ОСНОВЫ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ

Ни одна вещь не возникает и не уничтожается, но каждая составляется из смешения существующих вещей или выделяется из них.

Анаксагор. Древнегреческий философ, IV в.д.н.э.

ВВЕДЕНИЕ

- Вейвлет – преобразование сигналов является обобщением спектрального анализа, типичный представитель которого – классическое преобразование Фурье.
- Термин "вейвлет" (wavelet) в переводе с английского означает "маленькая (короткая) волна".
- Вейвлеты - это обобщенное название семейств математических функций определенной формы, которые локальны во времени и по частоте, и в которых все функции получаются из одной базовой (порождающей) посредством ее сдвигов и растяжений по оси времени.

Вейвлет-преобразования (WT) подразделяют на

- дискретное (DWT)
- непрерывное (CWT).

- DWT используется для преобразований и кодирования сигналов,
- CWT - для анализа сигналов.

- Вейвлет-преобразования в настоящее время принимаются на вооружение для огромного числа разнообразных применений, нередко заменяя обычное преобразование Фурье.

- Вейвлеты имеют вид коротких волновых пакетов с нулевым интегральным значением, локализованных по оси аргументов (независимых переменных), инвариантных к сдвигу и линейных к операции масштабирования (сжатия/растяжения).
- По локализации во временном и частотном представлении вейвлеты занимают промежуточное положение между гармоническими (синусоидальными) функциями, локализованными по частоте, и функцией Дирака, локализованной во времени.

- Основная область применения вейвлетных преобразований – анализ и обработка сигналов и функций, нестационарных во времени или неоднородных в пространстве, когда результаты анализа должны содержать не только общую частотную характеристику сигнала (распределение энергии сигнала по частотным составляющим), но и сведения об определенных локальных координатах, на которых проявляют себя те или иные группы частотных составляющих, или на которых происходят быстрые изменения частотных составляющих сигнала

- Не следует рассматривать вейвлет-методы обработки и анализа сигналов в качестве новой универсальной технологии для решения любых задач.
- Но оно может существенно расширить инструментальную базу информационных технологий обработки данных.

Преобразование Фурье

Можно отметить ряд недостатков разложения сигналов в ряды Фурье, которые привели к появлению оконного преобразования Фурье и стимулировали развитие вейвлетного преобразования. Основные из них:

- Ограниченная информативность анализа нестационарных сигналов и практически полное отсутствие возможностей анализа их особенностей (сингулярностей), т.к. в частотной области происходит «размазывание» особенностей сигналов (разрывов, ступенек, пиков и т.п.) по всему частотному диапазону спектра.
- Гармонические базисные функции разложения не способны в принципе отображать перепады сигналов с бесконечной крутизной типа прямоугольных импульсов, т.к. для этого требуется бесконечно большое число членов ряда
- Преобразование Фурье отображает глобальные сведения о частотах исследуемого сигнала и не дает представления о локальных свойствах сигнала при быстрых временных изменения его спектрального состава. вычисляются интегрированием по всему интервалу задания сигнала.

Оконное преобразование Фурье

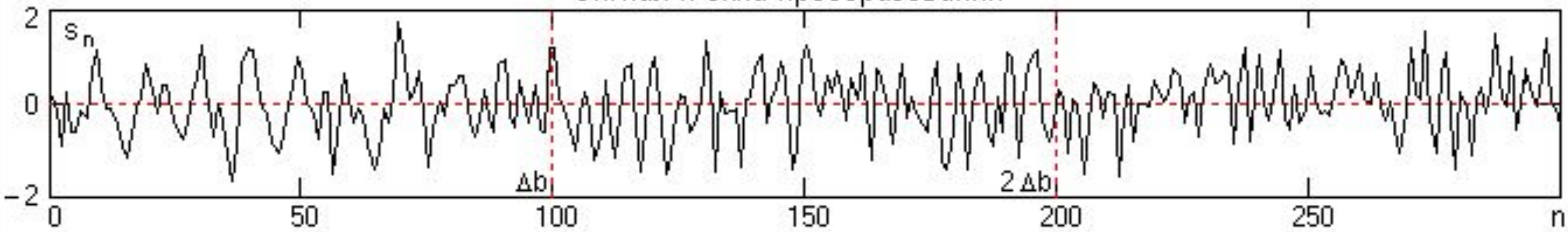
- Частичным выходом из этой ситуации является оконное преобразование Фурье с движущейся по сигналу оконной функцией, имеющей компактный носитель.
- Временной интервал сигнала при большой его длительности разделяется на подинтервалы, и преобразование Фурье выполняется последовательно для каждого подинтервала в отдельности. Тем самым осуществляется переход к частотно-временному (частотно-координатному) представлению сигналов, при этом в пределах каждого подинтервала сигнал "считается" стационарным

MATHCAD

Оконное преобразование нестационарного сигнала

$N := 300 \quad n = 0..N \quad K = 3 \quad \Delta b = 100 \quad w = 99 \quad S = CFFT(s) \quad \Delta\omega_S = \frac{2\pi}{N+1} \quad \Delta\omega_{Sw} = \frac{2\pi}{w+1}$

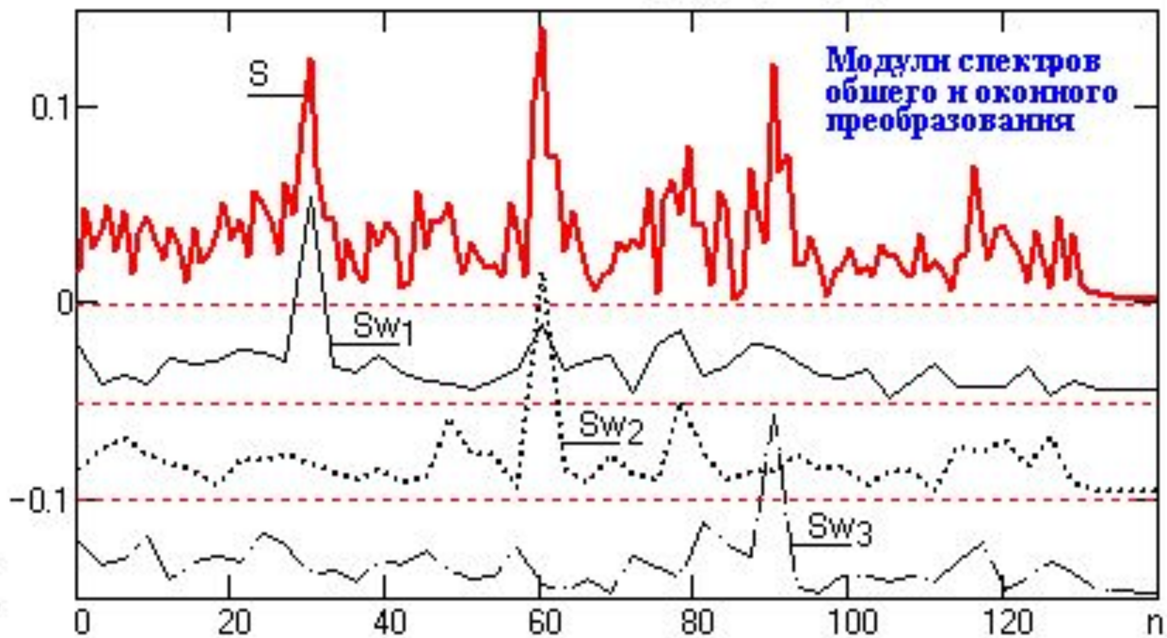
Сигнал и окна преобразования



Программа вычисления оконных спектров

```
sw(s, N, Δb, w) := | k ← 0
                   | for  b ∈ 0, Δb .. N − w
                   |    | k ← k + 1
                   |    | for  n ∈ b .. b + w
                   |    |    y(n−b) ← s(n)
                   |    | Sw ← CFFT(y)
                   |    | for  n ∈ 0 .. w
                   |    |    S(k,n) ← Sw(n)
                   | S
```

$Sw := N^{-1} \cdot \Delta b \cdot sw(sq, N, \Delta b, w)$



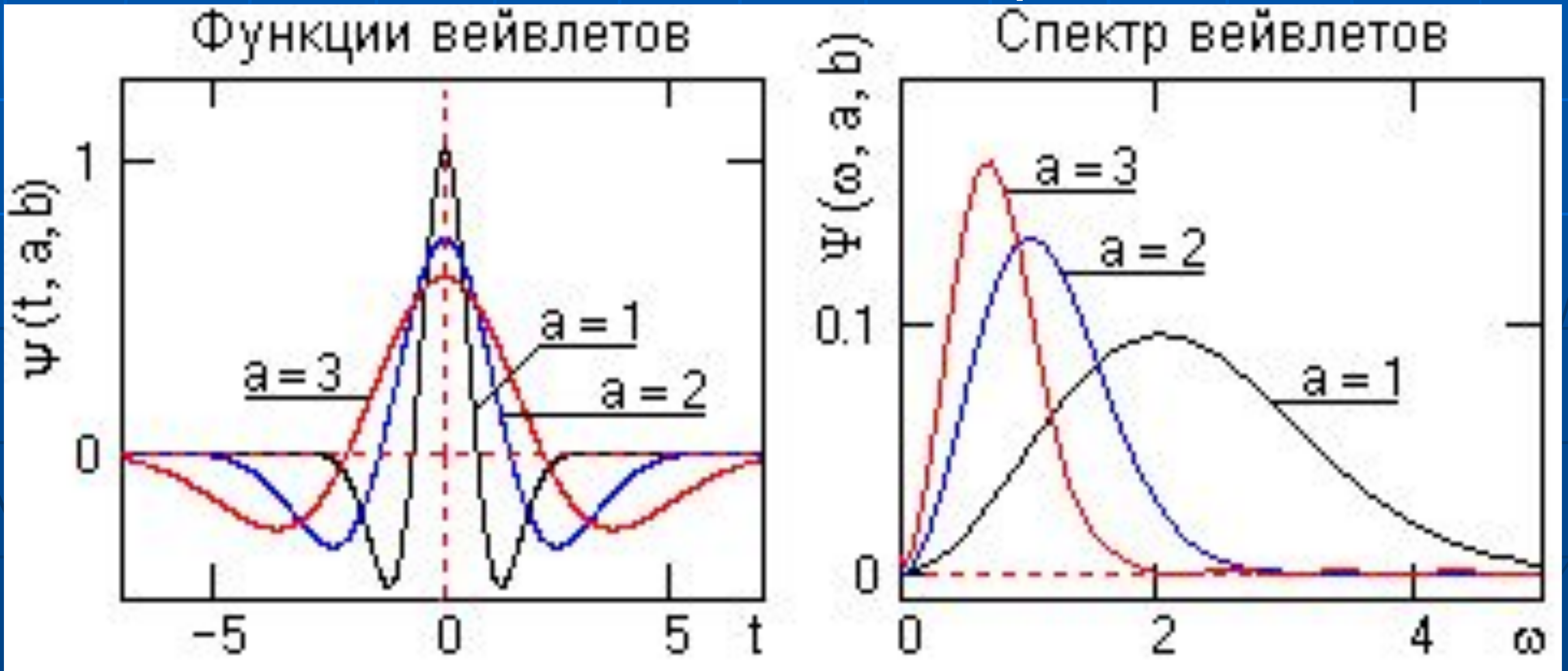
Графики модулей спектров Sw смещены относительно друг друга и графика S. =>

- По спектру сигнала в целом можно судить о наличии в его составе гармонических колебаний на трех частотах. Оконное преобразование не только подтверждает данное заключение, но и показывает конкретную локальность колебаний по интервалу сигнала и соотношение между амплитудами этих колебаний.

Принцип вейвлет-преобразования

- Гармонические базисные функции преобразования Фурье предельно локализованы в частотной области (до импульсных функций Дирака при $T \to \infty$) и не локализованы во временной (определены во всем временном интервале от $-\infty$ до ∞).
- Их противоположностью являются импульсные базисные функции типа импульсов Кронекера, которые предельно локализованы во временной области и "размыты" по всему частотному диапазону

- Вейвлеты по локализации в этих двух представлениях можно рассматривать как функции, занимающие промежуточное положение между гармоническими и импульсными функциями. Они должны быть локализованными как во временной, так и в частотной области представления.



- Функция изменения частотной независимой переменной в спектральном представлении сигналов отображается во временном представлении растяжением/сжатием сигнала. Для вейвлетного базиса это можно выполнить функцией типа $y(t) \Rightarrow y(a^m t)$, $a = const$, $m = 0, 1, \dots, M$, Однако локальность функции $y(t)$ на временной оси требует дополнительной независимой переменной последовательных переносов (сдвигов) функции $y(t)$ вдоль оси, типа $y(t) \Rightarrow y(t+k)$. С учетом обеих условий одновременно структура базисной функции может быть принята следующей:

- $y(t) \Rightarrow y(a^m t+k)$.

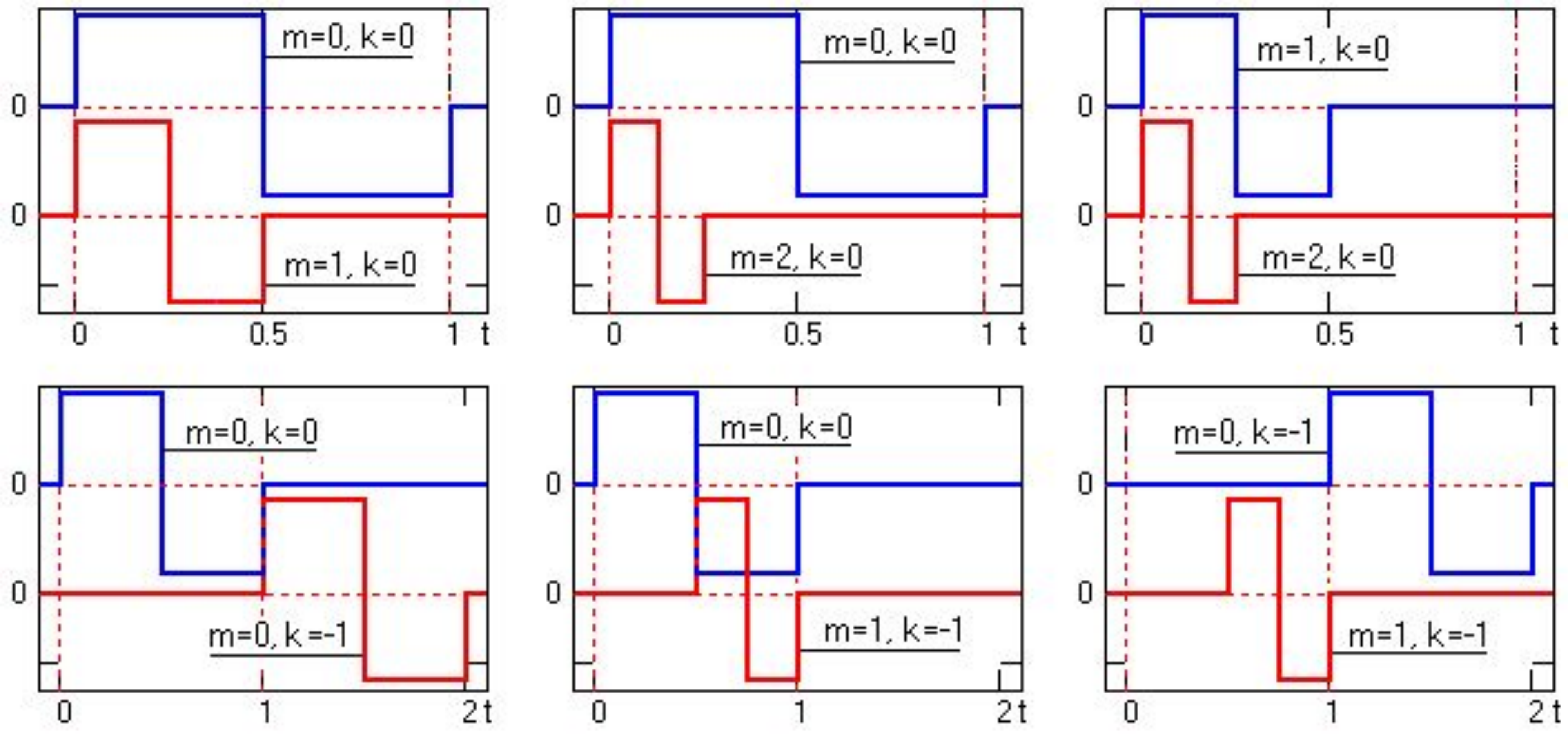
- Отсюда следует, что произвольная функция пространства может быть представлена в виде ряда (разложения по базису $y_{mk}(t)$):

$$s(t) = \sum_{m,k=-\infty}^{\infty} S_{mk} \cdot y_{mk}(t)$$

$$S_{mk} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot y_{mk}(t) dt$$

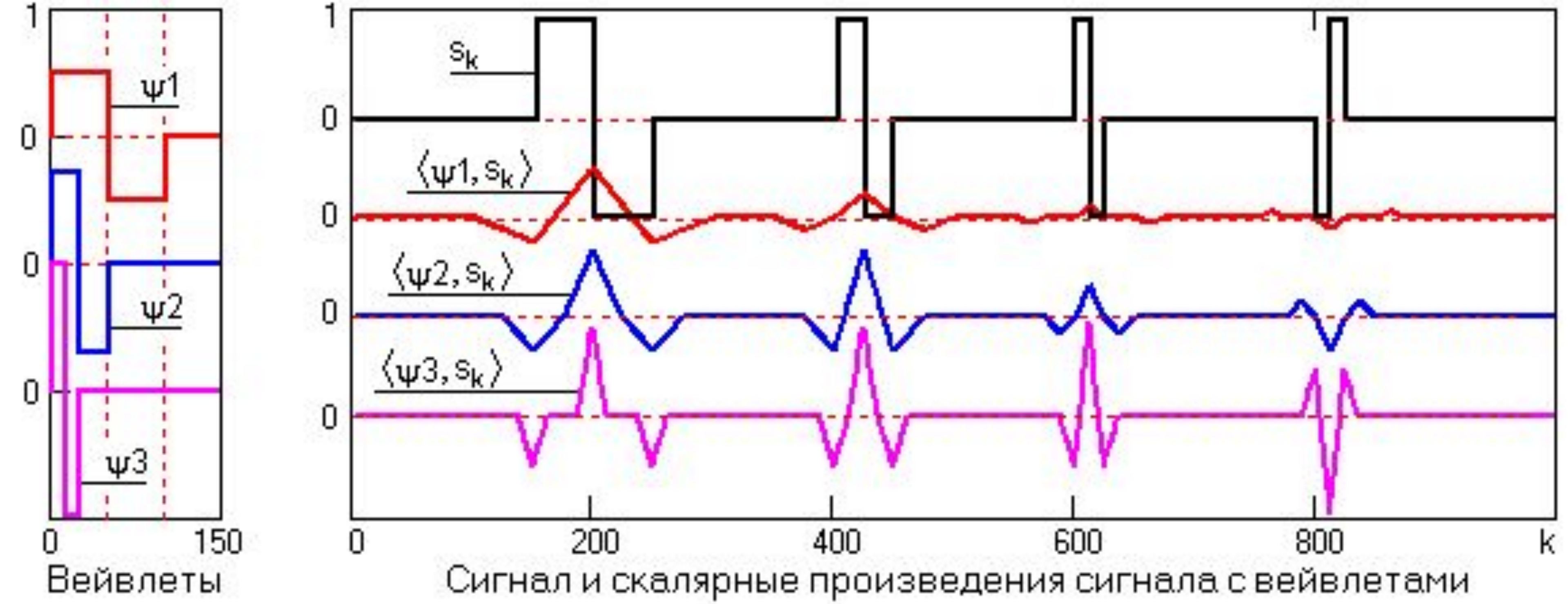
Простой пример: функции Хаара

$$y(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1/2 \\ -1, & 1/2 < t < 1 \\ 0, & t < 0,\ t > 1. \end{cases}$$

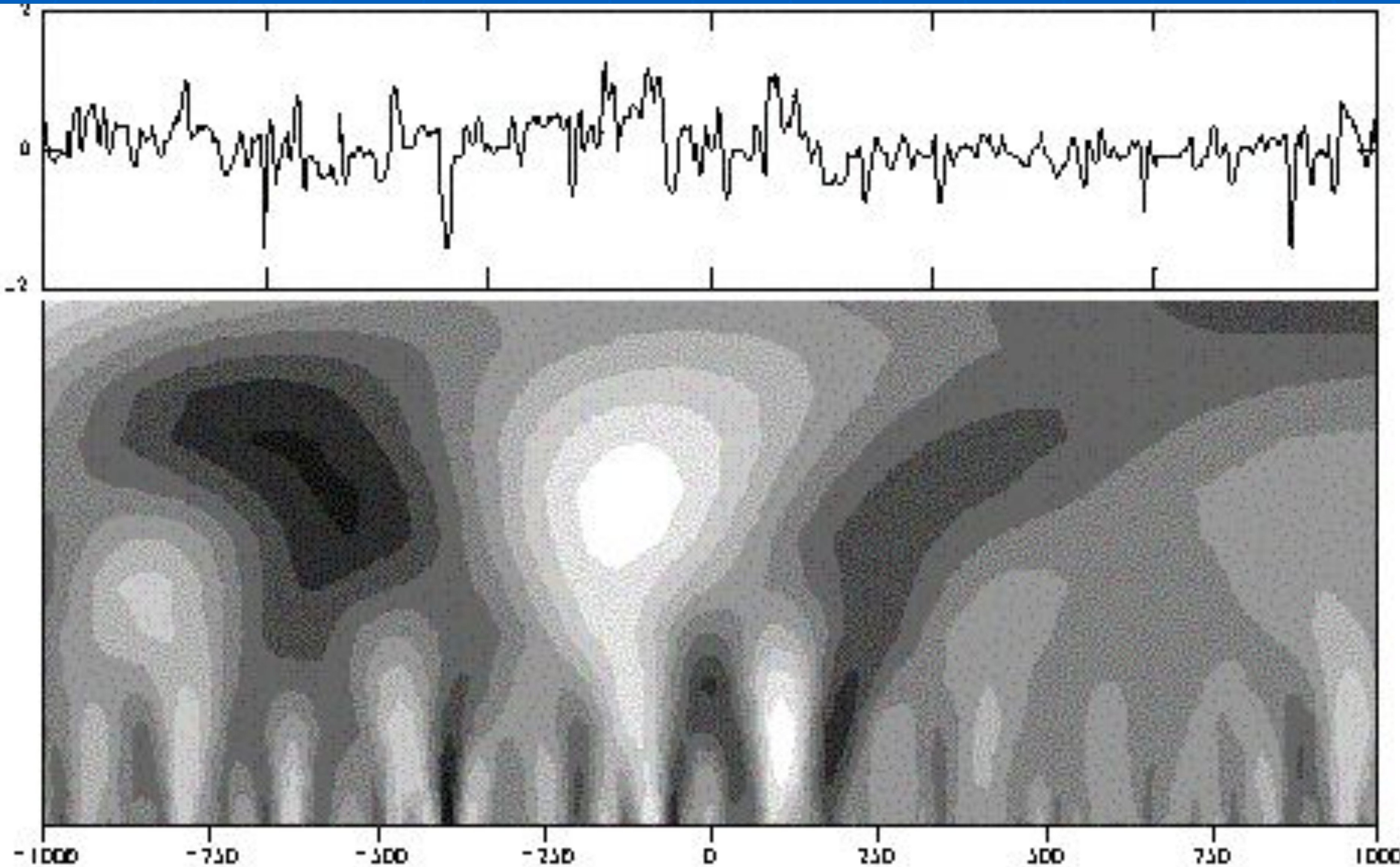


Вейвлетный спектр ,

- в отличие от преобразования Фурье, является двумерным и определяет двумерную поверхность в пространстве переменных m и k. При графическом представлении параметр растяжения/сжатия спектра m откладывается по оси абсцисс, параметр локализации k по оси ординат – оси независимой переменной сигнала.
- Математику процесса вейвлетного разложения сигнала в упрощенной форме рассмотрим на примере разложения сигнала s(t) вейвлетом Хаара с тремя последовательными по масштабу m вейвлетными функциями с параметром a=2, при этом сам сигнал s(t) образуем суммированием этих же вейвлетных функций с одинаковой амплитудой с разным сдвигом от нуля



Как видно на рис., чем точнее локальная особенность сигнала совпадает с соответствующей функцией вейвлета, тем эффективнее выделение этой особенности на соответствующей масштабной строке вейвлетного спектра. Нетрудно видеть также, что для сильно сжатого вейвлета Хаара характерной хорошо выделяемой локальной особенностью является скачок сигнала, причем выделяется не только скачок функции, но и направление скачка.

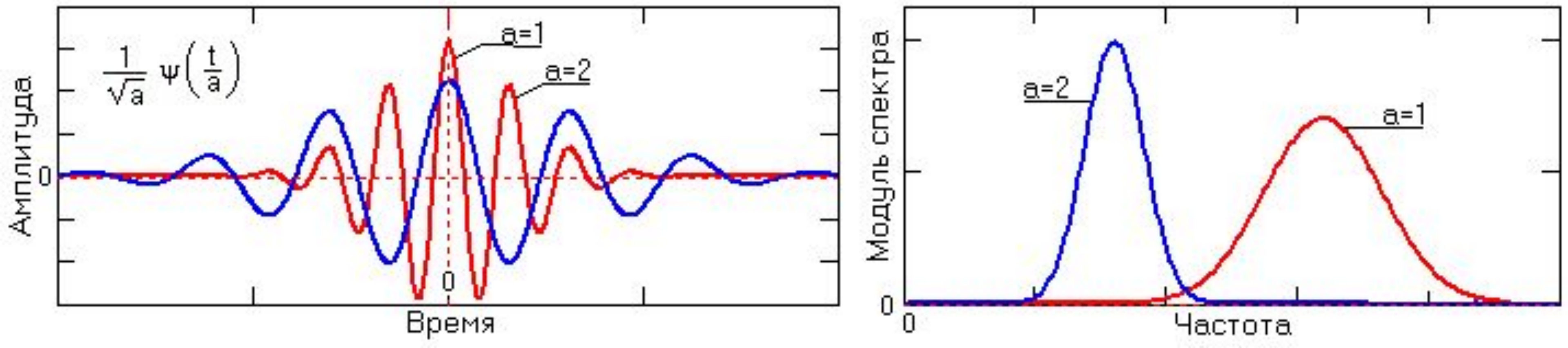

2
0
-2
-1000
-750
-500
-250
0
250
500
750
1000

- На рис. приведен пример графического отображения вейвлетной поверхности реального физического процесса. Вид поверхности определяет изменения во времени спектральных компонент различного масштаба и называется частотно-временным спектром.
- Поверхность изображается на рисунках, как правило, в виде изолиний или условными цветами. Для расширения диапазона масштабов может применяться логарифмическая шкала

ОСНОВЫ ВЕЙВЛЕТ - ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

- В основе вейвлет-преобразований, в общем случае, лежит использование двух непрерывных, взаимозависимых и интегрируемых по независимой переменной функций:
- Вейвлет-функции ψ(t), как psi-функции времени с нулевым значением интеграла и частотным фурье-образом Ψ(ω). Этой функцией, которую обычно и называют вейвлетом, выделяются детали сигнала и его локальные особенности.
- Масштабирующей функции φ(t), как временной скейлинг-функции phi с единичным значением интеграла, с помощью которой выполняется грубое приближение (аппроксимация) сигнала.

- В качестве анализирующих вейвлетов обычно выбираются функции, хорошо локализованные и во временной, и в частотной области. Пример временного и частотного образа функции приведен на рис.



Непрерывное вейвлет-преобразование (НВП, CWT-Continious Wavelet Transform)

- Допустим, что мы имеем функции s(t) с конечной энергией (нормой) в пространстве $L^2(R)$, определенные по всей действительной оси R(-∞, ∞). Для финитных сигналов с конечной энергией средние значения сигналов, как и любых других функций из пространства $L^2(R)$, должны стремиться к нулю на ±∞.
- Непрерывным вейвлет-преобразованием (или вейвлетным образом) функции $s(t) \in L^2(R)$ называют функцию двух переменных:

$$C(a,b) = \langle s(t), \psi(a,b,t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cdot\psi(a,b,t)\,dt \quad ,$$

$a, b \in R,\ a \neq 0.$

Понятие масштаба ВП

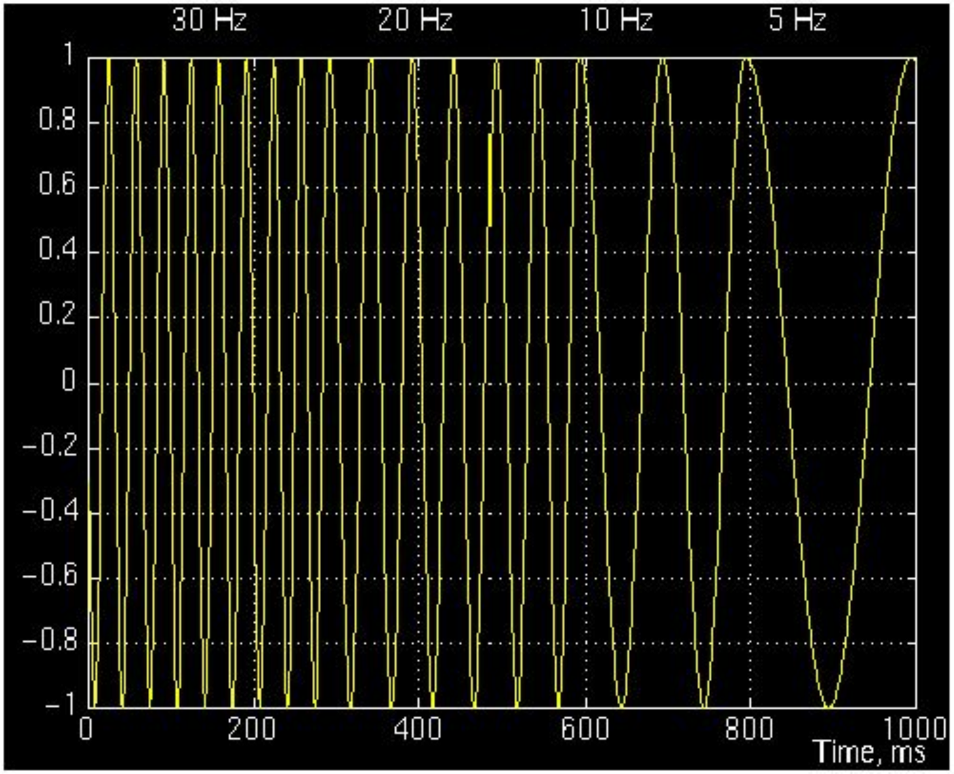
- имеет аналогию с масштабом географических карт. Большие значения масштаба соответствуют глобальному представлению сигнала, а низкие значения масштаба позволяют различить детали. В терминах частоты низкие частоты соответствуют глобальной информации о сигнале, а высокие частоты - детальной информации и особенностям, которые имеют малую протяженность, т.е. масштаб вейвлета, как единица шкалы частотно-временного представления сигналов, обратен частоте.
- Масштабирование, как математическая операция, расширяет или сжимает сигнал. Большие значения масштабов соответствуют расширениям сигнала, а малые значения - сжатым версиям. В определении вейвлета коэффициент масштаба a стоит в знаменателе. Соответственно, $a > 1$ расширяет сигнал, $a < 1$ сжимает его.

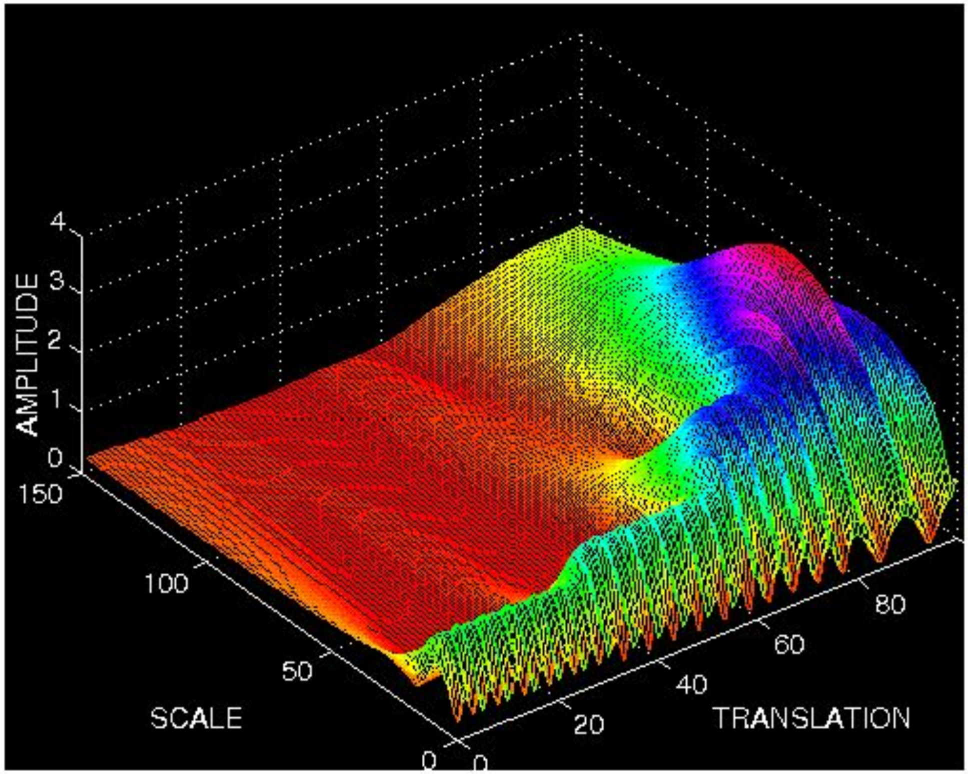
Процедура преобразования

- стартует с масштаба a=1 и продолжается при увеличивающихся значениях a, т.е. анализ начинается с высоких частот и проводится в сторону низких частот.
- Первое значение 'a' соответствует наиболее сжатому вейвлету. При увеличении значения 'a' вейвлет расширяется. Вейвлет помещается в начало сигнала (t=0), перемножается с сигналом, интегрируется на интервале своего задания и нормализуется на $1/\sqrt{a}$.
- При задании четных или нечетных функций вейвлетов результат вычисления C(a,b) помещается в точку (a=1, b=0) масштабно-временного спектра преобразования. Сдвиг b может рассматриваться как время с момента t=0, при этом координатная ось b, по существу, повторяет временную ось сигнала.
- Для полного включения в обработку всех точек входного сигнала требуется задание начальных (и конечных) условий преобразования (определенных значений входного сигнала при t<0 и t>tmax на полуширину окна вейвлета). При одностороннем задании вейвлетов результат относится, как правило, к временному положению средней точки окна вейвлета.

- Затем вейвлет масштаб a=1 сдвигается вправо на значение b и процедура повторяется. Получаем значение, соответствующее t=b в строке a=1 на частотно-временном плане. Процедура повторяется до тех пор, пока вейвлет не достигнет конца сигнала. Таким образом получаем строку точек на масштабно-временном плане для масштаба a=1.
- Для вычисления следующей масштабной строки значение *a* увеличивается на некоторое значение. При НВП в аналитической форме $\Delta b \rightarrow 0$ и $\Delta a \rightarrow 0$.
- При выполнении преобразования в компьютере вычисляется аппроксимация с увеличением обоих параметров с определенным шагом. Тем самым мы осуществляем дискретизацию масштабно-временной плоскости.

- Начальное значение масштабного коэффициента может быть и меньше 1. В принципе, для детализации самых высоких частот сигнала минимальных размер окна вейвлета не должен превышать периода самой высокочастотной гармоники. Если в сигнале присутствуют спектральные компоненты, соответствующие текущему значению *a*, то интеграл произведения вейвлета с сигналом в интервале, где эта спектральная компонента присутствует, дает относительно большое значение. В противном случае - произведение мало или равно нулю, т.к. среднее значение вейвлетной функции равно нулю. С увеличением масштаба (ширины окна) вейвлета преобразование выделяет все более низкие частоты.


30 Hz
20 Hz
10 Hz
5 Hz
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
0
200
400
600
800
1000
Time, ms

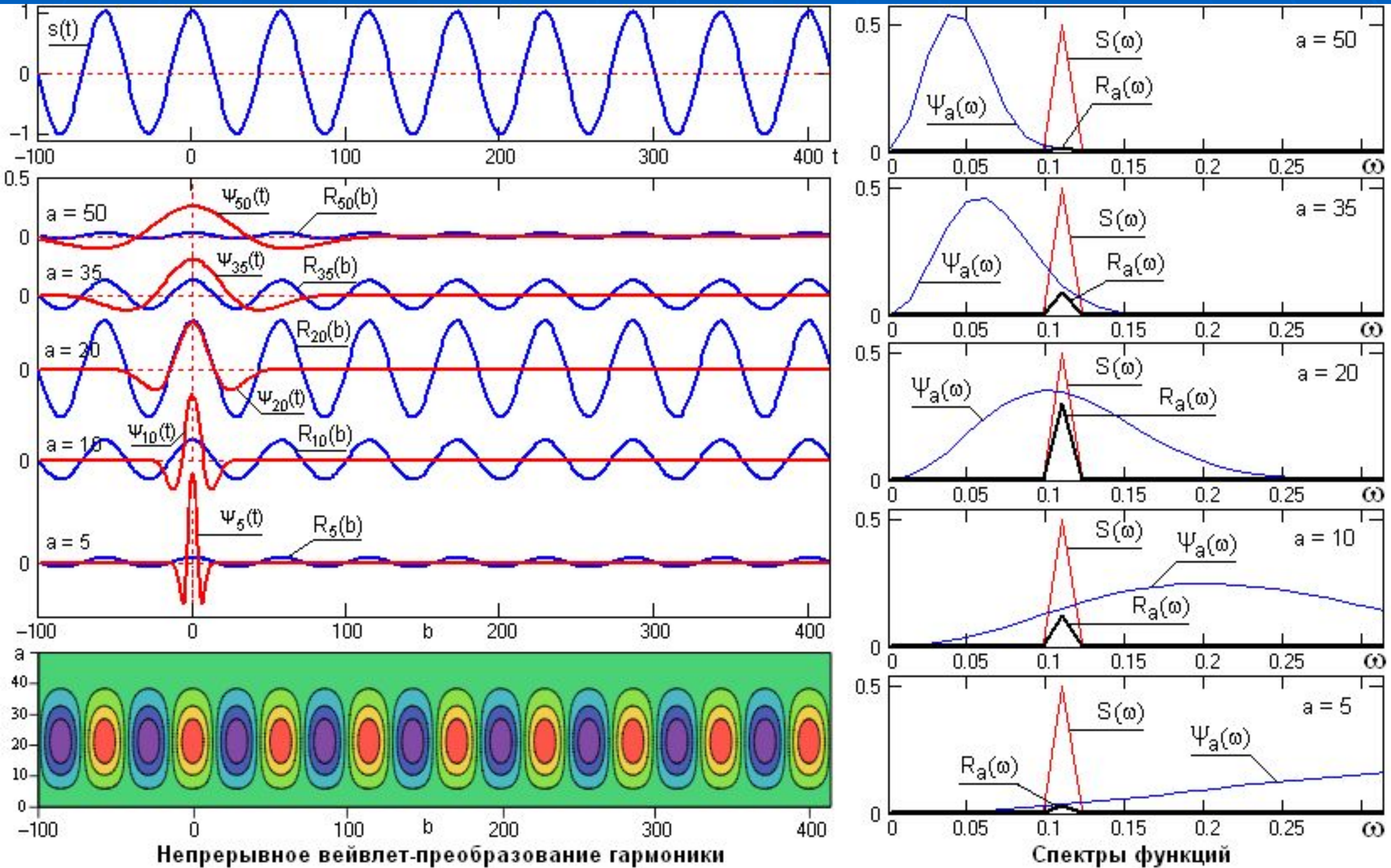

AMPLITUDE
4
3
2
1
0
150
100
50
0
SCALE
0
20
40
60
80
TRANSLATION

Обратное преобразование

- Так как форма базисных функций ψ(a,b,t) зафиксирована, то вся информация о сигнале в S(t) переносится на значения функции C(a,b). Точность обратного интегрального вейвлет-преобразования зависит от выбора базисного вейвлета и способа построения базиса, т.е. от значений базисных параметров *a*, *b*. Для практических целей непрерывного преобразования часто бывает вполне достаточна устойчивость и "приблизительность" ортогональности системы разложения функций. Под устойчивостью понимается достаточно точная реконструкция произвольных сигналов. Для ортонормированных вейвлетов обратное вейвлет-преобразование записывается с помощью того же базиса, что и прямое:

$$s(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} C(a,b) \cdot \psi(a,b,t) \, da \; db$$

Обратное преобразование



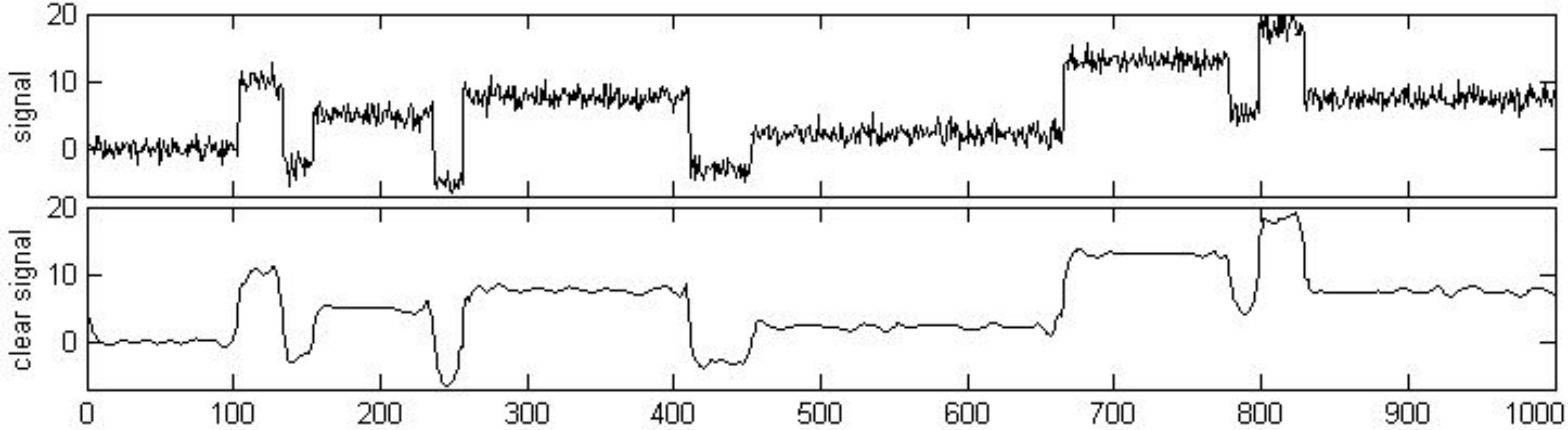
ВЕЙВЛЕТНАЯ ОЧИСТКА ОТ ШУМОВ И СЖАТИЕ СИГНАЛОВ

- Типовой метод подавления шумов – удаление высокочастотных составляющих из спектра сигнала. Применительно к вейвлетным разложениям это может быть реализовано непосредственно удалением детализирующих коэффициентов высокочастотных уровней.
- Вейвлеты имеют в этом отношении более широкие возможности. Шумовые компоненты, и особенно большие случайные выбросы значений сигналов, можно также рассматривать в виде множеств локальных особенностей сигналов. Задавая некоторый порог для их уровня и срезая по нему детализирующие коэффициенты, можно не только уменьшать уровень шумов, но и устанавливать пороговые ограничения на нескольких уровнях разложения с учетом конкретных характеристик шумов и сигналов для различных типов вейвлетов. Это позволяет создавать адаптивные системы очистки сигналов от шумов в зависимости от их особенностей.

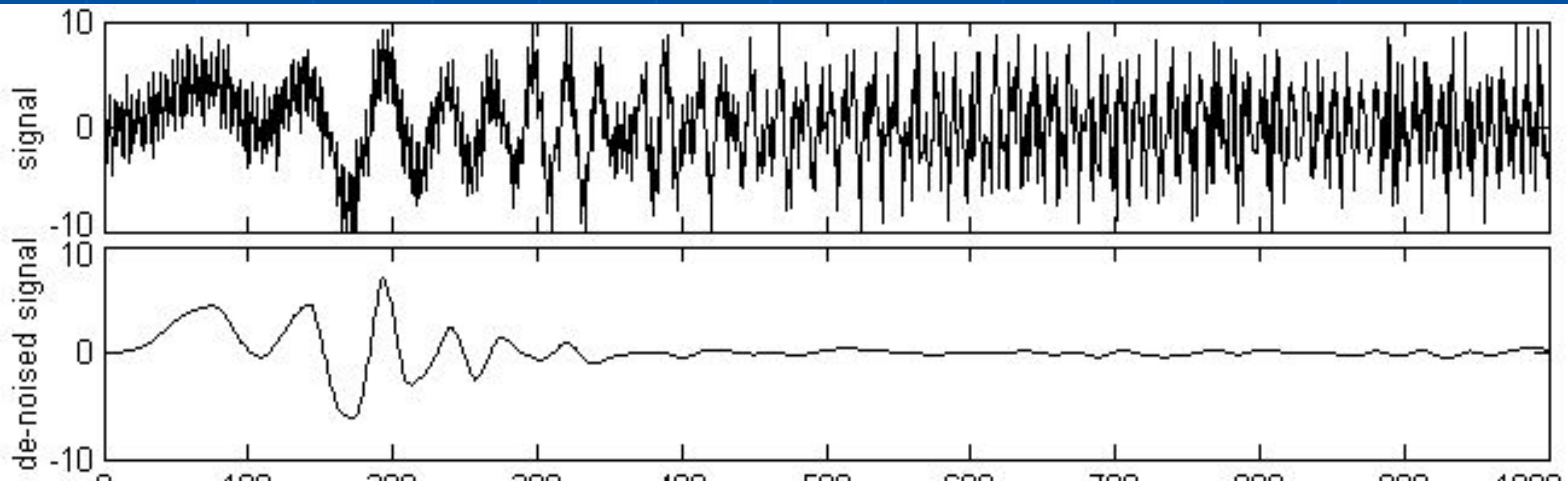
- Операция сжатия сигналов с удалением малозначимых значений вейвлет - коэффициентов также выполняется на основе определенных пороговых ограничений их значений, и во многом практически тождественна операциям удаления шумов

- Модель зашумленного сигнала обычно принимается аддитивной: s(n) = f(n)+k·e(n) с равномерным шагом по аргументу n, где f(n) – полезная информационная составляющая, e(n) – шумовой сигнал, например, белый шум определенного уровня со средним нулевым значением. Процедура удаления шума выполняется с использованием ортогональных вейвлетов и включает в себя следующие операции:
- - ***Вейвлет-разложение сигнала*** s(n) до уровня N. Значение уровня N определяется частотным спектром информационной части f(n) сигнала, которую желательно оставлять в рядах аппроксимационных коэффициентов. Тип и порядок вейвлета может существенно влиять на качество очистки сигнала от шума в зависимости как от формы сигналов f(n), так и от корреляционных характеристик шумов.
- - ***Задание типа и пороговых уровней*** очистки по известным априорным данным о характере шумов или по определенным критериям шумов во входном сигнале. Пороговые уровни очистки могут быть гибкими (в зависимости от номера уровня разложения) или жесткими (глобальными).
- - ***Модификация коэффициентов детализации*** вейвлет-разложения в соответствии с установленными условиями очистки.
- ***- Восстановление сигнала*** на основе коэффициентов аппроксимации и модифицированных детализационных коэффициентов.

Пример

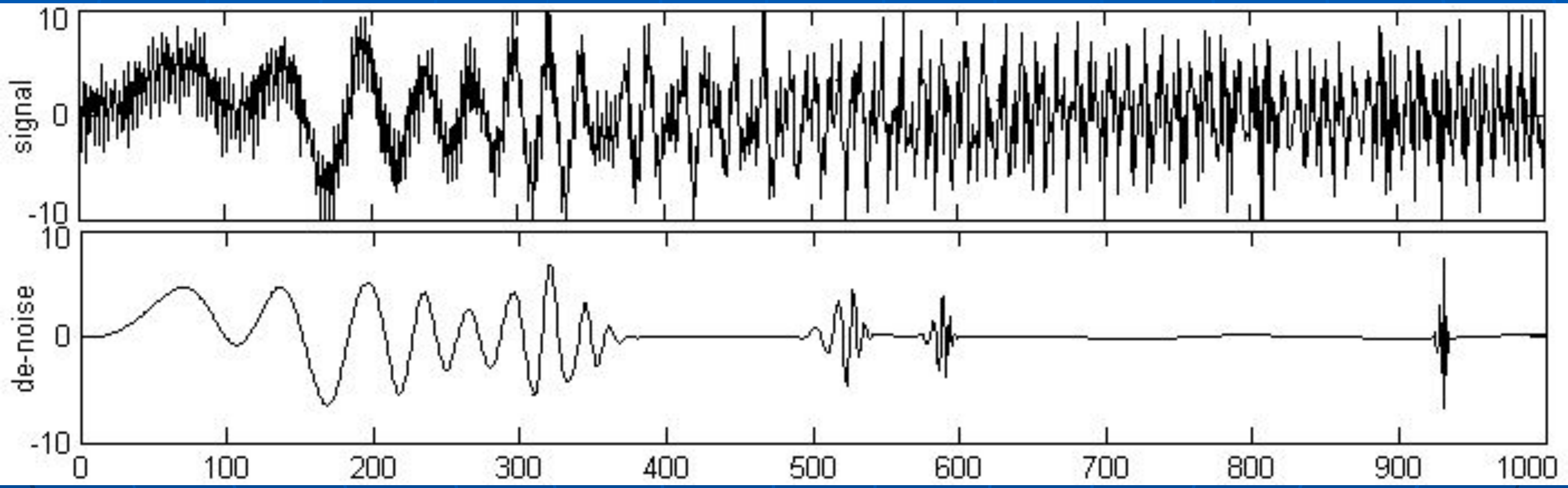


signal
clear signal
20
10
0
20
10
0
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

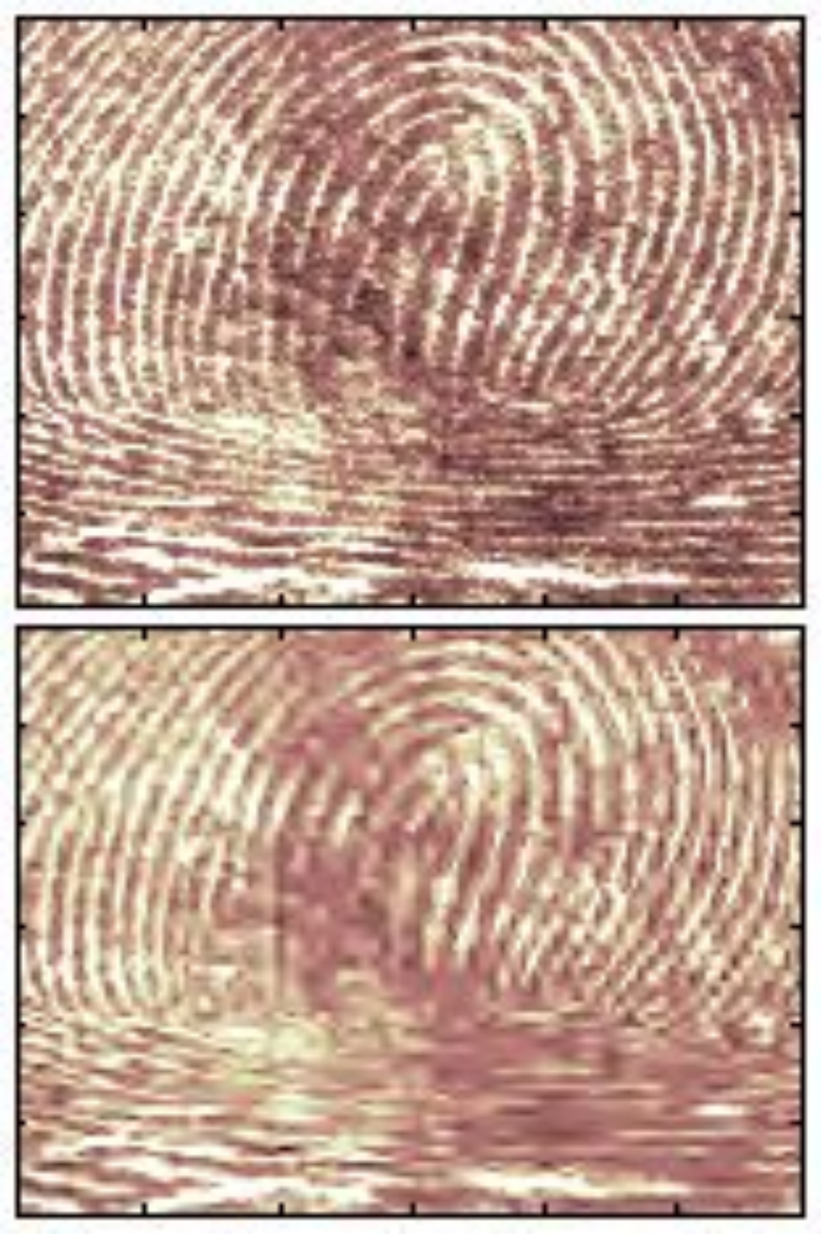


signal
de-noised signal
10
0
-10
10
0
-10

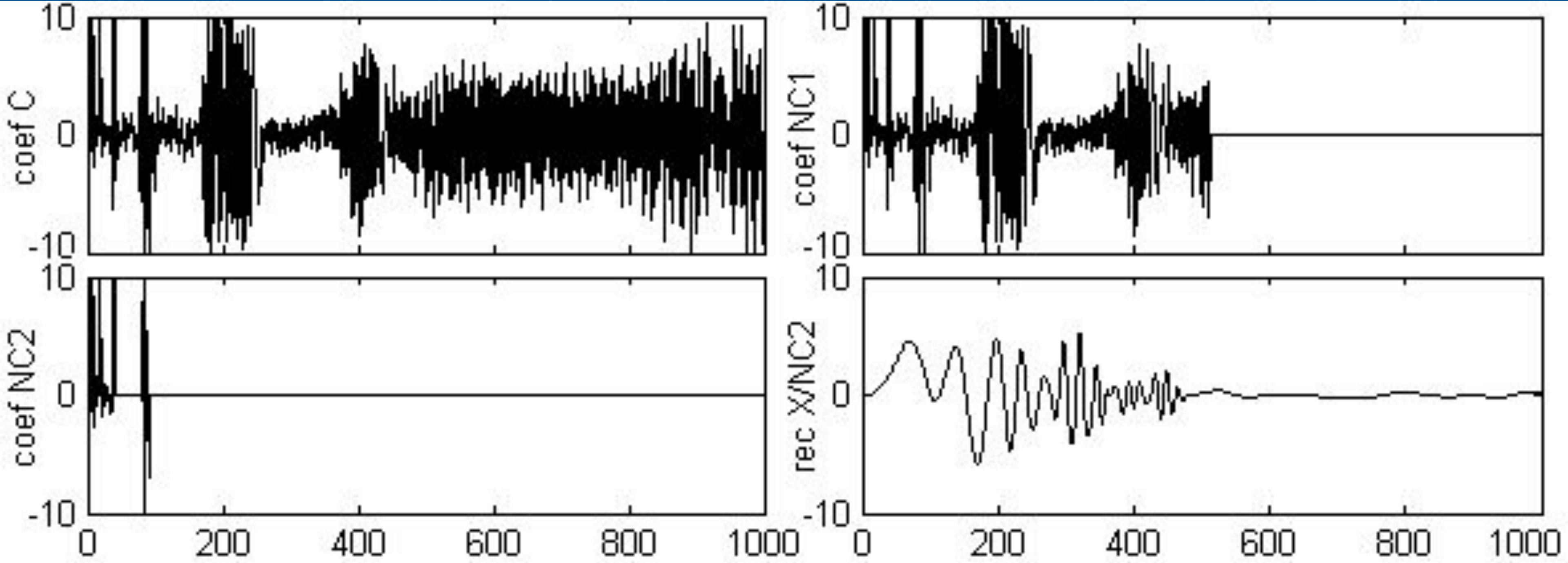
Пример удаления шумов с настройкой локальных порогов уровней



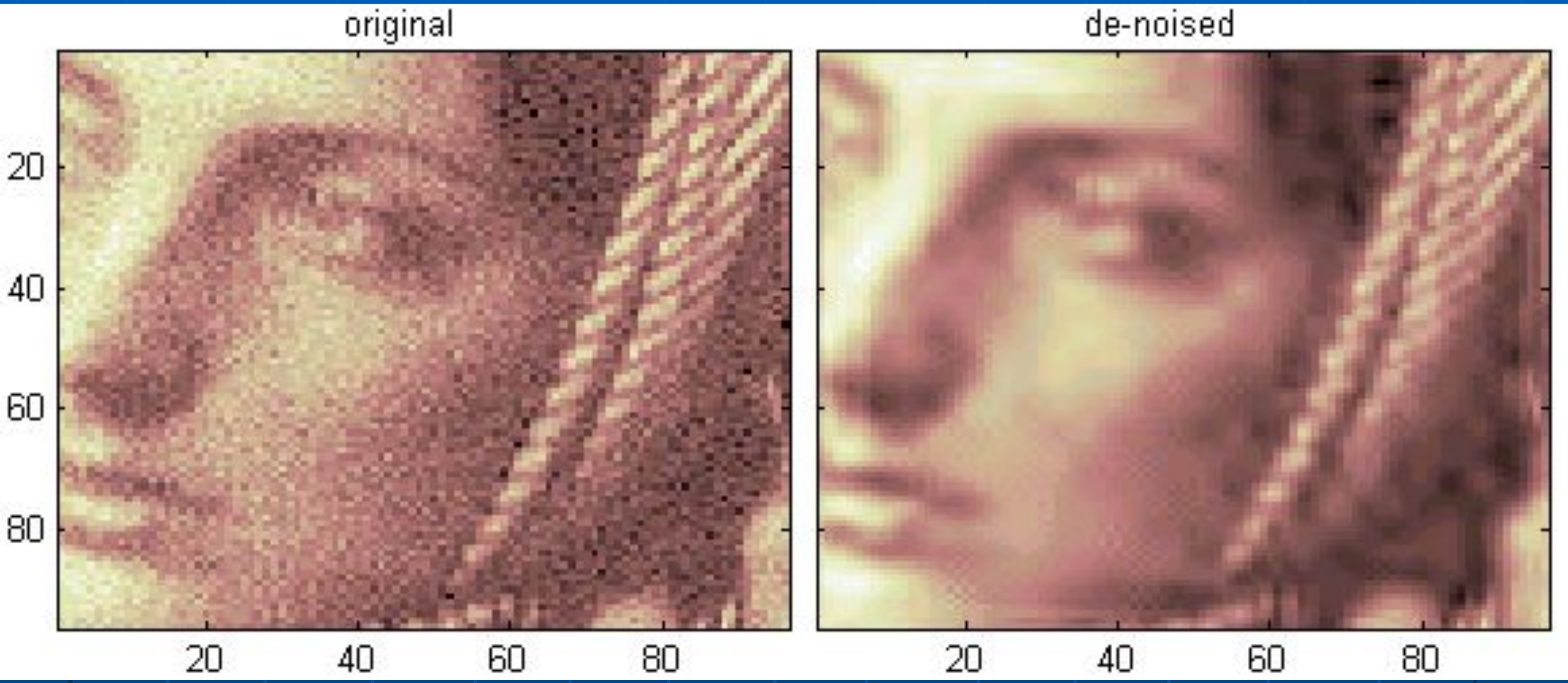
- На рис. отпечаток пальца внизу сжат в десятки раз, но разрешающая способность по основным линиям дактилоскопии при этом практически не изменилась. Сжатие изображений в настоящее время широко применяется при хранении огромных объемов технической информации.

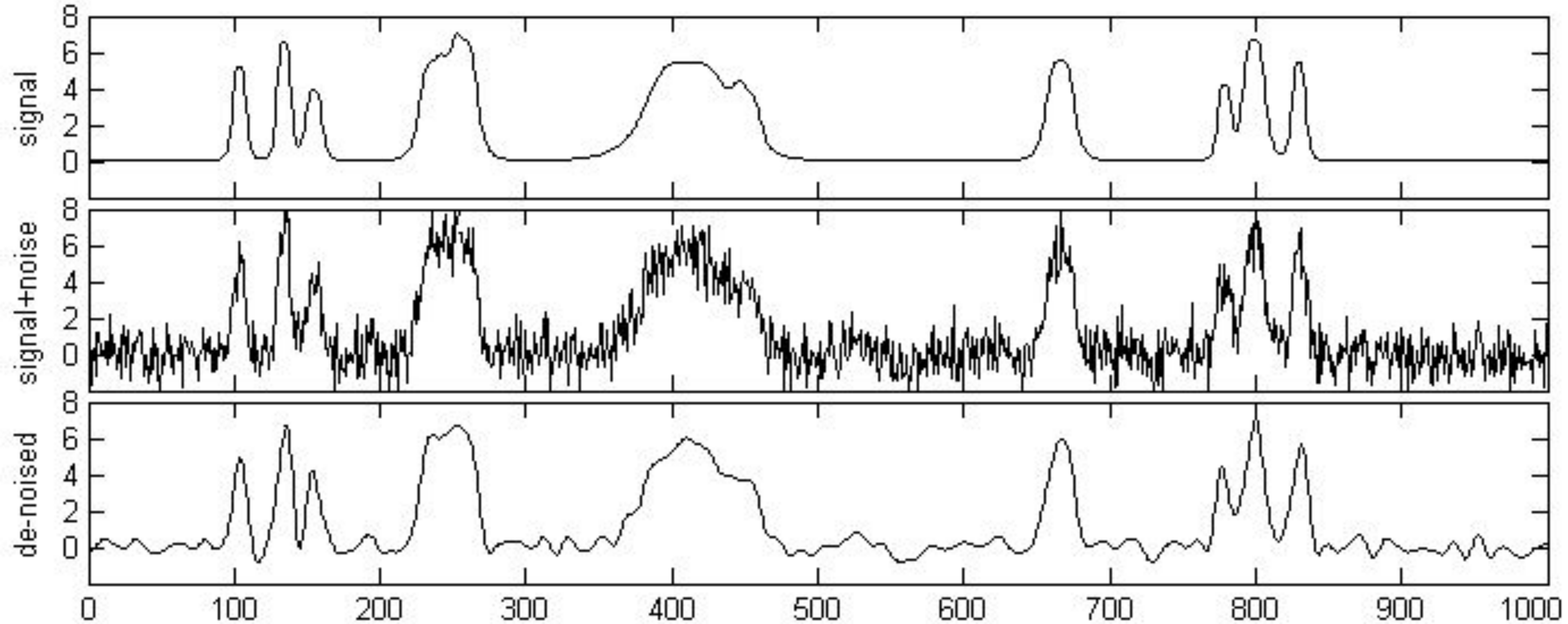


Изменение вейвлет-спектра



Удаление шумов





signal
signal+noise
de-noised
8
6
4
2
0
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

ОЧИСТКА СИГНАЛОВ ОТ ШУМА В ПАКЕТЕ GUI