Основы математической логики

Булевы функции от одного, двух аргументов и от n аргументов

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ. КАНОНИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН ЖЕГАЛКИНА

Булевы функции от одного аргумента

- Булевой функцией от одного аргумента называется функция *f*, заданная на множестве из двух элементов и принимающая значения в том же двухэлементном множестве.
- $f:\{0,1\} \to \{0,1\}$

Булевы функции от одного аргумента

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

- $f_0(x) = 0$ *(функция, тождественно равная 0)*
- $f_1(x) = x$ *(тождественная функция)*
- $f_2(x) = x'$ *(функция отрицания)*
- $f_3(x) = 1$ *(функция, тождественно равная 1)*

Булевы функции от двух аргументов

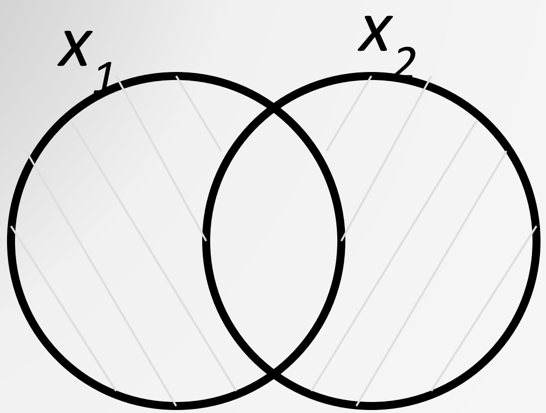
- Булевой функцией от двух аргументов называется функция g, заданная на множестве {0,1} ×{0,1} и принимающая значение в двухэлементном множестве {0,1}

		0	$\cdot$	$\to'$	x	$\leftarrow'$	y	$+$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	y'	$\leftarrow$	x'	$\to$	$\mid$	1
x	y	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Сумма по модулю два

- Сумма по модулю два (строгая дизъюнкция) двух переменных x_1 и x_2 называется булева функция $x_1 \oplus x_2$ которая равна 1 тогда и только тогда, когда равна 1 только одна переменная.

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)=x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Сумма по модулю два

Законы, применимые для суммы по модулю два:

- Переместительный $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$
- Сочетательный $(x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3)$
- Распределительный конъюнкции

$x_1 (x_2 \oplus x_3) = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3$

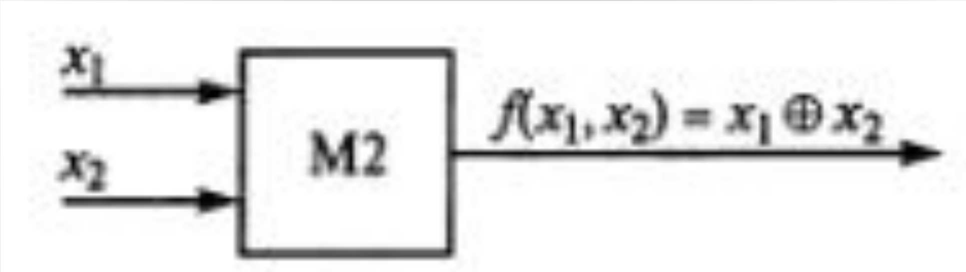
- Операции с константами:
- $x \oplus x = 0$
- $x \oplus 0 = x$
- $x \oplus \bar{x} = 1$
- $x \oplus 1 = \bar{x}$

Разложение в СДНФ:

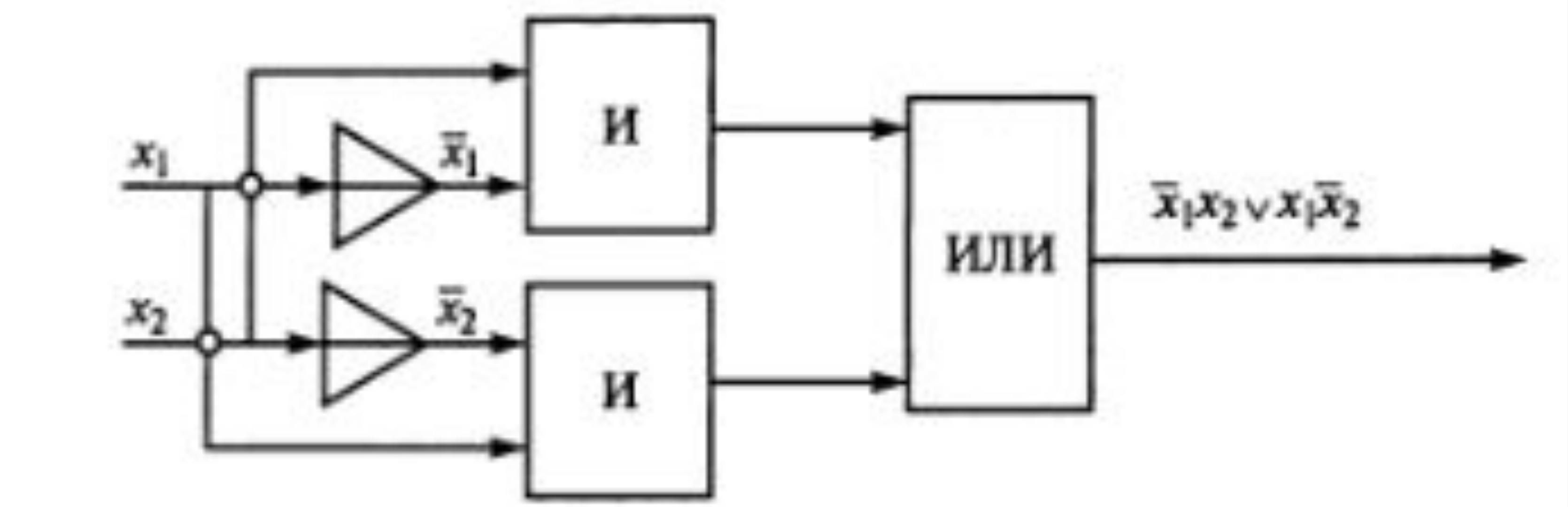
- $x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$
- $\overline{x_1 \oplus x_2} = \bar{x}_1 \oplus x_2 = x_1 \oplus \bar{x}_2$

- Связь между дизъюнкцией с суммой по модулю два:
- $x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2$
- Конъюнкция:
- $x_1 x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus (x_1 \vee x_2)$

Логический элемент М2 – сумма по модулю два



- На практике в электронике реализовать сложно. Элемент М2 реализуют из простых устойчивых элементов: И, ИЛИ, НЕ.



Применение

- Для проверки результатов сложения в двоичном сумматоре для системы контроля и исправления ошибок:
- 0 + 0 = 0
- 0 + 1 = 1
- 1 + 0 = 1
- 1 + 1 = (1)0

Почему «сумма по модулю два»?

- Остаток от деления целых чисел M на N: **M mod N**
- Рассмотрим множество $Z_2 = \{0,1\}$ и произведем операцию: $(a + b) \bmod 2$
- $(0 + 0) \bmod 2 = 0$
- $(0 + 1) \bmod 2 = 1$
- $(1 + 0) \bmod 2 = 1$
- $(1 + 1) \bmod 2 = 0$

Канонический полином Жегалкина

$$f(x_1x_2\ldots x_n) = f_0 \oplus f_1x_1 \oplus f_2x_2 \oplus \ldots \oplus f_nx_n \oplus f_{12}x_1x_2 \oplus \ldots \oplus f_{12\ldots n}x_1x_2\ldots x_n,$$

- $f_1\ldots f_n \in B = \{0,1\}$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Пример:

$F(x_1x_2x_3) =$

$=\overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_3 =$

$=(1\oplus x_1)x_2(1\oplus x_3) \oplus x_1(1 \oplus x_2)(1 \oplus x_3) \oplus x_1(1 \oplus x_2)x_3 \oplus x_1x_2x_3 =$

$=(x_2\oplus x1x_2)(1\oplus x_3) \oplus (x_1\oplus x_1x_2)(1\oplus x_3) \oplus (x_1 \oplus x_1x_2)x_3 \oplus x_1x_2x_3 =$

$=x_2\oplus x_1x_2\oplus x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3\oplus x_1\oplus x_1x_2\oplus x_1x_3\oplus x_1x_2x_3\oplus x_1x_3\oplus x_1x_2x_3\oplus x_1x_2x_3=$

$= x_2\oplus x_2x_3 \oplus x_1\oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3$

Любую логическую функцию можно единственным образом представить в виде полинома Жегалкина

2-й способ:

- Многочлен с неопределенным
  - коэффициентом

$xy = a \oplus bx \oplus cy \oplus dxy$

При x=0, y=0, то 0 =a

При x=0, y=1, то $0=0 \oplus c, \Rightarrow c=0$

При x=1, y=0, то $1 = b \oplus 0, \Rightarrow b=1$

При x=1, y=1, то $0 = 1 \oplus d, \Rightarrow d=1$

$xy = x \oplus xy$

Функционально замкнутые классы

- Класс функций называется функционально замкнутым, если любая комбинация функций этого класса принадлежит этому же классу.

Класс функций, сохраняющих 0 (K_0)

ВАЖНЕЙШИЕ ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ. ТЕОРЕМА ПОСТА

ПРИЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ К АНАЛИЗУ И СИНТЕЗУ РЕЛЕЙНО КОНТАКТНЫХ СХЕМ

Логика предикатов

Основные понятия, связанные с предикатами

ПРЕДИКАТЫ И ВЫСКАЗЫВАТЕЛЬНЫЕ ФОРМЫ. РАВНОСИЛЬНОСТЬ И СЛЕДОВАНИЕ ПРЕДИКАТОВ

- **n- местным предикатом называется предложение, содержащее n предметных переменных x_1, x_2, … ,x_n. Переменные выбираются из множества значений M_1, M_2, … M_n. При этом предикат превращается в высказывание.**
- **$P(x_1, x_2, …, x_n)$ – функция высказывания**

Примеры: Река x впадает в озеро Байкал. – **одноместный предикат**, определенный на множестве всех рек.

Пусть x = Баргузин, тогда: «Река Баргузин впадает в озеро Байкал» - **высказывание истинное**

Пусть x = Днепр, тогда: «Река Днепр впадает в озеро Байкал» - **высказывание ложное**

Пример

$x^2 + y^2 \leq 9$

- Сколько переменных? 2
- На каком множестве заданы? R, R
- При какой паре чисел принимает истинное значение? 2, 2
- При какой паре чисел принимает ложное значение? 2, 3

Классификация предикатов

Предикат называется тождественно истинным, если при любой подстановке в предложение из множества значений он становится истинным высказыванием.

$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$

Пример: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Предикат называется тождественно ложным, если при любой подстановке в предложение из множества значений он становится ложным высказыванием.

$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$

Пример: $x^2 + y^2 < 0$

- **Предикат называется выполнимым (опровержимым), если существует хотя бы один набор конкретных предметов, при подстановке которых он становится истинным (ложным) высказыванием.**

- **Примеры**: «Город x расположен на берегу реки Волги»
- «Рыба x живет в высокогорьях»
- «Рыба x живет в пресном водоеме»
- «Современный компьютер x обладает операционной системой»
- «Компьютерная сеть x соединяет y компьютеров»

Множество истинности предикатов

Множество истинности предиката – это множество тех значений, при которых предикат превращается в истинное высказывание.

$\mathbf{P^+ = \{(a_1, \ldots, a_n)\} : \lambda(P(a_1, \ldots, a_n) = 1\}}$

Пример: $x^2 + y^2 = 9$

- Сколько местный это предикат?
- На каком множестве он простроен?
- Множество пар действительных чисел, которые являются координатами точек плоскости, образующими окружность радиусом 9

Равносильность и следование предикатов

Два n-местных предиката заданных над одним и тем же множеством называются равносильными, если при подстановке одного и того же набора значений превращают оба предиката в истинные высказывания.

- **Переход от предиката P_1 к равносильному ему предикату P_2 называется равносильным преобразованием**
- $4x – 2 = -3x – 9$
- $4x + 3x = 2 – 9$
- $X = -1$
- Ответ: $\{-1\}$ – множество истинности для данного уравнения

Следствия предикатов

- Предикат Q называется следствием предиката P, если он превращается в истинное высказывание на множестве значений, включенных в множество истинных значений предиката P.
- $P^+ \subseteq Q^+$

Пример:

Q $(x_1, \ldots, x_n)$ – предикат «множество компьютеров аудитории 22б »

P $(x_1, \ldots, x_n)$ – предикат «компьютеры колледжа 50»

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ПРЕДИКАТАМИ

Отрицание предиката

- Отрицанием n-местного предиката P, определенного на множествах M, называется новый n-местный предикат, определенный на тех же множествах .
- Обозначение $\neg P(x_1, \ldots x_n)$
- Читается «Неверно, что $P(x_1, \ldots x_n)$»

Пример: $P(x \in R) = x \leq 3$

$\neg P(x \in R) = \neg (x \leq 3) = x > 3$

Конъюнкция двух предикатов

- Конъюнкцией n-местного предиката P, определенного на множествах M и k-местного предиката Q, определенного на множествах L , называется новый (n+k)-местный предикат, определенный на этих множествах .
- Обозначение $P(x_1, \dots x_n) \wedge Q(y_1, \dots y_n)$
- Чтение: «$P(x_1, \dots x_n)$ и $Q(y_1, \dots y_n)$»

Пример: $P(x \in R) = x > -3$

$Q(x \in R) = x < 3$

$P \wedge Q = x > -3 \wedge x < 3 = -3 < x < 3$

Дизъюнкция двух предикатов

- Дизъюнкцией n-местного предиката P, определенного на множествах M и k-местного предиката Q, определенного на множествах L , называется новый (n+k)-местный предикат, определенный на этих множествах .
- Обозначение $P(x_1, \dots x_n) \vee Q(y_1, \dots y_n)$
- Чтение: «$P(x_1, \dots x_n)$ или $Q(y_1, \dots y_n)$»

Пример: $P(x \in R) = x > -3$

$Q(x \in R) = x < 3$

$P \vee Q = x > -3 \vee x < 3 = -3 < x < \infty$

Примеры

- «Х – четное число»
- «У – простое число»
- Определены на N < 21.

Указать множества истинности для:

¬Х

¬У

Х ∧ У

Х ∨ У

¬(Х ∨ У)

¬(Х ∧ У)

¬Х ∧ У

Х ∧ ¬У

Х ∨ ¬У

¬Х ∨ У

¬ Х ∨ ¬У

¬Х ∨ У

Кванторные операции над предикатами

КВАНТОРЫ. ОТРИЦАНИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЙ С КВАНТОРАМИ

Квантор общности

- Операция над одноместным предикатом, означающая:
- $\forall$ x(P(x)) – для всех x имеет место P(x)

$$\lambda[(\forall x)(P(x))] = \begin{cases} 1, \text{ если } P(x) \text{ — тождественно истинный} \\ \qquad \text{предикат,} \\ 0 \text{ — в противном случае;} \end{cases}$$

Квантор существования

- Операция над одноместным предикатом, означающая:
- ∃ x(P(x)) – для всех x имеет место P(x)

$$\lambda[(\exists x)(P(x))] = \begin{cases} 0, \text{ если } P(x) \text{ — тождественно ложный предикат,} \\ 1 \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

- Квантор можно применять и к n-местному предикату, в результате получится n-1) – местный предикат. Переменную, к которой относится квантор, называют связанной, остальные переменные – свободные.

Какие переменные связанные и какие свободные?

1. $\forall x(\exists y(A(x) \supset \& B(y, z)).$
2. $\forall x(\exists y(\neg A(x) \& B(y)) \supset C(y, z))$

1. A(x) = "x – наука"; B(x) = "x гуманитарная". Записать словами: $\subset$

$C = \neg\forall x(A(x) \supset B(x)); D = \exists x((A(x) \& B(x)))$.

2. A(x) = "x – рыба"; B(x) = "x дышит жабрами". Записать словами:

$C = \forall x(A(x) \supset B(x)); D = \neg \exists x(A(x) \& \neg B(x))$.

- Он ничего не знает.
- Некоторые абитуриенты поступили в институт.
- Студент ответил на некоторые вопросы.
- Автобус останавливается на всех остановках.

- 1. определить, какие переменные свободные, а какие связанные.
- 2. Даны предикаты: А(*x) и B(x). Записать словами предложенные формулы С и D.*

ЧИСЛЕННЫЕ КВАНТОРЫ

Применение логики предикатов к логико-математической практике

ЗАПИСЬ НА ЯЗЫКЕ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ РАЗЛИЧНЫХ ПРЕДЛОЖЕНИЙ. СТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРЕМ

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРЕДИКАТОВ

- X - люди F(x) = «блондины»; G(x) = «ездят на машинах»

$\forall x(F(x)\&G(x)) = \forall x(F(x)\& \forall x(G(x)$

- «Для всех людей верно, что они блондины и ездят на машинах»
- «Все люди блондины и все люди ездят на машинах»

$\forall x(F(x) \cup G(x) = \forall x(F(x) \cup \forall x (G(x)$

- «Для всех людей верно, что они блондины или ездят на машинах»
- «Все люди блондины или все люди ездят на машинах»

$\neg \forall x(F(x)\&G(x))$

- «Неверно для всех людей, что они блондины и ездят на машинах»

$\neg(\forall x(F(x)\& \forall xG(x)) = \neg \forall x(F(x) \cup \neg \forall xG(x)$

- «Неверно, что все люди блондины и все люди ездят на машинах»
- «Неверно, что все люди блондины или неверно, что все люди ездят на машинах»

$\exists x(F(x) \cup G(x)) = \exists x(F(x)) \cup \exists x(G(x))$

- «Есть люди, которые являются блондинами или ездят на машинах»
- «Есть люди – блондины или есть люди, ездящие на машинах»

$\exists x(F(x) \& G(x) = \exists x(F(x) \& \exists x(G(x))$

- «Есть люди, которые являются блондинами и ездят на машинах»
- «Есть люди – блондины и есть люди, ездящие на машинах»

$\neg \exists x(F(x) \cup G(x)) = \neg(\exists x(F(x)) \cup \exists x(G(x)) =$

$= \neg \exists x(F(x)) \& \neg \exists x(G(x))$

- «Неверно, что есть люди, которые являются блондинами или ездят на машинах»
- «Неверно, что есть люди – блондины или есть люди, ездящие на машинах»
- «Неверно, что есть люди – блондины и есть люди, ездящие на машинах»

Перенос квантора через отрицание

$\neg\forall\ x(F(x)) \quad = \quad \exists\ x\neg(F(x))$

- «Неверно, что все люди – блондины»
- «Есть люди –не блондины»

$\neg(\exists\ x(F(x)) \quad = \quad \forall x\neg(F(x))$

- «Неверно, что некоторые люди – блондины»
- «Для всех людей неверно, что они – блондины»

Вынос квантора за скобки

$\exists$ x(F(x)&G) = $\exists$ x(F(x)) & G

- «Для некоторых людей верно, что они блондины и машины красного цвета»
- «Некоторые люди – блондины и машины красного цвета»

$\exists$ x(F(x) $\cup$ G) = $\exists$ x(F(x)) $\cup$ G

- «Для некоторых людей верно, что они блондины или машины красного цвета»
- «Некоторые люди – блондины или машины красного цвета»

$\forall$ x(F(x)&G) = $\forall$ x(F(x)) & G

- «Для всех людей верно, что они блондины и машины красного цвета»
- «Все люди – блондины и машины красного цвета»

$\forall$ x(F(x) $\cup$G) = $\forall$ x(F(x)) $\cup$ G

- «Для всехлюдей верно, что они блондины или машины красного цвета»
- «Все люди – блондины или машины красного цвета»

ПРИНЦИП МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ В ПРЕДИКАТНОЙ ФОРМЕ

Элементы теории алгоритмов

Вычислимые функции и алгоритмы

ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ

СВОЙСТВА АЛГОРИТМОВ

ПРОСТЕЙШИЕ ФУНКЦИИ

РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

Нормальный алгоритм Маркова. Машина Тьюринга

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. АЛГОРИТМ МАРКОВА

АЛГОРИТМ ТЬЮРИНГА