* = 0 \text{ Т}, \quad x_3^* = 143 \text{ Т}, \quad x_4^* = 286 \text{ Т},$$

Подставляя найденное решение в целевую функцию, имеем

$$f(\bar{X}^*) = 40 \cdot 571 + 45 \cdot 0 + 60 \cdot 143 + 90 \cdot 286 = 57160 \text{ (ден. ед.)}$$

Таким образом, оптимальному решению \bar{X}^* будет отвечать минимальная себестоимость в 57160 ден. ед.

Решение систем алгебраических линейных уравнений Метод Крамера

Определитель системы Δ , составленный из коэффициентов при неизвестных, имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Числа b_1, b_2, \dots, b_n – свободные члены.

Система (1) называется однородной, если

$$b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0.$$

Решением системы (1) называется совокупность чисел $x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, \dots, x_n = \lambda_n$, которые обращают все уравнения в тождества.

Система имеющая хотя бы одно решение, называется ***совместной***.

Система, не имеющая решений, называется ***несовместной***.

Решить систему уравнений (1) можно различными методами, в частности, методом Крамера (Крамер – швейцарский математик, 1704 – 1752)

Теорема Крамера

Если определитель Δ системы (1) отличен от нуля, то система ***совместна*** и имеет единственное решение, которое можно найти по формуле:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n}$$

В этой формуле Δ_j является определителем, полученным из определителя системы Δ путем замены столбца j столбцом свободных членов.

Замечание

Если определитель системы уравнений (1) $\Delta = 0$, то система (1) или несовместна или имеет бесконечно много решений.

Пример

Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Решение

Определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \Rightarrow$

Система имеет единственное решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-3}{-2} = 1,5;$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{-2} = -0,5$$

ОТВЕТ: $x = 1,5; y = -0,5$

Однородная система трех линейных уравнений

Для простоты полагаем $n = 3$

Однородная система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) имеет *тривиальное* решение:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0,$$

но может случиться, что однородная система (1) имеет и не нулевое решение. Его называют *нетривиальным* решением однородной системы (1).

Теорема

Линейная однородная система трех линейных уравнений с 3 неизвестными имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель $\Delta = 0$, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Доказательство

Пусть система (1) имеет ненулевое решение (x_1, x_2, x_3)

Пусть ее определитель $\Delta \neq 0$, тогда на основании формул Крамера система (1) имеет только нулевое решение

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}$$

$$(\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0, \quad \text{т.к.} \quad b_1 = b_2 = b_3 = 0)$$

**Это противоречит предположению.
Следовательно, $\Delta = 0$. Тогда линейная система (1)
либо несовместна, либо имеет бесконечно много
решений. Но наша система совместна, так как
имеется нулевое решение. Следовательно,
система (1) допускает бесконечно много решений,
в том числе и ненулевые.**

Пример

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 3(-2) - 2(-2 - 3) - (2 + 1) = -6 + 10 - 3 = 1 \neq 0$$

Система имеет тривиальное решение: $x = y = z = 0$

Другой способ расчета:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 11 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 11 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

ОТВЕТ: (0, 0, 0)

**ОБРАТНАЯ МАТРИЦА.
РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ
УРАВНЕНИЙ**

Определение

Если определитель $|A|$ матрицы A равен нулю, то матрица A называется *вырожденной*; в противном случае матрица A называется невырожденной.

Рассмотрим теперь так называемую обратную матрицу, понятие которой вводится только для *квадратной матрицы*.

Определение

Если A – квадратная матрица, то обратной для нее матрицей называется матрица, обозначенная A^{-1} и удовлетворяющая условиям

$$AA^{-1} = E, \quad A^{-1}A = E, \quad \text{где } E \text{ – единичная матрица}$$

Определение

Пусть дана матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Составим матрицу \tilde{A} из алгебраических дополнений к элементам транспонированной матрицы A^T :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица \tilde{A} называется матрицей, присоединенной к матрице A .

Теорема

Если матрица A не вырожденная, то она имеет обратную матрицу, A^{-1} которая находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \tilde{A}, \quad \text{или} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$$

где \tilde{A} - матрица, присоединенная к матрице A ,

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

На основании теоремы запишем алгоритм получения обратной матрицы:

1. Находим определитель матрицы A :

Если $|A| = 0$, то обратная матрица не существует.

Если $|A| \neq 0$, то переходим ко 2 шагу.

2. Находим алгебраические дополнения всех элементов a_{ik} матрицы A и записываем *новую* матрицу составленную из A_{ik} (алгебраических дополнений).

3. *Транспонируем* полученную матрицу (меняем местами столбцы полученной матрицы со строками), получаем присоединенную матрицу \tilde{A} .

4. Умножим полученную матрицу \tilde{A} на $\frac{1}{|A|}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$$

Пример

Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Решение

1. Находим определитель матрицы A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 4 = 10 \neq 0$$

Следовательно, данная матрица A является невырожденной и имеет обратную матрицу.

2. Найдем алгебраические дополнения каждого элемента:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 3 = 3, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 4 = -4,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-1) = 1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2.$$

Получим матрицу $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ алгебраических дополнений

3. Транспонируем эту матрицу, получаем присоединенную матрицу $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Умножим полученную матрицу на $\frac{1}{|A|}$, т. е. на $\frac{1}{10}$

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ -0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Проверим полученный результат:

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ -0,4 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 & 0,2 - 0,2 \\ 1,2 - 1,2 & 0,4 + 0,6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

ОТВЕТ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ -0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$

РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

Пусть для простоты $n = 3$, имеем систему линейных уравнений (определенная система: 3 уравнения, 3 неизвестных):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

Числа a_{ik} – коэффициенты системы, а числа b_i свободные члены, $i = 1, 3, k = 1, 3$.

Решением системы (1) называется совокупность чисел $x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, x_3 = \lambda_3$, которые обращают все уравнения системы в тождества.

Введем матрицу коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

X - вектор-столбец из неизвестных, а B – вектор-столбец свободных членов:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Согласно правилу умножения матриц данную систему (1) можно записать так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

ИЛИ

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = B$$

Используя определение равенства матриц, данную систему (1) можно записать в виде матричного уравнение

$$AX = B, \quad (1)$$

Здесь в роли неизвестного выступает матрица X .

Уравнение (2) решается следующим образом. Если

A – невырожденная матрица ($|A| \neq 0$), то можно определить обратную матрицу A^{-1} .

Умножая обе части уравнения (2) слева на A^{-1}

$$A^{-1} AX = A^{-1} B$$

используем сочетательный закон умножения:

$(A^{-1} A)X = A^{-1} B$, но так как $A^{-1} A = E$, то

получаем решение матричного уравнения (2) в

виде $X = A^{-1}B$.

Итак, чтобы решить матричное уравнение, нужно

- 1. Найти обратную матрицу A^{-1}**
- 2. Найти произведение $A^{-1} B = X$**
- 3. Пользуясь определением равных матриц, записать ответ.**

Задача

Дана система уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$$

решить ее матричным способом.

Решение

Запишем систему в матричной форме $AX = B$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Решение системы $X = A^{-1}B$

1. Найдем обратную матрицу A^{-1}

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^3 (-1) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 5 - 10 = 5 \neq 0$$

Выпишем все алгебраические дополнения элементов матрицы A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{33} = 1.$$

Запишем новую матрицу $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 4 & 12 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Транспонируем ее:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ – присоединенная матрица}$$

Учитывая, что $\frac{1}{|A|} = \frac{1}{5}$, запишем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 & -0,2 \\ 2 & 2,4 & -0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Находим произведение $X = A^{-1} B$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 & -0,2 \\ 2 & 2,4 & -0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 0,8 \cdot 0 + (-0,2) \cdot 15 \\ 2 \cdot 5 + 2,4 \cdot 0 + (-0,6) \cdot 15 \\ 0 \cdot 5 + \frac{1}{5} \cdot 0 + 0,2 \cdot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Итак,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3.$$

ОТВЕТ: (2, 1, 3)

Замечание

Другой расчет:

$$X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 25 - 15 \\ 50 - 45 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**СИСТЕМА m ЛИНЕЙНЫХ
УРАВНЕНИЙ С n ПЕРЕМЕННЫМИ**

Рассмотрим систему m линейных с n переменными (при $m < n$ такие системы называются неопределенными):

Число уравнений m не равно, вообще говоря, числу неизвестных n .

или в векторной записи:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = B,$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \square \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \square \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \square \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \square \\ b_m \end{pmatrix} -$$

соответствующие вектор-столбцы.

Запишем расширенную матрицу этой системы в

виде: $A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n \quad B$

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Элементарными преобразованиями системы (1)

(или матрицы A_p) называются следующие

преобразования:

-
- 1) перестановка любых двух уравнений (строк);
 - 2) умножение обеих частей одного из уравнений на *любое отличное от нуля* число;
 - 3) прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на любое число, *отличное от нуля*;

4) вычеркивание нулевой строки (уравнения с нулевыми коэффициентами и свободным членом, равным 0):

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$$

Определение.

Системы уравнений вида (1) называются ***эквивалентными*** (или ***равносильными***), если они **имеют *одно и то же множество решений***.

Можно **показать,** **что** *элементарные преобразования* переводят данную систему уравнений в *эквивалентную систему*.

При практическом решении системы линейных уравнений методом Гаусса последовательно над строками матрицы A_p выполняют элементарные преобразования, так что некоторое неизвестное исключается из всех уравнений, кроме одного, т. е. в составе расширенной матрицы формируется единичная матрица.

ΜΕΤΟΔ ΓΑΥΣΣΑ

Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Предположим, что в системе (1) коэффициент при переменной x_1 в первом уравнении $a_{11} \neq 0$ (если это не так, то перестановкой уравнений местами добьемся того, что $a_{11} \neq 0$).

Шаг 1. Умножая первое уравнение на подходящие числа (а именно на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \dots, -\frac{a_{m1}}{a_{11}}$)

и прибавляя последовательно полученные уравнения соответственно ко второму, третьему, ..., m -му уравнению системы (1), исключим переменную x_1 из всех последующих уравнений, начиная со второго.

Шаг 2.

Предположим, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (если не так, то соответствующей перестановкой уравнений или переменных с изменением их номеров добьемся того, чтобы $a_{22}^{(1)} \neq 0$). Умножая второе уравнение последовательно на подходящие числа $\left(-\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \right.$
 $\left. -\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \dots, -\frac{a_{m2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \right)$ и прибавляя полученные

уравнения соответственно к третьему, четвертому, ..., m -му уравнению системы, исключим переменную x_2 из всех последующих уравнений, начиная с третьего.

Продолжая процесс последовательного исключения переменных, после $(r-1)$ -го шага получим систему

Число нуль в последних $m-r$ уравнениях означает, что их левые части имеют вид: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n$

Если хотя бы одно из чисел $b_{r+1}^{(r-1)}$, \dots , $b_m^{(r-1)}$ не равно нулю, то соответствующее равенство противоречиво, и система (1) несовместна.

Таким образом, для любой *совместной* системы числа $b_{r+1}^{(r-1)}$, \dots , $b_m^{(r-1)}$ в системе (3) равны нулю. В этом случае $m-r$ уравнений в системе (3) являются

тождествами и их можно не принимать во внимание при решении системы (1).

Очевидно, что после отбрасывания «лишних» уравнений возможны два случая:

а) число уравнений системы (3) равно числу переменных т. е. $r = n$ (в этом случае система (3) имеет треугольный вид);

б)

б) $r < n$ (в этом случае система (3) имеет ступенчатый вид).

Переход системы (1) к *равносильной* ей системе (3) называется *прямым ходом* метода Гаусса, а нахождение переменных из системы (3) – *обратным ходом*.

Преобразование Гаусса удобно проводить, осуществляя преобразования не с самими уравнениями, а с расширенной матрицей системы (1)

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Задача

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8, \end{cases}$$

Решение

Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array} \right)$$

Шаг 1 Так как $a_{11} \neq 0$. То умножая первую строку последовательно на числа (-2) , (-3) , (-2) и прибавляя полученные строки соответственно ко

второй, третьей, четвертой строкам, *исключим* переменную x_1 из всех строк, начиная со второй.

Заметив, что в новой матрице $a_{22}^{(1)} = 0$, поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array} \right)$$

Шаг 2 Так как теперь $a_{22}^{(1)} = -4 \neq 0$, то умножая вторую строку на $\left(-\frac{7}{4}\right)$ и прибавляя полученную строку к четвертой, исключим переменную x_2 из всех строк, начиная с третьей:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13,5 & -9 & 4,5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{117}{16} & \frac{117}{8} \end{array} \right)$$

Шаг 3 Учитывая, что $a_{33}^{(2)} = -8$, умножая третью строку на $\frac{13,5}{8} = \frac{117}{16}$ прибавляя полученную строку к четвертой исключим из нее переменную x_3 .

Получим (см. последнюю матрицу) систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -4x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -14, \\ -8x_3 + x_4 = 6 \\ -\frac{117}{16}x_4 = \frac{117}{8}, \end{cases}$$

Откуда, используя обратный ход метода Гаусса,
найдем из четвертого уравнения $x_4 = -2$;

из третьего $x_3 = \frac{6 - x_4}{-8} = \frac{6 + 2}{-8} = -1$;

из второго $x_2 = \frac{-14 - 8x_4 + 10x_3}{-4} = 2$ и

из первого уравнения $x_1 = 6 + 2x_4 - 3x_3 - 2x_2 = 1$,

т. е. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = -2$

ОТВЕТ: (1; 2; -1; -2)