

# ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

# Булевы функции от одного, двух аргументов и от $n$ аргументов

**БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ.  
КАНОНИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН  
ЖЕГАЛКИНА**

# Булевы функции от одного аргумента

- Булевой функцией от одного аргумента называется функция  $f$ , заданная на множестве из двух элементов и принимающая значения в том же двухэлементном множестве.
- $f : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$

# Булевы функции от одного аргумента

$x$	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

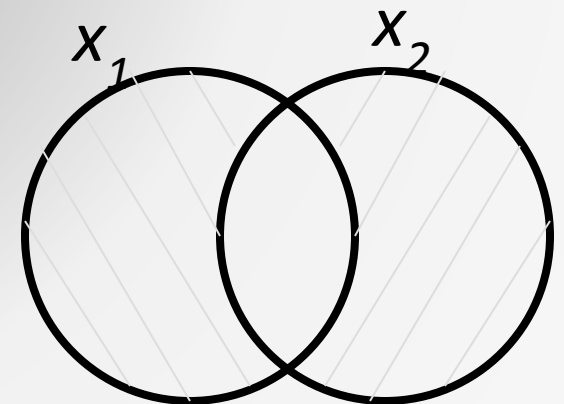
- $f_0(x) = 0$  (функция, тождественно равная 0)
- $f_1(x) = x$  (тождественная функция)
- $f_2(x) = x'$  (функция отрицания)
- $f_3(x) = 1$  (функция, тождественно равная 1)



# Сумма по модулю два

- Сумма по модулю два (строгая дизъюнкция) двух переменных  $x_1$  и  $x_2$  называется булева функция  $x_1 \oplus x_2$  которая равна 1 тогда и только тогда, когда равна 1 только одна переменная.

$x_1$	$x_2$	$f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



# Сумма по модулю два

Законы, применимые для суммы по модулю два:

- Переместительный  $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$
- Сочетательный  $(x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3)$
- Распределительный конъюнкции

$$x_1 (x_2 \oplus x_3) = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3$$



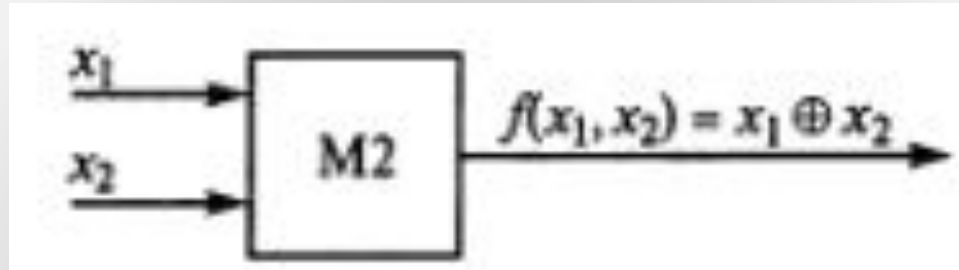
- Операции с константами:
- $x \oplus x = 0$
- $x \oplus 0 = x$
- $x \oplus \bar{x} = 1$
- $x \oplus 1 = \bar{x}$

Разложение в СДНФ:

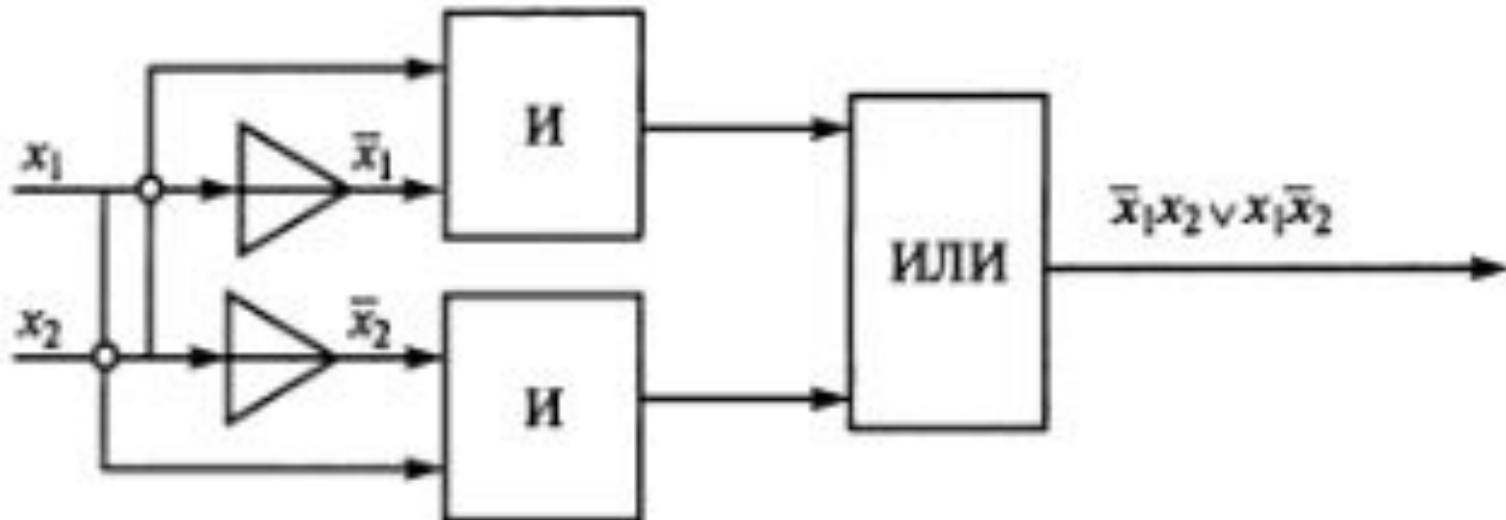
- $x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$
- $\overline{x_1 \oplus x_2} = \bar{x}_1 \oplus x_2 = x_1 \oplus \bar{x}_2$

- Связь между дизъюнкцией с суммой по модулю два:
- $x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2$
- Конъюнкция:
- $x_1 x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus (x_1 \vee x_2)$

# Логический элемент М2 – сумма по модулю два



- На практике в электронике реализовать сложно. Элемент М2 реализуют из простых устойчивых элементов: И, ИЛИ, НЕ.



# Применение

- Для проверки результатов сложения в двоичном сумматоре для системы контроля и исправления ошибок:
  - $0 + 0 = 0$
  - $0 + 1 = 1$
  - $1 + 0 = 1$
  - $1 + 1 = (1)0$

# Почему «сумма по модулю два»?

- Остаток от деления целых чисел  $M$  на  $N$ :  $M \bmod N$
- Рассмотрим множество  $Z_2 = \{0,1\}$  и произведем операцию:  $(a + b) \bmod 2$
- $(0 + 0) \bmod 2 = 0$
- $(0 + 1) \bmod 2 = 1$
- $(1 + 0) \bmod 2 = 1$
- $(1 + 1) \bmod 2 = 0$

# Канонический полином Жегалкина

$$f(x_1 x_2 \dots x_n) = f_0 \oplus f_1 x_1 \oplus f_2 x_2 \oplus \dots \oplus f_n x_n \oplus f_{12} x_1 x_2 \oplus \dots \oplus f_{12\dots n} x_1 x_2 \dots x_n$$

- $f_1 \dots f_n \in B = \{0, 1\}$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Пример:

$$F(x_1, x_2, x_3) =$$

$$= \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 =$$

$$= (1 \oplus x_1) x_2 (1 \oplus x_3) \oplus x_1 (1 \oplus x_2) (1 \oplus x_3) \oplus x_1 (1 \oplus x_2) x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 =$$

$$= (x_2 \oplus x_1 x_2) (1 \oplus x_3) \oplus (x_1 \oplus x_1 x_2) (1 \oplus x_3) \oplus (x_1 \oplus x_1 x_2) x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 =$$

$$= x_2 \oplus x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 =$$

$$= x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3$$

Любую логическую функцию можно единственным образом представить в виде полинома Жегалкина

2-й способ:

- Многочлен с неопределенным –коэффициентом

$$xy = a \oplus bx \oplus cy \oplus dxy$$

При  $x=0, y=0$ , то  $0 = a$

При  $x=0, y=1$ , то  $0 = 0 \oplus c, \Rightarrow c=0$

При  $x=1, y=0$ , то  $1 = b \oplus 0, \Rightarrow b=1$

При  $x=1, y=1$ , то  $0 = 1 \oplus d, \Rightarrow d=1$

$$xy = x \oplus xy$$



# Функционально замкнутые классы

- Класс функций называется функционально замкнутым, если любая комбинация функций этого класса принадлежит этому же классу.

# Класс функций, сохраняющих 0 ( $K_0$ )

# **ВАЖНЕЙШИЕ ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ. ТЕОРЕМА ПОСТА**



**ПРИЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ  
ЛОГИКИ К АНАЛИЗУ И СИНТЕЗУ  
РЕЛЕЙНО КОНТАКТНЫХ СХЕМ**



# Логика предикатов

# Основные понятия, связанные с предикатами



**ПРЕДИКАТЫ И  
ВЫСКАЗЫВАТЕЛЬНЫЕ ФОРМЫ.  
РАВНОСИЛЬНОСТЬ И СЛЕДОВАНИЕ  
ПРЕДИКАТОВ**

- **$n$ - местным предикатом называется предложение, содержащее  $n$  предметных переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Переменные выбираются из множества значений  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . При этом предикат превращается в высказывание.**
- **$P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – функция высказывания**

**Примеры:** Река  $x$  впадает в озеро Байкал. – **одноместный предикат**, определенный на множестве всех рек.

Пусть  $x = \text{Баргузин}$ , тогда: «Река Баргузин впадает в озеро Байкал» - **высказывание истинное**

Пусть  $x = \text{Днепр}$ , тогда: «Река Днепр впадает в озеро Байкал» - **высказывание ложное**

# Пример

$$x^2 + y^2 \leq 9$$

- Сколько переменных?
- На каком множестве заданы?
- При какой паре чисел принимает истинное значение?
- При какой паре чисел принимает ложное значение?

# Классификация предикатов

**Предикат называется тождественно истинным, если при любой подстановке в предложение из множества значений он становится истинным высказыванием.**

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$$

**Пример:**  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

**Предикат называется тождественно ложным, если при любой подстановке в предложение из множества значений он становится ложным высказыванием.**

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

**Пример:**  $x^2 + y^2 < 0$

- **Предикат называется выполнимым (опровержимым), если существует хотя бы один набор конкретных предметов, при подстановке которых он становится истинным (ложным) высказыванием.**

- **Примеры:** «Город x расположен на берегу реки Волги»
- «Рыба x живет в высокогорьях»
- «Рыба x живет в пресном водоеме»
- «Современный компьютер x обладает операционной системой»
- «Компьютерная сеть x соединяет у компьютеров»

# Множество истинности предикатов

**Множество истинности предиката – это множество тех значений, при которых предикат превращается в истинное высказывание.**

$$P^+ = \{(a_1, \dots, a_n)\} : \lambda(P(a_1, \dots, a_n)) = 1\}$$

**Пример:**  $x^2 + y^2 = 9$

- Сколько местный это предикат?
- На каком множестве он простроен?
- Множество пар действительных чисел, которые являются координатами точек плоскости, образующими окружность радиусом 9



# **Равносильность и следование предикатов**

**Два  $n$ -местных предиката заданных над одним и тем же множеством называются равносильными, если при подстановке одного и того же набора значений превращают оба предиката в истинные высказывания.**

- **Переход от предиката  $P_1$  к равносильному ему предикату  $P_2$  называется равносильным преобразованием**
- $4x - 2 = -3x - 9$
- $4x + 3x = 2 - 9$
- $x = -1$
- **Ответ:  $\{-1\}$  – множество истинности для данного уравнения**

# Следствия предикатов

- Предикат  $Q$  называется следствием предиката  $P$ , если он превращается в истинное высказывание на множестве значений, включенных в множество истинных значений предиката  $P$ .
- $P^+ \subseteq Q^+$

## Пример:

$Q(x_1, \dots, x_n)$  – предикат «множество компьютеров аудитории 22б»

$P(x_1, \dots, x_n)$  – предикат «компьютеры колледжа 50»

# ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ПРЕДИКАТАМИ

# Отрицание предиката

- Отрицанием  $n$ -местного предиката  $P$ , определенного на множествах  $M$ , называется новый  $n$ -местный предикат, определенный на тех же множествах .
- Обозначение  $\neg P(x_1, \dots, x_n)$
- Читается «Неверно, что  $P(x_1, \dots, x_n)$ »

Пример:  $P(x \in \mathbb{R}) = x \leq 3$

$$\neg P(x \in \mathbb{R}) = \neg (x \leq 3) = x > 3$$

# Конъюнкция двух предикатов

- Конъюнкцией  $n$ -местного предиката  $P$ , определенного на множествах  $M$  и  $k$ -местного предиката  $Q$ , определенного на множествах  $L$ , называется новый  $(n+k)$ -местный предикат, определенный на этих множествах.
- Обозначение  $P(x_1, \dots, x_n) \wedge Q(y_1, \dots, y_n)$
- Чтение: « $P(x_1, \dots, x_n)$  и  $Q(y_1, \dots, y_n)$ »

Пример:  $P(x \in \mathbb{R}) = x > -3$

$$Q(x \in \mathbb{R}) = x < 3$$

$$P \wedge Q = x > -3 \wedge x < 3 = -3 < x < 3$$

# Дизъюнкция двух предикатов

- Дизъюнкцией  $n$ -местного предиката  $P$ , определенного на множествах  $M$  и  $k$ -местного предиката  $Q$ , определенного на множествах  $L$ , называется новый  $(n+k)$ -местный предикат, определенный на этих множествах.
- Обозначение  $P(x_1, \dots, x_n) \vee Q(y_1, \dots, y_n)$
- Чтение: « $P(x_1, \dots, x_n)$  или  $Q(y_1, \dots, y_n)$ »

Пример:  $P(x \in \mathbb{R}) = x > -3$

$$Q(x \in \mathbb{R}) = x < 3$$

$$P \vee Q = x > -3 \vee x < 3 = -3 < x < \infty$$



# Примеры

- « $X$  – четное число»
- « $Y$  – простое число»
- Определены на  $N < 21$ .

Указать множества истинности для:

$\neg X$

$\neg X \wedge Y$

$\neg Y$

$X \wedge \neg Y$

$X \wedge Y$

$X \vee \neg Y$

$X \vee Y$

$\neg X \vee Y$

$\neg(X \vee Y)$

$\neg X \vee \neg Y$

$\neg(X \wedge Y)$

$\neg X \vee Y$



# Кванторные операции над предикатами

# **КВАНТОРЫ. ОТРИЦАНИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЙ С КВАНТОРАМИ**

# Квантор общности

- Операция над одноместным предикатом, означающая:
- $\forall x(P(x))$  – для всех  $x$  имеет место  $P(x)$

$$\lambda[(\forall x)(P(x))] = \begin{cases} 1, & \text{если } P(x) \text{ — тождественно истинный} \\ & \text{предикат,} \\ 0 & \text{— в противном случае;} \end{cases}$$

# Квантор существования

- Операция над одноместным предикатом, означающая:
- $\exists x(P(x))$  – для всех  $x$  имеет место  $P(x)$

$$\lambda[(\exists x)(P(x))] = \begin{cases} 0, & \text{если } P(x) \text{ — тождественно ложный} \\ & \text{предикат,} \\ 1 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

- Квантор можно применять и к  $n$ -местному предикату, в результате получится  $(n-1)$  – местный предикат. Переменную, к которой относится квантор, называют связанной, остальные переменные – свободные.

# Какие переменные связанные и какие свободные?

1.  $\forall x(\exists y(A(x) \supset \&B(y, z))).$
2.  $\forall x(\exists y(\neg A(x) \&B(y)) \supset C(y, z))$



1.  $A(x) = "x - \text{наука}"; B(x) = "x \text{ гуманитарная}."$

Записать словами:  $C$

$$C = \neg \forall x(A(x) \supset B(x)); D = \exists x((A(x) \& B(x))).$$

2.  $A(x) = "x - \text{рыба}"; B(x) = "x \text{ дышит жабрами}."$

Записать словами:

$$C = \forall x(A(x) \supset B(x)); D = \neg \exists x(A(x) \& \neg B(x)).$$

- Он ничего не знает.
- Некоторые абитуриенты поступили в институт.
- Студент ответил на некоторые вопросы.
- Автобус останавливается на всех остановках.

- 1. определить, какие переменные свободные, а какие связанные.
- 2. Даны предикаты:  $A(x)$  и  $B(x)$ . Записать словами предложенные формулы  $C$  и  $D$ .

# ЧИСЛЕННЫЕ КВАНТОРЫ



# Применение логики предикатов к логико- математической практике

**ЗАПИСЬ НА ЯЗЫКЕ ЛОГИКИ  
ПРЕДИКАТОВ РАЗЛИЧНЫХ  
ПРЕДЛОЖЕНИЙ. СТРОЕНИЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРЕМ**

# **ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРЕДИКАТОВ**



- $X$  - люди  $F(x)$  = «блондины»;  $G(x)$  = «ездыт на машинах»

$$\forall x(F(x) \& G(x)) = \forall x(F(x)) \& \forall x(G(x))$$

- «Для всех людей верно, что они блондины и ездят на машинах»

- «Все люди блондины и все люди ездят на машинах»

$$\forall x(F(x) \cup G(x)) = \forall x(F(x)) \cup \forall x(G(x))$$

- «Для всех людей верно, что они блондины или ездят на машинах»

- «Все люди блондины или все люди ездят на машинах»

$$\neg \forall x(F(x) \& G(x))$$

- «Неверно для всех людей, что они блондины и ездят на машинах»

$$\neg(\forall x(F(x) \& \forall xG(x))) = \neg \forall x(F(x)) \cup \neg \forall xG(x)$$

- «Неверно, что все люди блондины и все люди ездят на машинах»

- «Неверно, что все люди блондины или неверно, что все люди ездят на машинах»

$$\exists x(F(x) \cup G(x)) = \exists x(F(x)) \cup \exists x(G(x))$$

- «Есть люди, которые являются блондинами или ездят на машинах»
- «Есть люди – блондины или есть люди, едущие на машинах»

$$\exists x(F(x) \& G(x)) = \exists x(F(x) \& \exists x(G(x)))$$

- «Есть люди, которые являются блондинами и ездят на машинах»
- «Есть люди – блондины и есть люди, едущие на машинах»

$$\neg \exists x(F(x) \cup G(x)) = \neg(\exists x(F(x)) \cup \exists x(G(x))) = \\ = \neg \exists x(F(x)) \& \neg \exists x(G(x))$$

- «Неверно, что есть люди, которые являются блондинами или ездят на машинах»
- «Неверно, что есть люди – блондины или есть люди, едущие на машинах»
- «Неверно, что есть люди – блондины и есть люди, едущие на машинах»

# Перенос квантора через отрицание

$$\neg \forall x(F(x)) = \exists x \neg (F(x))$$

- «Неверно, что все люди – блондины»
- «Есть люди –не блондины»

$$\neg(\exists x(F(x))) = \forall x \neg (F(x))$$

- «Неверно, что некоторые люди – блондины»
- «Для всех людей неверно, что они – блондины»

# Вынос квантора за скобки

$$\exists x(F(x) \& G) = \exists x(F(x)) \& G$$

- «Для некоторых людей верно, что они блондины и машины красного цвета»
- «Некоторые люди – блондины и машины красного цвета»

$$\exists x(F(x) \cup G) = \exists x(F(x)) \cup G$$

- «Для некоторых людей верно, что они блондины или машины красного цвета»
- «Некоторые люди – блондины или машины красного цвета»

$$\forall x(F(x) \& G) = \forall x(F(x)) \& G$$

- «Для всех людей верно, что они блондины и машины красного цвета»
- «Все люди – блондины и машины красного цвета»

$$\forall x(F(x) \cup G) = \forall x(F(x)) \cup G$$

- «Для всехлюдей верно, что они блондины или машины красного цвета»
- «Все люди – блондины или машины красного цвета»

# **ПРИНЦИП МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ В ПРЕДИКАТНОЙ ФОРМЕ**

# Элементы теории алгоритмов

# Вычислимые функции и алгоритмы

# ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ





# **СВОЙСТВА АЛГОРИТМОВ**



# ПРОСТЕЙШИЕ ФУНКЦИИ



# РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ



# Нормальный алгоритм Маркова. Машина Тьюринга



# **ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. АЛГОРИТМ МАРКОВА**



# АЛГОРИТМ ТЬЮРИНГА



