

---

# **ОСНОВЫ      ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

---

**Линейное программирование – это *разновидность математического моделирования*, частный случай оптимального программирования.**

*Суть принципа оптимальности состоит в стремлении выбрать такое планово-управленческое решение*

---

$$\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

где  $x_j$ , ( $j = \overline{1, n}$ ) — его компоненты (параметры), *которое наилучшим образом учитывало бы внутренние возможности и внешние условия производственной деятельности хозяйствующего субъекта.*

---

Слова «наилучшим образом» здесь означают *выбор*  
*некоторого критерия оптимальности*, т. е.  
некоторого экономического показателя,  
позволяющего сравнивать эффективность тех или  
иных планово-управленческих решений.

---

**Традиционные критерии оптимальности:**  
**«максимум прибыли», «минимум затрат»,**  
**«максимум рентабельности» и др.**

**Таким образом, реализовать на практике принцип оптимальности в планировании и управлении – это значит решить экстремальную задачу вида:**

---

$$\max(\min)f(\bar{X}) \quad (1)$$

$$\bar{X} \in D \quad (2)$$

где  $f(\bar{X})$  - математическая запись критерия оптимальности – *целевая функция*

**$D$  – область определения задачи. Совокупность чисел  $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , удовлетворяющих ограничениям задачи называется допустимым решением (или планом).**

**Задачу условной оптимизации (1), (2) обычно записывают в виде:**

**Найти *максимум* или *минимум* функции**

$$f(\bar{X}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3)$$

**При ограничениях**





---

Обозначение  $\{\leq, =, \geq\}$  говорит о том, что в конкретном ограничении возможен один из знаков:  $\leq, =, \geq$

Задача (3 – 5) – *общая задача оптимального* (математического) *программирования*, иначе – *математическая модель* задачи **ОПТИМАЛЬНОГО** программирования.

План  $\bar{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , при котором целевая функция задачи принимает максимальное (минимальное) значение, называется **ОПТИМАЛЬНЫМ**.

---

**В случае линейного программирования целевая функция  $f(\bar{X})$  может быть представлена в виде линейной формы**

$$f(\bar{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$c_j$  – заданные постоянные величины, а связь с ограниченными ресурсами описывается линейными уравнениями и неравенствами

$$\max(\min) f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (6)$$

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (7)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (8)$$

**Наиболее изучены задачи линейного программирования, для которых разработан универсальный метод решения – метод последовательного улучшения плана (симплекс-метод)**

### Пример 3. Задача о смесях.

Стандартом предусмотрено, что октановое число автомобильного бензина А-76 должно быть не ниже 76, а содержание серы в нем – не более 0,3%. Для изготовления такого бензина на заводе используется смесь из четырех компонентов. Данные о ресурсах смешиваемых компонентов, их себестоимости и их октановом числе, а также о содержании серы приведены в таблице.

<b>Характеристика</b>	<b>Компонент автомобильного бензина</b>			
	<b>№1</b>	<b>№2</b>	<b>№3</b>	<b>№4</b>
<b>Октановое число</b>	<b>68</b>	<b>72</b>	<b>80</b>	<b>90</b>
<b>Содержание серы, %</b>	<b>0,35</b>	<b>0,35</b>	<b>0,3</b>	<b>0,2</b>
<b>Ресурсы, Т</b>	<b>700</b>	<b>600</b>	<b>500</b>	<b>300</b>
<b>Себестоимость, ден. ед./Т</b>	<b>40</b>	<b>45</b>	<b>60</b>	<b>90</b>

---

**Требуется определить, сколько тонн каждого компонента следует использовать для получения 1000 т автомобильного бензина А-76, чтобы его себестоимость была минимальной.**

## Решение

Для решения этой задачи сформулируем ее экономико-математическую модель.

Введем необходимые обозначения:

пусть  $x_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) - количество в смеси компонента с номером  $j$ . С учетом этих обозначений имеем задачу (критерий оптимальности – «минимум себестоимости»):

$$\min f(\bar{X}) = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000, \quad (1)$$

$$68x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 90x_4 \geq 76 \cdot 1000, \quad (2)$$

$$0,35x_1 + 0,35x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 \leq 0,3 \cdot 1000, \quad (3)$$

$$x_1 \leq 700,$$

$$x_2 \leq 600,$$

$$x_3 \leq 500,$$

$$x_4 \leq 300,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$$



---

**Функциональное ограничение (1) отражает необходимость получения заданного количества смеси (1000 т), (2), (3) – ограничения по октановому числу и содержанию серы в смеси, остальные – ограничения на имеющиеся объемы соответствующих ресурсов.**

**Полученная *математическая задача-задача* *линейного программирования*. Она может быть решена симплекс-методом, который мы рассмотрим позже.**

**В результате решения получается оптимальное решение**

$$\bar{X}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*):$$

$$x_1^* = 571 \text{ Т}, \quad x_2^* = 0 \text{ Т}, \quad x_3^* = 143 \text{ Т}, \quad x_4^* = 286 \text{ Т},$$

**Подставляя найденное решение в целевую функцию, имеем**

$$f(\bar{X}^*) = 40 \cdot 571 + 45 \cdot 0 + 60 \cdot 143 + 90 \cdot 286 = 57160 \text{ (ден. ед.)}$$

**Таким образом, оптимальному решению  $\bar{X}^*$  будет отвечать минимальная себестоимость в 57160 ден. ед.**

---

# Решение систем алгебраических линейных уравнений Метод Крамера



**Определитель системы  $\Delta$ , составленный из коэффициентов при неизвестных, имеет вид**

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**Числа  $b_1, b_2, \dots, b_n$  – свободные члены.**

**Система (1) называется однородной, если**

$$b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0.$$

---

***Решением системы (1)*** называется совокупность чисел  $x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, \dots, x_n = \lambda_n$ , которые обращают все уравнения в тождества.

Система имеющая хотя бы одно решение, называется ***совместной***.

Система, не имеющая решений, называется ***несовместной***.

---

**Решить систему уравнений (1) можно различными методами, в частности, методом Крамера (Крамер – швейцарский математик, 1704 – 1752)**



## Теорема Крамера

Если определитель  $\Delta$  системы (1) отличен от нуля, то система ***совместна*** и имеет единственное решение, которое можно найти по формуле:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n}$$

**В этой формуле  $\Delta_j$  является определителем, полученным из определителя системы  $\Delta$  путем замены столбца  $j$  столбцом свободных членов.**

### **Замечание**

**Если определитель системы уравнений (1)  $\Delta = 0$ , то система (1) или несовместна или имеет бесконечно много решений.**

## Пример

Решить систему уравнений  $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$

### *Решение*

Определитель системы  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \Rightarrow$

**Система имеет единственное решение.**

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-3}{-2} = 1,5;$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{-2} = -0,5$$

**ОТВЕТ:  $x = 1,5; y = -0,5$**

# Однородная система трех линейных уравнений

Для простоты полагаем  $n = 3$

Однородная система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

---

Система (1) имеет *тривиальное* решение:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0,$$

но может случиться, что однородная система (1) имеет и не нулевое решение. Его называют *нетривиальным* решением однородной системы (1).

## Теорема

Линейная однородная система трех линейных уравнений с 3 неизвестными имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель  $\Delta = 0$ , т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

## *Доказательство*

Пусть система (1) имеет ненулевое решение  $(x_1, x_2, x_3)$

Пусть ее определитель  $\Delta \neq 0$ , тогда на основании формул Крамера система (1) имеет только нулевое решение

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}$$

$$(\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0, \quad \text{т.к.} \quad b_1 = b_2 = b_3 = 0)$$



**Это противоречит предположению. Следовательно,  $\Delta = 0$ . Тогда линейная система (1) либо несовместна, либо имеет бесконечно много решений. Но наша система совместна, так как имеется нулевое решение. Следовательно, система (1) допускает бесконечно много решений, в том числе и ненулевые.**

## Пример

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 3(-2) - 2(-2 - 3) - (2 + 1) = -6 + 10 - 3 = 1 \neq 0$$

**Система имеет тривиальное решение:  $x = y = z = 0$**

**Другой способ расчета:**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 11 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 11 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

**ОТВЕТ: (0, 0, 0)**

---

**ОБРАТНАЯ МАТРИЦА.  
РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ  
УРАВНЕНИЙ**

---

## Определение

Если определитель  $|A|$  матрицы  $A$  равен нулю, то матрица  $A$  называется *вырожденной*; в противном случае матрица  $A$  называется невырожденной.

---

**Рассмотрим теперь так называемую обратную матрицу, понятие которой вводится только для *квадратной матрицы*.**

### **Определение**

**Если  $A$  – квадратная матрица, то обратной для нее матрицей называется матрица, обозначенная  $A^{-1}$  и удовлетворяющая условиям**

$$AA^{-1} = E, \quad A^{-1}A = E, \quad \text{где } E \text{ – единичная матрица}$$

## Определение

Пусть дана матрица  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Составим матрицу  $\tilde{A}$  из алгебраических дополнений к элементам транспонированной матрицы  $A^T$ :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

**Матрица  $\tilde{A}$  называется матрицей, присоединенной к матрице  $A$ .**



## Теорема

Если матрица  $A$  не вырожденная, то она имеет обратную матрицу,  $A^{-1}$  которая находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \tilde{A}, \quad \text{или} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$$

где  $\tilde{A}$  - матрица, присоединенная к матрице  $A$ ,

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**На основании теоремы запишем алгоритм получения обратной матрицы:**

**1. Находим определитель матрицы  $A$ :**

**Если  $|A| = 0$ , то обратная матрица не существует.**

**Если  $|A| \neq 0$ , то переходим ко 2 шагу.**

2. Находим алгебраические дополнения всех элементов  $a_{ik}$  матрицы  $A$  и записываем *новую* матрицу составленную из  $A_{ik}$  (алгебраических дополнений).

3. *Транспонируем* полученную матрицу (меняем местами столбцы полученной матрицы со строками), получаем присоединенную матрицу  $\tilde{A}$ .

4. Умножим полученную матрицу  $\tilde{A}$  на  $\frac{1}{|A|}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$$

## Пример

Найти матрицу, обратную матрице  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

## *Решение*

1. Находим определитель матрицы  $A$ :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 4 = 10 \neq 0$$

**Следовательно, данная матрица  $A$  является невырожденной и имеет обратную матрицу.**

**2. Найдем алгебраические дополнения каждого элемента:**

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 3 = 3, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 4 = -4,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-1) = 1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2.$$

Получим матрицу  $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  алгебраических дополнений

3. Транспонируем эту матрицу, получаем присоединенную матрицу  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ .

4. Умножим полученную матрицу на  $\frac{1}{|A|}$ , т. е. на  $\frac{1}{10}$

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ -0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$$

**Проверим полученный результат:**

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ -0,4 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 & 0,2 - 0,2 \\ 1,2 - 1,2 & 0,4 + 0,6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

**ОТВЕТ:**  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ -0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$

---

# РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ



---

Пусть для простоты  $n = 3$ , имеем систему линейных уравнений (определенная система: 3 уравнения, 3 неизвестных):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

---

**Числа  $a_{ik}$  – коэффициенты системы, а числа  $b_i$  свободные члены,  $i = 1, 3, k = 1, 3$ .**

**Решением системы (1) называется совокупность чисел  $x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, x_3 = \lambda_3$ , которые обращают все уравнения системы в тождества.**

**Введем матрицу коэффициентов**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

**$X$  - вектор-столбец из неизвестных, а  $B$  – вектор-столбец свободных членов:**

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

**Согласно правилу умножения матриц данную систему (1) можно записать так:**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

**ИЛИ**

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = B$$

**Используя определение равенства матриц, данную систему (1) можно записать в виде матричного уравнение**

$$AX = B, \quad (1)$$

**Здесь в роли неизвестного выступает матрица  $X$ .**

**Уравнение (2) решается следующим образом. Если**

**$A$  – невырожденная матрица ( $|A| \neq 0$ ), то можно определить обратную матрицу  $A^{-1}$ .**

---

**Умножая обе части уравнения (2) слева на  $A^{-1}$**

$$A^{-1} AX = A^{-1} B$$

**используем сочетательный закон умножения:**

**$(A^{-1} A)X = A^{-1} B$ , но так как  $A^{-1} A = E$ , то**

**получаем решение матричного уравнения (2) в**

**виде  $X = A^{-1}B$ .**

---

**Итак, чтобы решить матричное уравнение, нужно**

- 1. Найти обратную матрицу  $A^{-1}$**
- 2. Найти произведение  $A^{-1} B = X$**
- 3. Пользуясь определением равных матриц, записать ответ.**

## Задача

Дана система уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$$

решить ее матричным способом.



## Решение

Запишем систему в матричной форме  $AX = B$ :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Решение системы  $X = A^{-1}B$

1. Найдем обратную матрицу  $A^{-1}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^3 (-1) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 5 - 10 = 5 \neq 0$$

**Выпишем все алгебраические дополнения элементов матрицы  $A$ :**

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{33} = 1.$$

Запишем новую матрицу  $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 4 & 12 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Транспонируем ее:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ – присоединенная матрица}$$

Учитывая, что  $\frac{1}{|A|} = \frac{1}{5}$ , запишем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 & -0,2 \\ 2 & 2,4 & -0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**2. Находим произведение  $X = A^{-1} B$**

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 & -0,2 \\ 2 & 2,4 & -0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 0,8 \cdot 0 + (-0,2) \cdot 15 \\ 2 \cdot 5 + 2,4 \cdot 0 + (-0,6) \cdot 15 \\ 0 \cdot 5 + \frac{1}{5} \cdot 0 + 0,2 \cdot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**3. Итак,**

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3.$$

**ОТВЕТ: (2, 1, 3)**

### Замечание

**Другой расчет:**

$$X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 25 - 15 \\ 50 - 45 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

---

# **СИСТЕМА $m$ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С $n$ ПЕРЕМЕННЫМИ**

---

**Рассмотрим систему  $m$  линейных с  $n$  переменными (при  $m < n$  такие системы называются неопределенными):**

**Число уравнений  $m$  не равно, вообще говоря, числу неизвестных  $n$ .**





**или в векторной записи:**

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = B,$$

**где**

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \square \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \square \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \square \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \square \\ b_m \end{pmatrix} -$$

**соответствующие вектор-столбцы.**

Запишем расширенную матрицу этой системы в

виде:  $A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n \quad B$

$$A_p = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

**Элементарными преобразованиями системы (1)**

**(или матрицы  $A_p$ ) называются следующие**

**преобразования:**

- 
- 1) перестановка любых двух уравнений (строк);
  - 2) умножение обеих частей одного из уравнений на *любое отличное от нуля* число;
  - 3) прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на любое число, *отличное от нуля*;

4) **вычеркивание нулевой строки (уравнения с нулевыми коэффициентами и свободным членом, равным 0):**

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$$

**Определение.**

**Системы уравнений вида (1) называются *эквивалентными* (или *равносильными*), если они имеют *одно и то же множество решений*.**

**Можно** **показать,** **что** *элементарные преобразования* переводят данную систему уравнений в *эквивалентную систему*.

**При** **практическом** **решении** **системы** **линейных** **уравнений** **методом** **Гаусса** **последовательно** **над** **строками** **матрицы**  $A_p$  **выполняют** **элементарные** **преобразования,** **так** **что** **некоторое** **неизвестное** **исключается** **из** **всех** **уравнений,** **кроме** **одного,** **т. е.** **в** **составе** **расширенной** **матрицы** **формируется** **единичная** **матрица.**

---

# ΜΕΤΟΔ ΓΑΥΣΣΑ





---

*Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных* – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

**Предположим, что в системе (1) коэффициент при переменной  $x_1$  в первом уравнении  $a_{11} \neq 0$  (если это не так, то перестановкой уравнений местами добьемся того, что  $a_{11} \neq 0$  ).**

**Шаг 1. Умножая первое уравнение на подходящие числа (а именно на  $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \dots, -\frac{a_{m1}}{a_{11}}$  )**

---

**и прибавляя последовательно полученные уравнения соответственно ко второму, третьему, ...,  $m$ -му уравнению системы (1), исключим переменную  $x_1$  из всех последующих уравнений, начиная со второго.**

**Получим**

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \dots\dots\dots \\ a_{i2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{in}^{(1)}x_n = b_i^{(1)}, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{array} \right. \quad (2)$$

**где буквами с верхним индексом (1) обозначены новые коэффициенты, полученные после первого шага.**

## Шаг 2.

Предположим, что  $a_{22}^{(1)} \neq 0$  (если не так, то соответствующей перестановкой уравнений или переменных с изменением их номеров добьемся того, чтобы  $a_{22}^{(1)} \neq 0$ ). Умножая второе уравнение последовательно на подходящие числа  $\left( -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \right.$   
 $\left. -\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \dots, -\frac{a_{m2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \right)$  и прибавляя полученные

---

**уравнения соответственно к третьему, четвертому, ...,  $m$ -му уравнению системы, исключим переменную  $x_2$  из всех последующих уравнений, начиная с третьего.**

**Продолжая процесс последовательного исключения переменных, после  $(r-1)$ -го шага получим систему**

$$\left\{ \begin{array}{l}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\
 a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2r}^{(1)}x_r + a_{2,r+1}^{(1)}x_{r+1} + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\
 \dots\dots\dots \\
 a_{rr}^{(r-1)}x_r + a_{r,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} + \dots + a_{rn}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)}, \\
 \phantom{a_{rr}^{(r-1)}x_r + a_{r,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} + \dots + a_{rn}^{(r-1)}x_n = } 0 = b_{r+1}^{(r-1)}, \\
 \phantom{a_{rr}^{(r-1)}x_r + a_{r,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} + \dots + a_{rn}^{(r-1)}x_n = } \dots\dots\dots \\
 \phantom{a_{rr}^{(r-1)}x_r + a_{r,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} + \dots + a_{rn}^{(r-1)}x_n = } 0 = b_m^{(r-1)}
 \end{array} \right. \quad (3)$$

Число нуль в последних  $m-r$  уравнениях означает, что их левые части имеют вид:  $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n$

*Если хотя бы одно из чисел  $b_{r+1}^{(r-1)}$ ,  $\dots$ ,  $b_m^{(r-1)}$  не равно нулю, то соответствующее равенство противоречиво, и система (1) несовместна.*

Таким образом, для любой *совместной* системы числа  $b_{r+1}^{(r-1)}$ ,  $\dots$ ,  $b_m^{(r-1)}$  в системе (3) равны нулю. В этом случае  $m-r$  уравнений в системе (3) являются



---

**тождествами и их можно не принимать во внимание при решении системы (1).**

**Очевидно, что после отбрасывания «лишних» уравнений возможны два случая:**

**а) число уравнений системы (3) равно числу переменных т. е.  $r = n$  (в этом случае система (3) имеет треугольный вид);**

б)

б)  $r < n$  (в этом случае система (3) имеет ступенчатый вид).

Переход системы (1) к *равносильной* ей системе (3) называется *прямым ходом* метода Гаусса, а нахождение переменных из системы (3) – *обратным ходом*.

**Преобразование Гаусса удобно проводить, осуществляя преобразования не с самими уравнениями, а с расширенной матрицей системы (1)**

$$A_p = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

## Задача

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8, \end{cases}$$

## Решение

Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array} \right)$$

**Шаг 1** Так как  $a_{11} \neq 0$ . То умножая первую строку последовательно на числа  $(-2)$ ,  $(-3)$ ,  $(-2)$  и прибавляя полученные строки соответственно ко

**второй, третьей, четвертой строкам, *исключим* переменную  $x_1$  из всех строк, начиная со второй.**

**Заметив, что в новой матрице  $a_{22}^{(1)} = 0$ , поменяем местами вторую и третью строки:**

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array} \right)$$

**Шаг 2** Так как теперь  $a_{22}^{(1)} = -4 \neq 0$ , то умножая вторую строку на  $\left(-\frac{7}{4}\right)$  и прибавляя полученную строку к четвертой, исключим переменную  $x_2$  из всех строк, начиная с третьей:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13,5 & -9 & 4,5 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{117}{16} & \frac{117}{8} \end{array} \right)$$

**Шаг 3** Учитывая, что  $a_{33}^{(2)} = -8$ , умножая третью строку на  $\frac{13,5}{8} = \frac{117}{16}$  прибавляя полученную строку к четвертой исключим из нее переменную  $x_3$ .

Получим (см. последнюю матрицу) систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -4x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -14, \\ -8x_3 + x_4 = 6 \\ -\frac{117}{16}x_4 = \frac{117}{8}, \end{cases}$$



Откуда, используя обратный ход метода Гаусса, найдем из четвертого уравнения  $x_4 = -2$ ;

из третьего  $x_3 = \frac{6 - x_4}{-8} = \frac{6 + 2}{-8} = -1$ ;

из второго  $x_2 = \frac{-14 - 8x_4 + 10x_3}{-4} = 2$  и

из первого уравнения  $x_1 = 6 + 2x_4 - 3x_3 - 2x_2 = 1$ ,

т. е.  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = -2$

**ОТВЕТ:** (1; 2; -1; -2)