ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Линейное программирование – это *разновидность математического моделирования*, частный случай оптимального программирования.

Суть принципа оптимальности состоит в стремлении выбрать такое планово-управленческое решение

$$\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

где $x_j, \ (j = \overline{1, n})$ **– его компоненты (параметры),** ***которое наилучшим образом учитывало бы внутренние возможности и внешние условия производственной деятельности хозяйствующего субъекта*****.**

Слова «наилучшим образом» здесь означают *выбор некоторого критерия оптимальности*, т. е. некоторого экономического показателя, позволяющего сравнивать эффективность тех или иных планово-управленческих решений.

Традиционные критерии оптимальности: «максимум прибыли», «минимум затрат», «максимум рентабельности» и др.

Таким образом, реализовать на практике принцип оптимальности в планировании и управлении – это значит решить экстремальную задачу вида:

$$\max(\min) f(\overline{X}) \qquad (1)$$

$$\overline{X} \in D \qquad (2)$$

где $f(\overline{X})$ - математическая запись критерия оптимальности – *целевая функция*

D – область определения задачи. Совокупность чисел $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих ограничениям задачи называется допустимым решением (или планом).

Задачу условной оптимизации (1), (2) обычно записывают в виде:

Найти *максимум* или *минимум* функции

$$f(\overline{X}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{3}$$

При ограничениях

$$\begin{array}{l}\varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n)\{\le, =, \ge\} b_1, \\ \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n)\{\le, =, \ge\} b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, ..., x_n)\{\le, =, \ge\} b_m, \end{array} \qquad (4)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n} \qquad (5)$$

Условие (5) необязательно, но его всегда при необходимости можно добиться.

Обозначение $\{\le, =, \ge\}$ говорит о том, что в конкретном ограничении возможен один из знаков: $\le, =, \ge$

Задача (3 – 5) – *общая задача оптимального* (математического) *программирования*, иначе – *математическая модель* задачи оптимального программирования.

План $\overline{X}^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$, при котором целевая функция задачи принимает максимальное (минимальное) значение, называется оптимальным.

В случае линейного программирования целевая функция $f(\bar{X})$ может быть представлена в виде линейной формы

$$f(\bar{X}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$$

c_j **– заданные постоянные величины, а связь с ограниченными ресурсами описывается линейными уравнениями и неравенствами**

$$\max(\min) f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (6)$$

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\{\le, =, \ge\} b_i, \quad i = \overline{1, m}, \qquad (7)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}, \qquad (8)$$

Наиболее изучены задачи линейного программирования, для которых разработан универсальный метод решения – метод последовательного улучшения плана (симплекс-метод)

Пример 3. Задача о смесях.

Стандартом предусмотрено, что октановое число автомобильного бензина *А*-76 должно быть не ниже 76, а содержание серы в нем – не более 0,3%. Для изготовления такого бензина на заводе используется смесь из четырех компонентов. Данные о ресурсах смешиваемых компонентов, их себестоимости и их октановом числе, а также о содержании серы приведены в таблице.

Характеристика	Компонент автомобильного бензина			
	№1	№2	№3	№4
Октановое число	68	72	80	90
Содержание серы, %	0,35	0,35	0,3	0,2
Ресурсы, Т	700	600	500	300
Себестоимость, ден. ед./Т	40	45	60	90

Требуется определить, сколько тонн каждого компонента следует использовать для получения 1000 т автомобильного бензина *А*-76, чтобы его себестоимость была минимальной.

Решение

Для решения этой задачи сформулируем ее экономико-математическую модель.

Введем необходимые обозначения:

пусть $x_j \quad (j = 1,2,3,4)$ **- количество в смеси компонента с номером *j*. С учетом этих обозначений имеем задачу (критерий оптимальности – «минимум себестоимости»):**

$$\min f(\bar{X}) = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000\,, \qquad (1)$$

$$68x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 90x_4 \geq 76 \cdot 1000\,, \qquad (2)$$

$$0{,}35x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}2x_4 \leq 0{,}3 \cdot 1000\,, \qquad (3)$$

$$x_1 \leq 700,$$

$$x_2 \leq 600,$$

$$x_3 \leq 500,$$

$$x_4 \leq 300,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$$

Функциональное ограничение (1) отражает необходимость получения заданного количества смеси (1000 т), (2), (3) – ограничения по октановому числу и содержанию серы в смеси, остальные – ограничения на имеющиеся объемы соответствующих ресурсов.

Полученная *математическая задача-задача линейного программирования*. Она может быть решена симплекс-методом, который мы рассмотрим позже.

В результате решения получается оптимальное решение

$$\overline{X}^* = \left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*\right):$$

$x_1^* = 571$ т, $x_2^* = 0$ т, $x_3^* = 143$ т, $x_4^* = 286$ т,

Подставляя найденное решение в целевую функцию, имеем

$$f(\overline{X}^*) = 40\cdot 571 + 45\cdot 0 + 60\cdot 143 + 90\cdot 286 = 57160 \text{ (ден. ед.)}$$

Таким образом, оптимальному решению $\overline{X}^*$ будет отвечать минимальная себестоимость в 57160 ден. ед.

Решение систем алгебраических линейных уравнений

Метод Крамера

Рассмотрим систему из *n* линейных уравнений с *n* неизвестными (определенная систему)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Определитель системы Δ, составленный из коэффициентов при неизвестных, имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Числа $b_1, b_2, ..., b_n$ – свободные члены.

Система (1) называется однородной, если

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0.$$

Решением системы **(1) называется совокупность**

чисел $x_1 = \lambda_1,\ x_2 = \lambda_2,\ \ldots,\ x_n = \lambda_n,$ **которые**

обращают все уравнения в тождества.

Система имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*.

Система, не имеющая решений, называется *несовместной*.

Решить систему уравнений (1) можно различными методами, в частности, методом Крамера (Крамер – швейцарский математик, 1704 – 1752)

Теорема Крамера

Если определитель Δ системы (1) отличен от нуля, то система *совместна* и имеет единственное решение, которое можно найти по формуле:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n}$$

В этой формуле Δ_j является определителем, полученным из определителя системы Δ путем замены столбца j столбцом свободных членов.

Замечание

Если определитель системы уравнений (1) $\Delta = 0$, то система (1) или несовместна или имеет бесконечно много решений.

Пример

Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Решение

Определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \quad \Rightarrow$

Система имеет единственное решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-3}{-2} = 1{,}5; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{-2} = -0{,}5$$

<u>ОТВЕТ</u>: $x = 1{,}5$; $y = -0{,}5$

Однородная система трех линейных уравнений

Для простоты полагаем $n = 3$

Однородная система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Система (1) имеет *тривиальное* решение:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,$$

но может случиться, что однородная система (1) имеет и не нулевое решение. Его называют *нетривиальным* решением однородной системы (1).

Теорема

Линейная однородная система трех линейных уравнений с 3 неизвестными имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель $\Delta = 0$, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Доказательство

Пусть система (1) имеет ненулевое решение (x_1, x_2, x_3) **Пусть ее определитель $\Delta \neq 0$, тогда на основании формул Крамера система (1) имеет только нулевое решение**

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}$$

$$\left(\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0,\ \text{т.к.}\quad b_1 = b_2 = b_3 = 0\right)$$

Это противоречит предположению. Следовательно, $\Delta = 0$. Тогда линейная система (1) либо несовместна, либо имеет бесконечно много решений. Но наша система совместна, так как имеется нулевое решение. Следовательно, система (1) допускает бесконечно много решений, в том числе и ненулевые.

Пример

Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x+2y-z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-2) - 2(-2-3) - (2+1) = -6 + 10 - 3 = 1 \neq 0$$

Система имеет тривиальное решение: $x = y = z = 0$

Другой способ расчета:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 11 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 11 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

<u>ОТВЕТ</u>: (0, 0, 0)

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определение

Если определитель $|A|$ матрицы A равен нулю, то матрица A называется *выврожденной*; в противном случае матрица A называется невырожденной.

Рассмотрим теперь так называемую обратную матрицу, понятие которой вводится только для ***квадратной матрицы*****.**

Определение

Если A **– квадратная матрица, то обратной для нее матрицей называется матрица, обозначенная** A^{-1} **и удовлетворяющая условиям**

$$AA^{-1} = E, \quad A^{-1}A = E,$$ **где** E **– единичная матрица**

Определение

Пусть дана матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Составим матрицу $\tilde{A}$ из алгебраических дополнений к элементам транспонированной матрицы A^T:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица $\tilde{A}$ называется матрицей, присоединенной к матрице A.

Теорема

Если матрица A не вырожденная, то она имеет обратную матрицу, A^{-1} которая находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\tilde{A}, \quad \text{или} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$

где $\tilde{A}$ - матрица, присоединенная к матрице A,

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

На основании теоремы запишем алгоритм получения обратной матрицы:

1. Находим определитель матрицы A:

Если $|A| = 0$, то обратная матрица не существует.

Если $|A| \neq 0$, то переходим ко 2 шагу.

2. Находим алгебраические дополнения всех элементов a_{ik} матрицы *A и* записываем *новую* матрицу составленную из A_{ik} (алгебраических дополнений).

3. *Транспонируем* полученную матрицу (меняем местами столбцы полученной матрицы со строками), получаем присоединенную матрицу $\tilde{A}$.

4. Умножим полученную матрицу $\widetilde{A}$ на $\dfrac{1}{|A|}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}$$

Пример

Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Решение

1. Находим определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 4 = 10 \neq 0$$

Следовательно, данная матрица *A* является невырожденной и имеет обратную матрицу.

2. Найдем алгебраические дополнения каждого элемента:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 3 = 3, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 4 = -4,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-1) = 1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2.$$

Получим матрицу $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **алгебраических дополнений**

3. Транспонируем эту матрицу, получаем присоединенную матрицу $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Умножим полученную матрицу на $\frac{1}{|A|}$**, т. е. на** $\frac{1}{10}$

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Проверим полученный результат:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ -0,4 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6+0,4 & 0,2-0,2 \\ 1,2-1,2 & 0,4+0,6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

<u>ОТВЕТ</u>: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ -0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$

РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

Пусть для простоты $n = 3$, имеем систему линейных уравнений (определенная система: 3 уравнения, 3 неизвестных):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

Числа a_{ik} − коэффициенты системы, а числа b_i свободные члены, $i = 1, 3$, $k = 1, 3$.

Решением системы (1) называется совокупность чисел $x_1 = \lambda_1$, $x_2 = \lambda_2$, $x_3 = \lambda_3$, которые обращают все уравнения системы в тождества.

Введем матрицу коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

X **- вектор-столбец из неизвестных, а *B* – вектор-столбец свободных членов:**

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Согласно правилу умножения матриц данную систему (1) можно записать так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

или

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = B$$

Используя определение равенства матриц, данную систему (1) можно записать в виде матричного уравнение

$$AX = B\,, \qquad (1)$$

Здесь в роли неизвестного выступает матрица *X*.

Уравнение (2) решается следующим образом. Если *A* – невырожденная матрица ($|A| \neq 0$), то можно определить обратную матрицу A^{-1}.

Умножая обе части уравнения (2) слева на A^{-1}

$$A^{-1}\,AX = A^{-1}\,B$$

используем сочетательный закон умножения:

$(A^{-1}\,A\,)X = A^{-1}\,B$ **, но так как** $A^{-1}\,A = E$ **, то**

получаем решение матричного уравнения (2) в

виде $X = A^{-1}B$.

Итак, чтобы решить матричное уравнение, нужно

1. **Найти обратную матрицу A^{-1}**
2. **Найти произведение $A^{-1}\,B = X$**
3. **Пользуясь определением равных матриц, записать ответ.**

Задача

Дана система уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$$

решить ее матричным способом.

Решение

Запишем систему в матричной форме $AX = B$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Решение системы $X = A^{-1}B$

1. Найдем обратную матрицу A^{-1}

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^3(-1)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 5 - 10 = 5 \neq 0$$

Выпишем все алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=0;\qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 4\end{vmatrix}=4;$$

$$A_{22}=(-1)^{4}\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix}=12;\qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1;\qquad A_{32}=(-1)^{5}\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3;\qquad A_{33}=1.$$

Запишем новую матрицу $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 4 & 12 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Транспонируем ее:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ **− присоединенная матрица**

Учитывая, что $\dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{5}$ **, запишем обратную матрицу**

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}=\begin{pmatrix}1 & 0,8 & -0,2\\ 2 & 2,4 & -0,6\\ 0 & 0,2 & 0,2\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

2. Находим произведение $X = A^{-1}\,B$

$$X=\begin{pmatrix}1 & 0,8 & -0,2\\ 2 & 2,4 & -0,6\\ 0 & 0,2 & 0,2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 0\\ 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 5+0,8\cdot 0+(-0,2)\cdot 15\\ 2\cdot 5+2,4\cdot 0+(-0,6)\cdot 15\\ 0\cdot 5+\frac{1}{5}\cdot 0+0,2\cdot 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$$

3. Итак,

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\Rightarrow x_1=2,\ x_2=1,\ x_3=3.$$

<u>ОТВЕТ</u>: (2, 1, 3)

<u>Замечание</u>

Другой расчет:

$$X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5&4&-1\\10&12&-3\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\0\\15\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}25-15\\50-45\\15\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}10\\5\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

СИСТЕМА m ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С n ПЕРЕМЕННЫМИ

Рассмотрим системугу m линейных с n переменными (при $m < n$ такие системы называются неопределенными):

Число уравнений m не равно, вообще говоря, числу неизвестных n.

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,
\end{cases} \qquad (1)
$$

или в краткой записи

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad (i = 1,2,\ldots,m)
$$

или в векторной записи:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B,$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} -$$

соответствующие вектор-столбцы.

Запишем расширенную матрицу этой системы в виде: $A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n \quad B$

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Элементарными преобразованиями системы (1) (или матрицы A_p) называются следующие преобразования:

1) **перестановка любых двух уравнений (строк);**

2) **умножение обеих частей одного из уравнений на *любое отличное от нуля* число;**

3) **прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на любое число, *отличное от нуля*;**

4) **вычеркивание нулевой строки (уравнения с нулевыми коэффициентами и свободным членом, равным 0):**

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$$

Определение.

Системы уравнений вида (1) называются *эквивалентными* (или равносильными), если они имеют *одно и то же множество решений*.

Можно показать, что *элементарные преобразования* переводят данную систему уравнений в *эквивалентную систему*.

При практическом решении системы линейных уравнений методом Гаусса последовательно над строками матрицы A_p выполняют элементарные преобразования, так что некоторое неизвестное исключается из всех уравнений, кроме одного, т. е. в составе расширенной матрицы формируется единичная матрица.

МЕТОД ГАУССА

Рассмотрим решение системы m линейных уравнений с n переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных – **заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.**

Предположим, что в системе (1) коэффициент при переменной x_1 в первом уравнении $a_{11} \neq 0$ (если это не так, то перестановкой уравнений местами добьемся того, что $a_{11} \neq 0$).

Шаг 1. Умножая первое уравнение на подходящие числа (а именно на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \ldots, -\frac{a_{m1}}{a_{11}}$)

и прибавляя последовательно полученные уравнения соответственно ко второму, третьему, …, m–му уравнению системы (1), исключим переменную x_1 из всех последующих уравнений, начиная со второго.

Получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad a_{i2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{in}^{(1)}x_n = b_i^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{cases} \qquad (2)$$

где буквами с верхним индексом (1) обозначены новые коэффициенты, полученные после первого шага.

Шаг 2.

Предположим, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (если не так, то соответствующей перестановкой уравнений или переменных с изменением их номеров добьемся того, чтобы $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Умножая второе уравнение последовательно на подходящие числа $\left(-\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}},\right.$ $\left.-\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \ \ldots, \ -\frac{a_{m2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right)$ и прибавляя полученные

уравнения соответственно к третьему, четвертому, …, m–му уравнению системы, исключим переменную x_2 из всех последующих уравнений, начиная с третьего.

Продолжая процесс последовательного исключения переменных, после (r−1)-го шага получим систему

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2r}^{(1)}x_r + a_{2,r+1}^{(1)}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad a_{rr}^{(r-1)}x_r + a_{r,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)}, \\
\qquad\qquad\qquad 0 = b_{r+1}^{(r-1)}, \\
\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad 0 = b_m^{(r-1)}
\end{cases}
\qquad (3)
$$

Число нуль в последних *m–r* уравнениях означает, что их левые части имеют вид: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n$

Если хотя бы одно из чисел $b_{r+1}^{(r-1)}$, … , $b_m^{(r-1)}$ ***не равны нулю, то соответствующее равенство противоречиво, и система (1) несовместна*.**

Таким образом, для любой *совместной* системы числа $b_{r+1}^{(r-1)}$, …, $b_m^{(r-1)}$ **в системе (3) равны нулю. В этом случае *m–r* уравнений в системе (3) являются**

тождествами и их можно не принимать во внимание при решении системы (1).

Очевидно, что после отбрасывания «лишних» уравнений возможны два случая:

а) число уравнений системы (3) равно числу переменных т. е. $r = n$ (в этом случае система (3) имеет треугольный вид);

б)

б) $r < n$ (в этом случае система (3) имеет ступенчатый вид).

Переход системы (1) к *равносильной* ей системе (3) называется *прямым ходом* метода Гаусса, а нахождение переменных из системы (3) – *обратным ходом*.

Преобразование Гаусса удобно проводить, осуществляя преобразования не с самими уравнениями, а с расширенной матрицей системы (1)

$$A_p = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Задача

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8, \end{cases}$$

Решение

Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right)$$

Шаг 1 **Так как $a_{11} \neq 0$. То умножая первую строку последовательно на числа (−2), (−3), (−2) и прибавляя полученные строки соответственно ко**

второй, третьей, четвертой строкам, *исключим переменную x_1 из всех строк, начиная со второй*.

Заметив, что в новой матрице $a_{22}^{(1)} = 0$, поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right)$$

Шаг 2 Так как теперь $a_{22}^{(1)} = -4 \neq 0$, то умножая вторую строку на $\left(-\frac{7}{4}\right)$ и прибавляя полученную строку к четвертой, исключим переменную x_2 из всех строк, начиная с третьей:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13{,}5 & -9 & 4{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{117}{16} & \frac{117}{8} \end{array}\right)$$

Шаг 3 Учитывая, что $a_{33}^{(2)} = -8$, умножая третью строку на $\frac{13,5}{8} = \frac{27}{16}$ и прибавляя полученную строку к четвертой исключим из нее переменную x_3.

Получим (см. последнюю матрицу) систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ \quad -4x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -14, \\ \qquad -8x_3 + x_4 = 6 \\ \qquad\quad -\frac{117}{16}x_4 = \frac{117}{8}, \end{cases}$$

Откуда, используя обратный ход метода Гаусса, найдем из четвертого уравнения $x_4 = -2$;

из третьего $$x_3 = \frac{6 - x_4}{-8} = \frac{6+2}{-8} = -1;$$

из второго $$x_2 = \frac{-14 - 8x_4 + 10x_3}{-4} = 2$$ **и**

из первого уравнения $$x_1 = 6 + 2x_4 - 3x_3 - 2x_2 = 1,$$

т. е. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = -2$

ОТВЕТ: (1; 2; −1; −2)