

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Булевы функции от одного, двух аргументов и от n аргументов

**БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ.
КАНОНИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН
ЖЕГАЛКИНА**

Булевы функции от одного аргумента

- Булевой функцией от одного аргумента называется функция f , заданная на множестве из двух элементов и принимающая значения в том же двухэлементном множестве.
- $f : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$

Булевы функции от одного аргумента

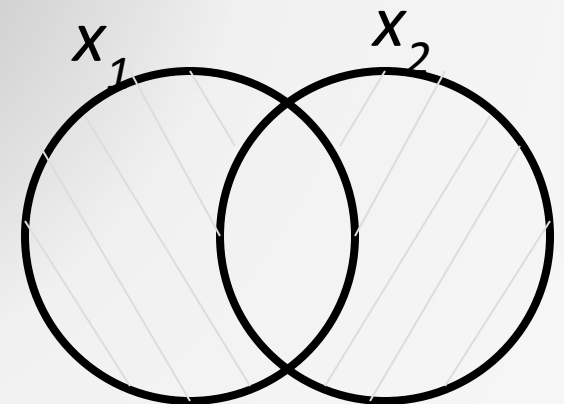
x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

- $f_0(x) = 0$ (функция, тождественно равная 0)
- $f_1(x) = x$ (тождественная функция)
- $f_2(x) = x'$ (функция отрицания)
- $f_3(x) = 1$ (функция, тождественно равная 1)

Сумма по модулю два

- Сумма по модулю два (строгая дизъюнкция) двух переменных x_1 и x_2 называется булева функция $x_1 \oplus x_2$ которая равна 1 тогда и только тогда, когда равна 1 только одна переменная.

x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Сумма по модулю два

Законы, применимые для суммы по модулю два:

- Переместительный $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$
- Сочетательный $(x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3)$
- Распределительный конъюнкции

$$x_1 (x_2 \oplus x_3) = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3$$

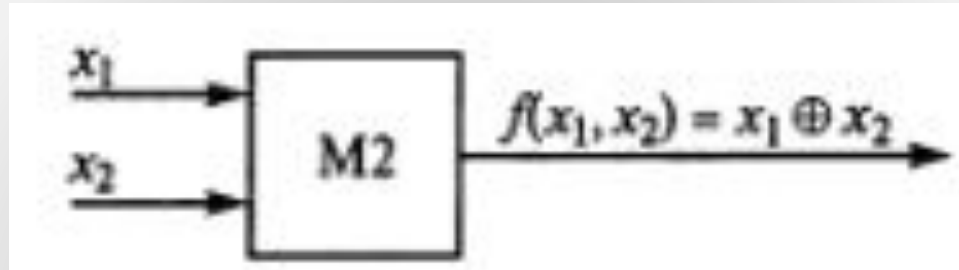
- Операции с константами:
- $x \oplus x = 0$
- $x \oplus 0 = x$
- $x \oplus \bar{x} = 1$
- $x \oplus 1 = \bar{x}$

Разложение в СДНФ:

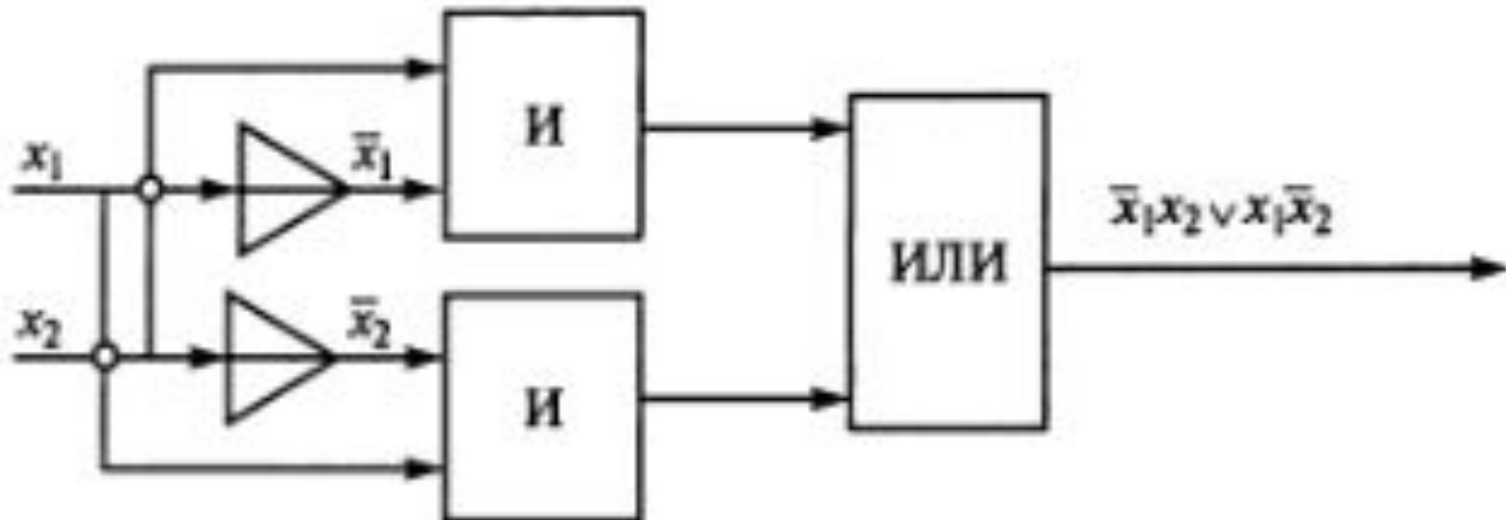
- $x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2$
- $\overline{x_1 \oplus x_2} = \bar{x}_1 \oplus x_2 = x_1 \oplus \bar{x}_2$

- Связь между дизъюнкцией с суммой по модулю два:
- $x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2$
- Конъюнкция:
- $x_1 x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus (x_1 \vee x_2)$

Логический элемент М2 – сумма по модулю два



- На практике в электронике реализовать сложно. Элемент М2 реализуют из простых устойчивых элементов: И, ИЛИ, НЕ.



Применение

- Для проверки результатов сложения в двоичном сумматоре для системы контроля и исправления ошибок:
 - $0 + 0 = 0$
 - $0 + 1 = 1$
 - $1 + 0 = 1$
 - $1 + 1 = (1)0$

Почему «сумма по модулю два»?

- Остаток от деления целых чисел M на N : $M \bmod N$
- Рассмотрим множество $Z_2 = \{0,1\}$ и произведем операцию: $(a + b) \bmod 2$
- $(0 + 0) \bmod 2 = 0$
- $(0 + 1) \bmod 2 = 1$
- $(1 + 0) \bmod 2 = 1$
- $(1 + 1) \bmod 2 = 0$

Канонический полином Жегалкина

$$f(x_1 x_2 \dots x_n) = f_0 \oplus f_1 x_1 \oplus f_2 x_2 \oplus \dots \oplus f_n x_n \oplus f_{12} x_1 x_2 \oplus \dots \oplus f_{12\dots n} x_1 x_2 \dots x_n$$

- $f_1 \dots f_n \in B = \{0, 1\}$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Пример:

$$F(x_1, x_2, x_3) =$$

$$= \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 =$$

$$= (1 \oplus x_1) x_2 (1 \oplus x_3) \oplus x_1 (1 \oplus x_2) (1 \oplus x_3) \oplus x_1 (1 \oplus x_2) x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 =$$

$$= (x_2 \oplus x_1 x_2) (1 \oplus x_3) \oplus (x_1 \oplus x_1 x_2) (1 \oplus x_3) \oplus (x_1 \oplus x_1 x_2) x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 =$$

$$= x_2 \oplus x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 =$$

$$= x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3$$

Любую логическую функцию можно единственным образом представить в виде полинома Жегалкина

2-й способ:

- Многочлен с неопределенным –коэффициентом

$$xy = a \oplus bx \oplus cy \oplus dxy$$

При $x=0, y=0$, то $0 = a$

При $x=0, y=1$, то $0 = 0 \oplus c, \Rightarrow c=0$

При $x=1, y=0$, то $1 = b \oplus 0, \Rightarrow b=1$

При $x=1, y=1$, то $0 = 1 \oplus d, \Rightarrow d=1$

$$xy = x \oplus xy$$

Функционально замкнутые классы

- Класс функций называется функционально замкнутым, если любая комбинация функций этого класса принадлежит этому же классу.

Класс функций, сохраняющих 0 (K_0)

ВАЖНЕЙШИЕ ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ. ТЕОРЕМА ПОСТА

**ПРИЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ
ЛОГИКИ К АНАЛИЗУ И СИНТЕЗУ
РЕЛЕЙНО КОНТАКТНЫХ СХЕМ**

Логика предикатов

Основные понятия, связанные с предикатами

**ПРЕДИКАТЫ И
ВЫСКАЗЫВАТЕЛЬНЫЕ ФОРМЫ.
РАВНОСИЛЬНОСТЬ И СЛЕДОВАНИЕ
ПРЕДИКАТОВ**

- **n - местным предикатом называется предложение, содержащее n предметных переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Переменные выбираются из множества значений M_1, M_2, \dots, M_n . При этом предикат превращается в высказывание.**
- **$P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – функция высказывания**

Примеры: Река x впадает в озеро Байкал. – **одноместный предикат**, определенный на множестве всех рек.

Пусть $x = \text{Баргузин}$, тогда: «Река Баргузин впадает в озеро Байкал» - **высказывание истинное**

Пусть $x = \text{Днепр}$, тогда: «Река Днепр впадает в озеро Байкал» - **высказывание ложное**

Пример

$$x^2 + y^2 \leq 9$$

- Сколько переменных?
- На каком множестве заданы?
- При какой паре чисел принимает истинное значение?
- При какой паре чисел принимает ложное значение?

Классификация предикатов

Предикат называется тождественно истинным, если при любой подстановке в предложение из множества значений он становится истинным высказыванием.

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$$

Пример: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Предикат называется тождественно ложным, если при любой подстановке в предложение из множества значений он становится ложным высказыванием.

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Пример: $x^2 + y^2 < 0$

- **Предикат называется выполнимым (опровержимым), если существует хотя бы один набор конкретных предметов, при подстановке которых он становится истинным (ложным) высказыванием.**

- **Примеры:** «Город x расположен на берегу реки Волги»
- «Рыба x живет в высокогорьях»
- «Рыба x живет в пресном водоеме»
- «Современный компьютер x обладает операционной системой»
- «Компьютерная сеть x соединяет у компьютеров»

Множество истинности предикатов

Множество истинности предиката – это множество тех значений, при которых предикат превращается в истинное высказывание.

$$P^+ = \{(a_1, \dots, a_n)\} : \lambda(P(a_1, \dots, a_n)) = 1\}$$

Пример: $x^2 + y^2 = 9$

- Сколько местный это предикат?
- На каком множестве он простроен?
- Множество пар действительных чисел, которые являются координатами точек плоскости, образующими окружность радиусом 9

Равносильность и следование предикатов

Два n -местных предиката заданных над одним и тем же множеством называются равносильными, если при подстановке одного и того же набора значений превращают оба предиката в истинные высказывания.

- **Переход от предиката P_1 к равносильному ему предикату P_2 называется равносильным преобразованием**
- $4x - 2 = -3x - 9$
- $4x + 3x = 2 - 9$
- $x = -1$
- **Ответ: $\{-1\}$ – множество истинности для данного уравнения**

Следствия предикатов

- Предикат Q называется следствием предиката P , если он превращается в истинное высказывание на множестве значений, включенных в множество истинных значений предиката P .
- $P^+ \subseteq Q^+$

Пример:

$Q(x_1, \dots, x_n)$ – предикат «множество компьютеров аудитории 22б»

$P(x_1, \dots, x_n)$ – предикат «компьютеры колледжа 50»

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ПРЕДИКАТАМИ

Отрицание предиката

- Отрицанием n -местного предиката P , определенного на множествах M , называется новый n -местный предикат, определенный на тех же множествах .
- Обозначение $\neg P(x_1, \dots, x_n)$
- Читается «Неверно, что $P(x_1, \dots, x_n)$ »

Пример: $P(x \in \mathbb{R}) = x \leq 3$

$$\neg P(x \in \mathbb{R}) = \neg (x \leq 3) = x > 3$$

Конъюнкция двух предикатов

- Конъюнкцией n -местного предиката P , определенного на множествах M и k -местного предиката Q , определенного на множествах L , называется новый $(n+k)$ -местный предикат, определенный на этих множествах.
- Обозначение $P(x_1, \dots, x_n) \wedge Q(y_1, \dots, y_n)$
- Чтение: « $P(x_1, \dots, x_n)$ и $Q(y_1, \dots, y_n)$ »

Пример: $P(x \in \mathbb{R}) = x > -3$

$$Q(x \in \mathbb{R}) = x < 3$$

$$P \wedge Q = x > -3 \wedge x < 3 = -3 < x < 3$$

Дизъюнкция двух предикатов

- Дизъюнкцией n -местного предиката P , определенного на множествах M и k -местного предиката Q , определенного на множествах L , называется новый $(n+k)$ -местный предикат, определенный на этих множествах.
- Обозначение $P(x_1, \dots, x_n) \vee Q(y_1, \dots, y_n)$
- Чтение: « $P(x_1, \dots, x_n)$ или $Q(y_1, \dots, y_n)$ »

Пример: $P(x \in \mathbb{R}) = x > -3$

$$Q(x \in \mathbb{R}) = x < 3$$

$$P \vee Q = x > -3 \vee x < 3 = -3 < x < \infty$$

Примеры

- « X – четное число»
- « Y – простое число»
- Определены на $N < 21$.

Указать множества истинности для:

$\neg X$

$\neg X \wedge Y$

$\neg Y$

$X \wedge \neg Y$

$X \wedge Y$

$X \vee \neg Y$

$X \vee Y$

$\neg X \vee Y$

$\neg(X \vee Y)$

$\neg X \vee \neg Y$

$\neg(X \wedge Y)$

$\neg X \vee Y$

Кванторные операции над предикатами

КВАНТОРЫ. ОТРИЦАНИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЙ С КВАНТОРАМИ

Квантор общности

- Операция над одноместным предикатом, означающая:
- $\forall x(P(x))$ – для всех x имеет место $P(x)$

$$\lambda[(\forall x)(P(x))] = \begin{cases} 1, & \text{если } P(x) \text{ — тождественно истинный} \\ & \text{предикат,} \\ 0 & \text{— в противном случае;} \end{cases}$$

Квантор существования

- Операция над одноместным предикатом, означающая:
- $\exists x(P(x))$ – для всех x имеет место $P(x)$

$$\lambda[(\exists x)(P(x))] = \begin{cases} 0, & \text{если } P(x) \text{ — тождественно ложный} \\ & \text{предикат,} \\ 1 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

- Квантор можно применять и к n -местному предикату, в результате получится $(n-1)$ – местный предикат. Переменную, к которой относится квантор, называют связанной, остальные переменные – свободные.

Какие переменные связанные и какие свободные?

1. $\forall x(\exists y(A(x) \supset \&B(y, z))).$
2. $\forall x(\exists y(\neg A(x) \&B(y)) \supset C(y, z))$

1. $A(x) = "x - \text{наука}"; B(x) = "x \text{ гуманитарная}."$

Записать словами: C

$$C = \neg \forall x(A(x) \supset B(x)); D = \exists x((A(x) \& B(x))).$$

2. $A(x) = "x - \text{рыба}"; B(x) = "x \text{ дышит жабрами}."$

Записать словами:

$$C = \forall x(A(x) \supset B(x)); D = \neg \exists x(A(x) \& \neg B(x)).$$

- Он ничего не знает.
- Некоторые абитуриенты поступили в институт.
- Студент ответил на некоторые вопросы.
- Автобус останавливается на всех остановках.

- 1. определить, какие переменные свободные, а какие связанные.
- 2. Даны предикаты: $A(x)$ и $B(x)$. Записать словами предложенные формулы C и D .

ЧИСЛЕННЫЕ КВАНТОРЫ

Применение логики предикатов к логико- математической практике

**ЗАПИСЬ НА ЯЗЫКЕ ЛОГИКИ
ПРЕДИКАТОВ РАЗЛИЧНЫХ
ПРЕДЛОЖЕНИЙ. СТРОЕНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРЕМ**

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРЕДИКАТОВ

- X - люди $F(x)$ = «блондины»; $G(x)$ = «ездят на машинах»

$$\forall x(F(x) \& G(x)) = \forall x(F(x)) \& \forall x(G(x))$$

- «Для всех людей верно, что они блондины и ездят на машинах»

- «Все люди блондины и все люди ездят на машинах»

$$\forall x(F(x) \cup G(x)) = \forall x(F(x)) \cup \forall x(G(x))$$

- «Для всех людей верно, что они блондины или ездят на машинах»

- «Все люди блондины или все люди ездят на машинах»

$$\neg \forall x(F(x) \& G(x))$$

- «Неверно для всех людей, что они блондины и ездят на машинах»

$$\neg(\forall x(F(x) \& \forall xG(x))) = \neg \forall x(F(x)) \cup \neg \forall xG(x)$$

- «Неверно, что все люди блондины и все люди ездят на машинах»

- «Неверно, что все люди блондины или неверно, что все люди ездят на машинах»

$$\exists x(F(x) \cup G(x)) = \exists x(F(x)) \cup \exists x(G(x))$$

- «Есть люди, которые являются блондинами или ездят на машинах»
- «Есть люди – блондины или есть люди, едущие на машинах»

$$\exists x(F(x) \& G(x)) = \exists x(F(x) \& \exists x(G(x)))$$

- «Есть люди, которые являются блондинами и ездят на машинах»
- «Есть люди – блондины и есть люди, едущие на машинах»

$$\neg \exists x(F(x) \cup G(x)) = \neg(\exists x(F(x)) \cup \exists x(G(x))) = \\ = \neg \exists x(F(x)) \& \neg \exists x(G(x))$$

- «Неверно, что есть люди, которые являются блондинами или ездят на машинах»
- «Неверно, что есть люди – блондины или есть люди, едущие на машинах»
- «Неверно, что есть люди – блондины и есть люди, едущие на машинах»

Перенос квантора через отрицание

$$\neg \forall x(F(x)) = \exists x \neg (F(x))$$

- «Неверно, что все люди – блондины»
- «Есть люди –не блондины»

$$\neg(\exists x(F(x))) = \forall x \neg (F(x))$$

- «Неверно, что некоторые люди – блондины»
- «Для всех людей неверно, что они – блондины»

Вынос квантора за скобки

$$\exists x(F(x) \& G) = \exists x(F(x)) \& G$$

- «Для некоторых людей верно, что они блондины и машины красного цвета»
- «Некоторые люди – блондины и машины красного цвета»

$$\exists x(F(x) \cup G) = \exists x(F(x)) \cup G$$

- «Для некоторых людей верно, что они блондины или машины красного цвета»
- «Некоторые люди – блондины или машины красного цвета»

$$\forall x(F(x) \& G) = \forall x(F(x)) \& G$$

- «Для всех людей верно, что они блондины и машины красного цвета»
- «Все люди – блондины и машины красного цвета»

$$\forall x(F(x) \cup G) = \forall x(F(x)) \cup G$$

- «Для всехлюдей верно, что они блондины или машины красного цвета»
- «Все люди – блондины или машины красного цвета»

ПРИНЦИП МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ В ПРЕДИКАТНОЙ ФОРМЕ

Элементы теории алгоритмов

Вычислимые функции и алгоритмы

ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ

СВОЙСТВА АЛГОРИТМОВ

ПРОСТЕЙШИЕ ФУНКЦИИ

РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

Нормальный алгоритм Маркова. Машина Тьюринга

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. АЛГОРИТМ МАРКОВА

АЛГОРИТМ ТЬЮРИНГА

