Основы теории проверки статистических гипотез.

Доцент Аймаханова А.Ш.

План лекции:

1. Статистические гипотезы в медико-биологических исследованиях.
2. Параметрические критерии различий.
3. Непараметрические критерии.
4. Критерии согласия.

Процедура сопоставления высказанного предположения (гипотезы) с выборочными данными называется *проверкой гипотез*.

Задачи статистической проверки гипотез:

- **Относительно некоторой генеральной совокупности высказывается та или иная гипотеза H_o.**
- **Из этой генеральной совокупности извлекается выборка.**
- **Требуется указать правило, при помощи которого можно было бы по выборке решить вопрос о том, следует ли отклонить гипотезу H_o или принять ее.**

Статистическая гипотеза- это предположение о виде распределения или о величинах неизвестных параметров генеральной совокупности, которая может быть проверена на основании выборочных показателей.

Примеры статистических гипотез:

Генеральная совокупность распределена по нормальному закону Гаусса.

Дисперсии двух нормальных совокупностей равны между собой.

Статистические гипотезы

Параметрические Непараметрические

Нулевой гипотезой H_o **называется основная гипотеза, которая проверяется.**

Альтернативной гипотезой H_1, **называется гипотеза, конкурирующая с нулевой, то есть противоречащая ей.**

Простой **называют гипотезу, содержащую только одно предположение. $a=a_o$**

Сложной **называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез.**

Статистическим критерием проверки гипотезы H_o называется правило, по которому принимается решение принять или отклонить гипотезу H_o.

Основной принцип проверки гипотез

Проверку гипотез осуществляют на основании результатов выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$, из которых формируют функцию выборки $T_n = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, называемой ***статистикой критерия.***

$$T_n = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

критическая область S область $\overline{S}$ принятия гипотезы

Возможные ошибки при проверке гипотез

Первого рода

Второго рода

Гипотеза H_0	Отвергается	Принимается
Верна Неверна	Ошибка 1-го рода Нет ошибки	Нет ошибки Ошибка 2-го рода

Уровнем значимости критерия (α) **называется вероятность допустить ошибку 1-го рода.**

Вероятность ошибки 2-го рода обозначается через β.

Мощностью критерия **называется вероятность недопущения ошибки 2-го рода (1- β).**

$\alpha = P$(отвергнуть H_0/H_0 верна) или $\alpha = P(H_1/H_0)$

$\beta = P$(принять H_0/H_0 неверна) или $\beta = P(H_0/H_1)$

$1-\beta = P$(принять H_1/H_1 верна)

Чем больше мощность критерия, тем вероятность ошибки 2-го рода меньше.

Разумное соотношение между α и β находят, исходя из тяжести последствий каждой из ошибок.

Методика проверки гипотез:

1. Формирование нулевой H_o и альтернативной H_1 гипотез исходя из выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

2. Подбор статистики критерия $T_n = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

3. По статистике критерия T_n и уровню значимости α определяют критическую точку $t_{кр}$, то есть границу, отделяющую область $\overline{S}$ от **S**.

4. Для полученной реализации выборки $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ подсчитывают значение критерия, то есть $T_{набл} = T(X_1, X_2, \ldots, X_n) = t$

5. Если $t \in S$ (например, $t > t_{кр}$ для правосторонней области S), то нулевую гипотезу H_o отвергают; если же $t \in \overline{S}$ ($t < t_{кр}$), то нет оснований, чтобы отвергнуть гипотезу H_o.

t-критерий Стьюдента:

Общий вид:

$$t = \frac{\left|\overline{x_1} - \overline{x_2}\right|}{\sqrt{S^2_{\overline{x_1}} + S^2_{\overline{x_2}}}}$$

Случай независимых выборок.

$$t = \frac{\left|\overline{x_1} - \overline{x_2}\right|}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}}}$$

$n_1 = n_2 = n$

$df = n - 1$

$$t = \frac{\left|\overline{x_1} - \overline{x_2}\right|}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2(n_1 - 1) + \sigma_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2} * \dfrac{(n_1 + n_2)}{n_1 n_2}}}$$

$n_1 \neq n_2$

$df = n_1 + n_2 - 2$

Случай зависимых выборок.

$$t = \frac{\bar{d}}{\bar{S}_d}$$

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{\sum (x_{1i} - x_{2i})}{n}$$

$$d_i = x_{1i} - x_{2i}$$

$df = n-1$

$$\bar{S}_d = \frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}$$

Вывод:

- Критерий Стьюдента может быть использован для проверки гипотезы о различии средних только для двух групп.
- Критерий Стьюдента применяется в случае малых выборок, что характерно для медико-биологических экспериментов.
- Если схема эксперимента предполагает большее число групп, воспользуйтесь дисперсионным анализом.
- Если критерий Стьюдента был использован для проверки различий между несколькими группами, то истинный уровень значимости можно получить, умножив уровень значимости, на число возможных сравнений.

F- критерий Фишера:

$$F_{эмп} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$$

$$\sigma_1 > \sigma_2$$

$$df_1 = n_1 - 1, \qquad df_2 = n_2 - 1$$

Критерии различия называют *непараметрическими*, если он не базируется на предположении о типе распределения генеральной совокупности и не использует параметры этой совокупности.

Применение непараметрических методов целесообразно:

- **на этапе разведочного анализа;**
- **при малом числе наблюдений (до 30);**
- **когда нет уверенности в соответствии данных закону нормального распределения.**

Непараметрические критерии представлены основными группами:

- **критерии различия между группами независимых выборок;**
- **критерии различия между группами зависимых выборок.**

Различия между независимыми группами

- U критерий Манна-Уитни
- двухвыборочный критерий Колмогорова – Смирнова.

Различия между зависимыми группами

- z – критерий знаков
- T – критерий Уилкоксона парных сравнений

Критерии согласия:

Критерием согласия называют статистический критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения.

- Пирсона (Хи-квадрат),
- Колмогорова,
- Фишера,
- Смирнова.

Критерий согласия χ^2 (хи-квадрат) Пирсона.

H_o: «между эмпирическим распределением и теоретической моделью нет никакого различия».

Δ_1	Δ_2	$\ldots\ldots$	Δ_k
np_1	np_2	$\ldots\ldots$	np_m

Если эмпирические частоты (ni) сильно отличаются от теоретических (npi) ,то проверяемую гипотезу *Но* следует отвергнуть; в противном случае-принять.

Критерий согласия χ^2 (хи-квадрат) Пирсона.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

n-объем выборки

k-число интервалов разбиения выборки

n_i-число значений выборки, попавших в i-й интервал

np_i - теоретическая частота попадания значений случайной величины X в i-й интервал.

Критерий согласия χ^2 (хи-квадрат) Пирсона.

или

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

O-фактически наблюдаемое число

E- теоретически ожидаемое число

Поправка Йейтса

$$\chi^2 = \sum \frac{(\left|O - E\right| - \frac{1}{2})^2}{E}$$

Для распределения признаков, которые принимают всего 2 значения.

Правило применения критерия χ^2.

*По формуле вычисляют - $\chi^2_{набл}$ выборочное значение статистики критерия.

*выбрав уровень значимости α критерия, по таблице χ^2-распределения находим критическую точку $\chi^2_{\alpha,df}$

*Если $\chi^2_{набл} \leq \chi^2_{\alpha,df}$, то гипотеза H_o не противоречит опытным данным;

если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{\alpha,df}$, то гипотеза H_o отвергается.

Неоходимым условием применения критерия Пирсона является наличие в каждом из интервалов не менее 5 наблюдений

ЛИТЕРАТУРА:

- Медик В.А.,Токмачев М.С.,Фишман Б.Б. Статистика в медицине и биологии. М.: Медицина, 2000.
- Лукьянова Е.А. Медицинская статистика.- М.: Изд. РУДН, 2002.
- Рокицкий П.Ф. Биологическая статистика.- Высшая школа, 1973.
- И.В. Павлушков и др. Основы высшей математики и математической статистики. (учебник для медицинских и фармацевтических вузов) М., «ГЭОТАР - МЕД»; 2003

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ.