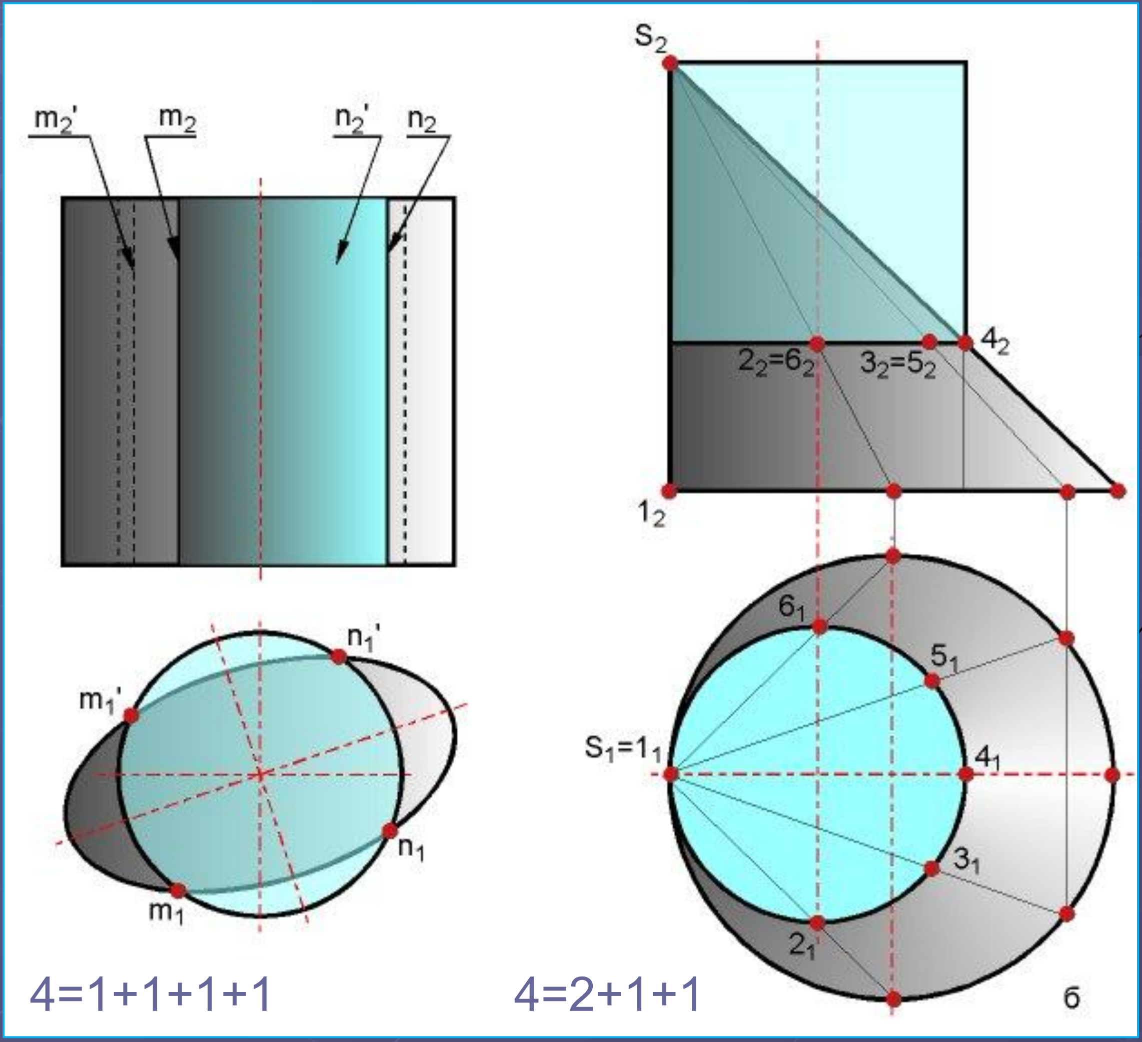
Особые случаи пересечения

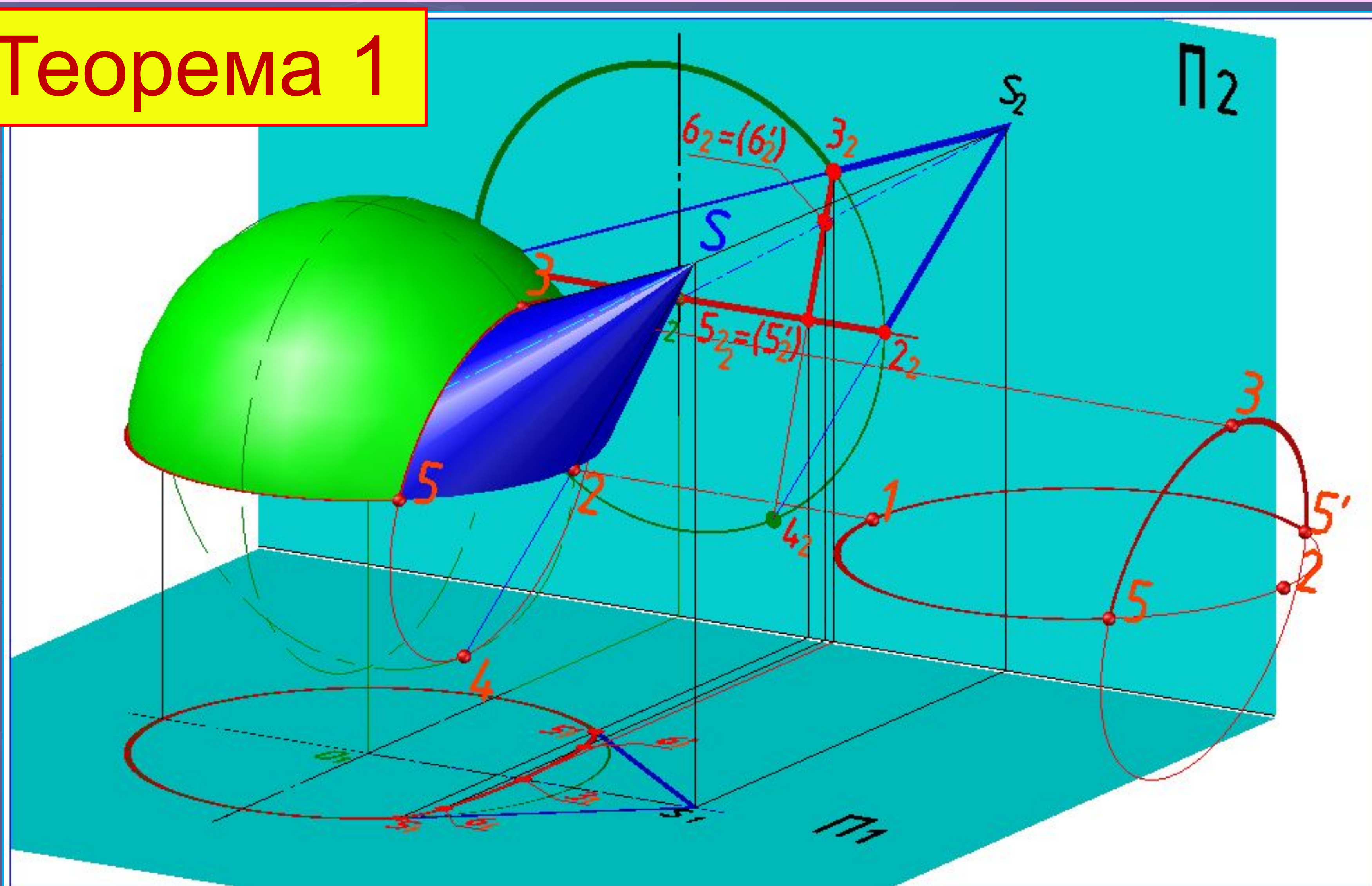
Две поверхности 2-ого порядка пересекаются в общем случае по кривой 4-ого порядка (2х2)

В особых случаях линия пересечения распадается на 2 и более, но порядок при этом не меняется.

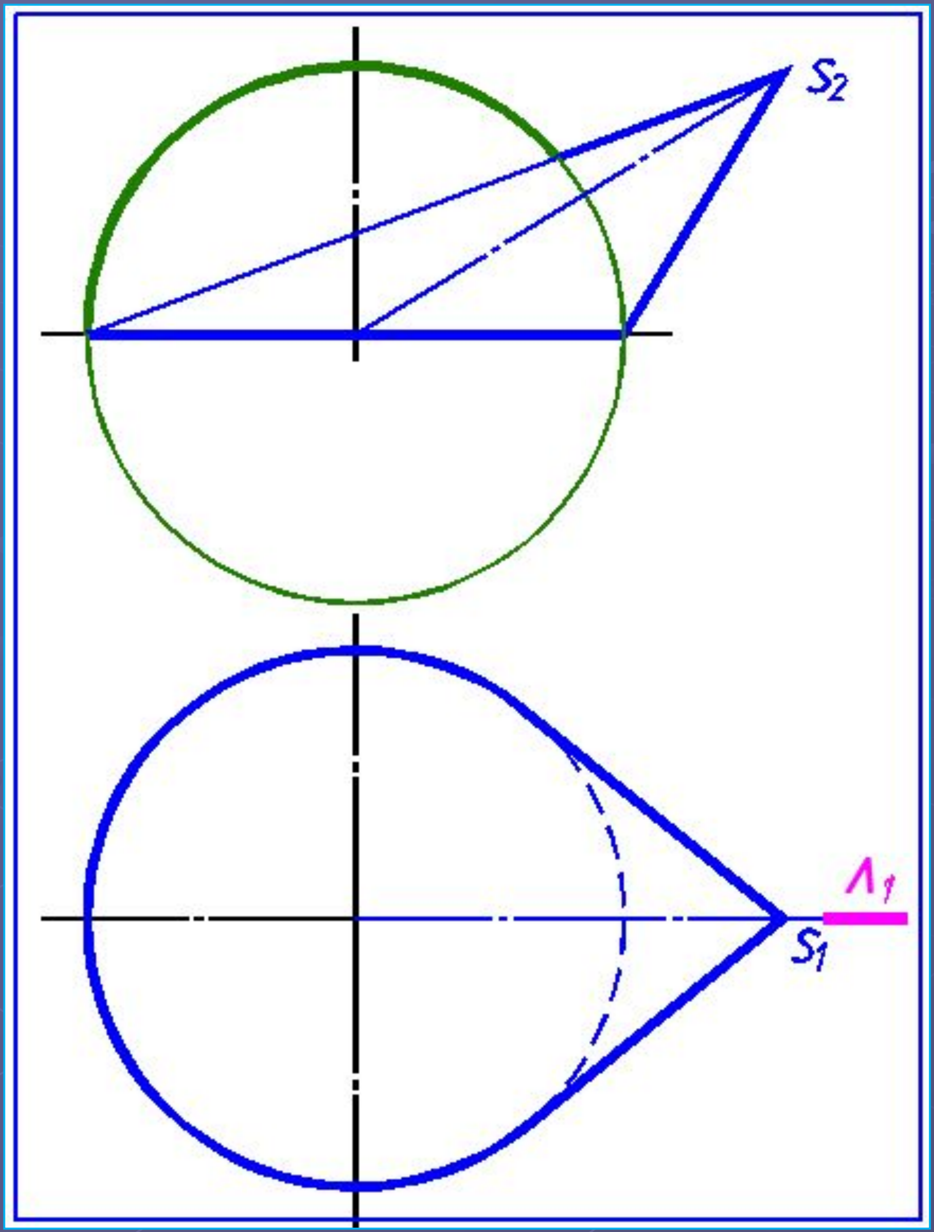


Если две поверхности 2-ого порядка пересекаются по одной плоской кривой, то они пересекаются и еще по одной кривой, которая тоже является плоской.

Теорема 1



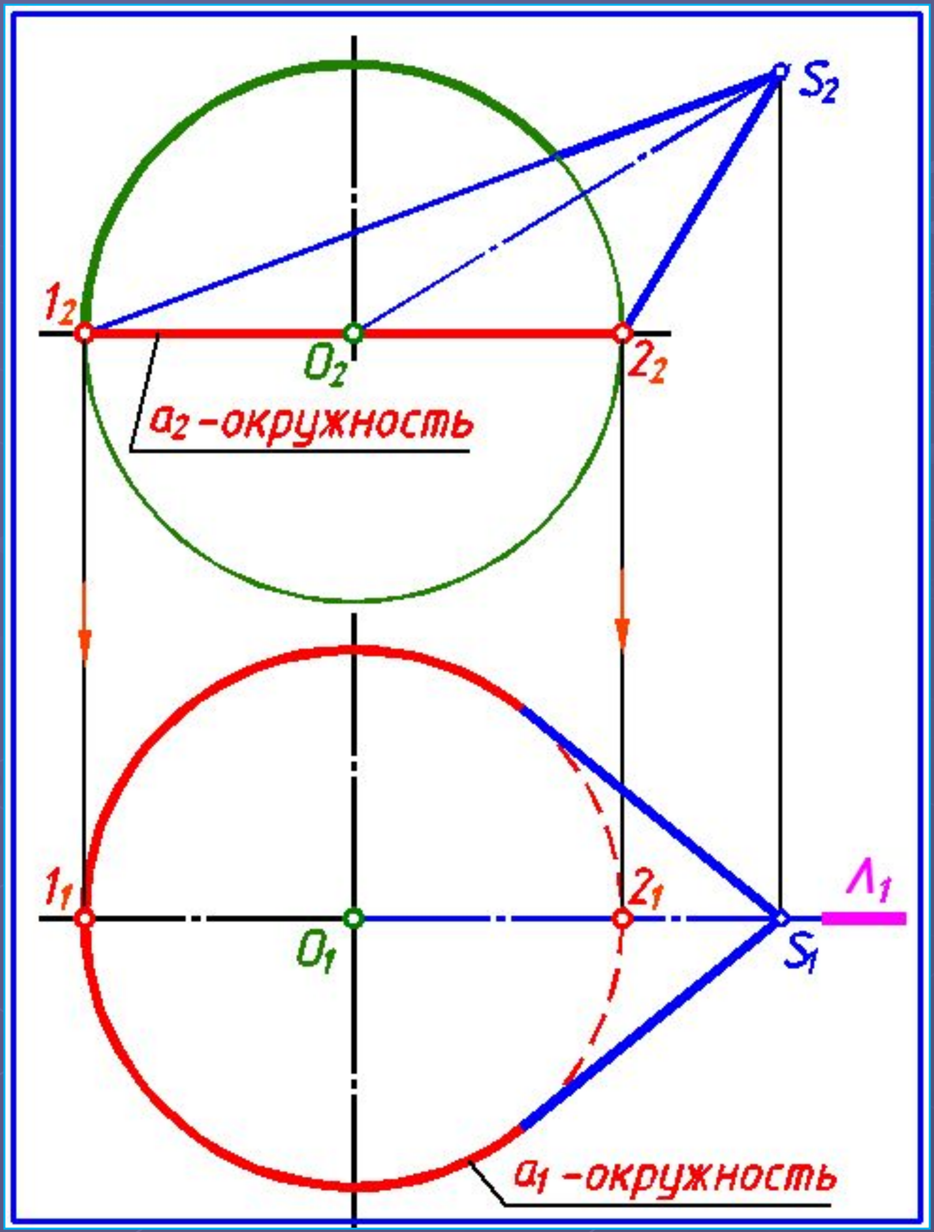
Теорема 1



Задача. Построить линию пересечения полусферы и конуса.

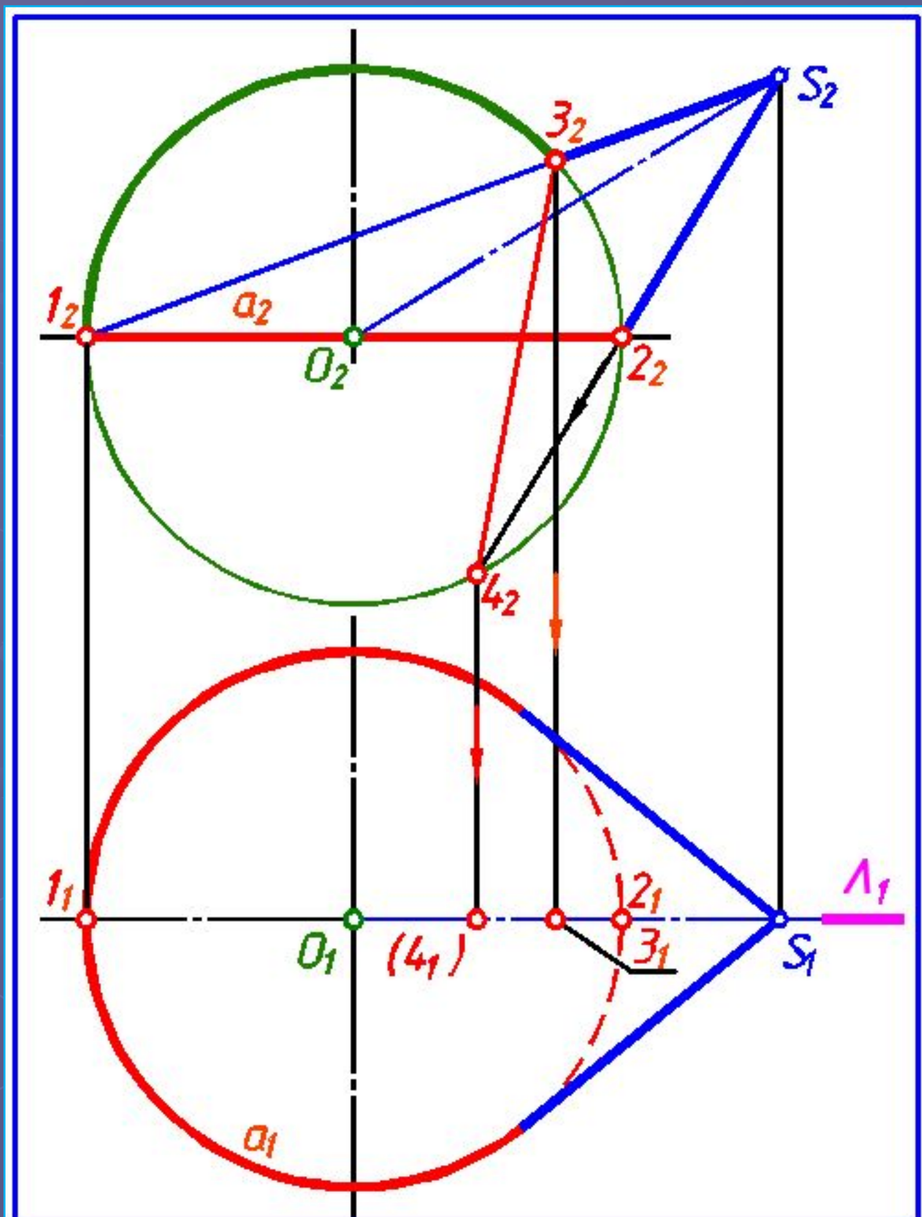
1. Заданные поверхности 2-го порядка имеют общее основание (окружность). Имеется общая плоскость симметрии ***Λ***.

Теорема 1



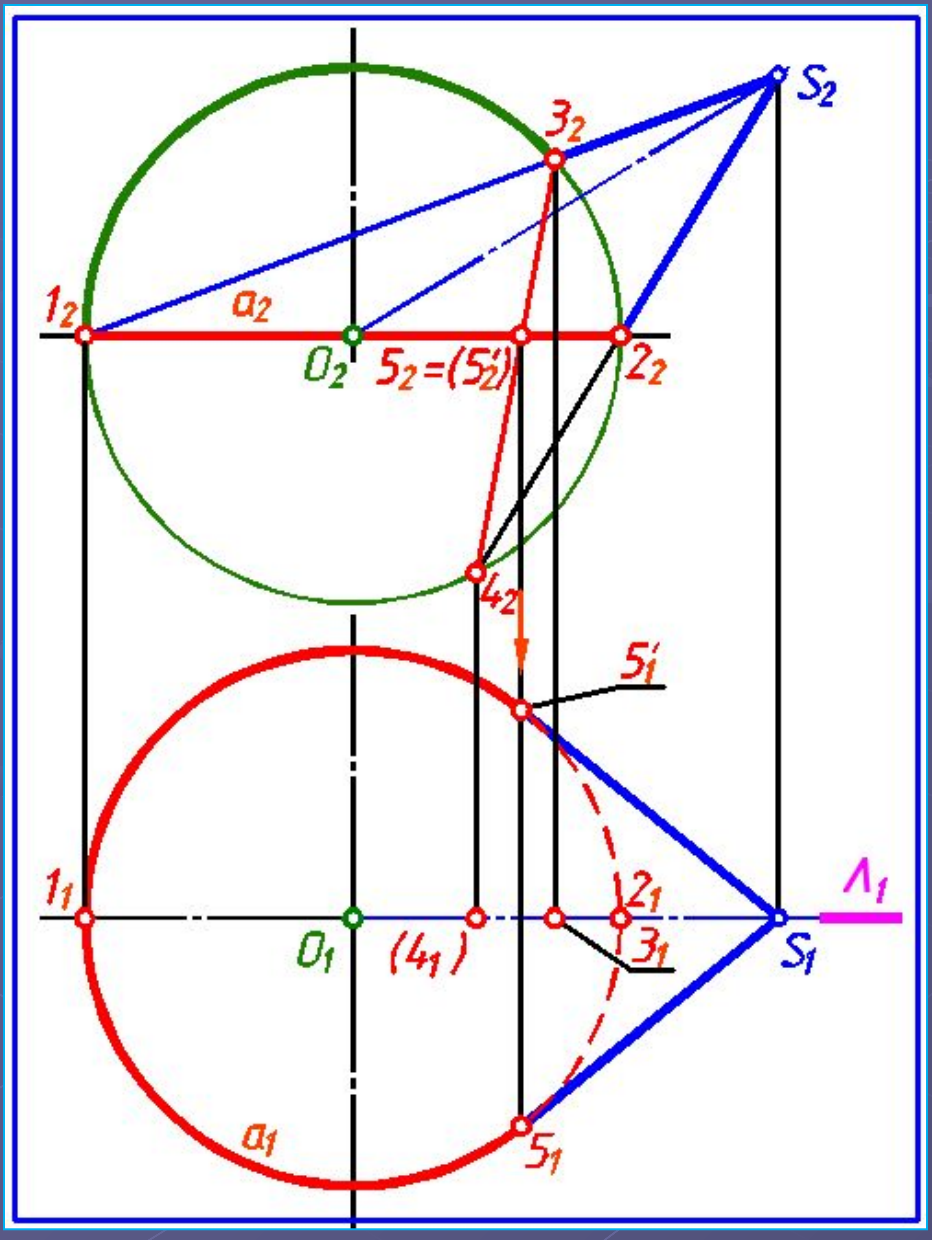
2. Линия пересечения распалась на <u>две замкнутые плоские кривые линии:</u> окружность ***1-2*** и часть окружности ***5-6-3-6'-5'***, которая проецируется на $П_1$ в часть эллипса.

Теорема 1



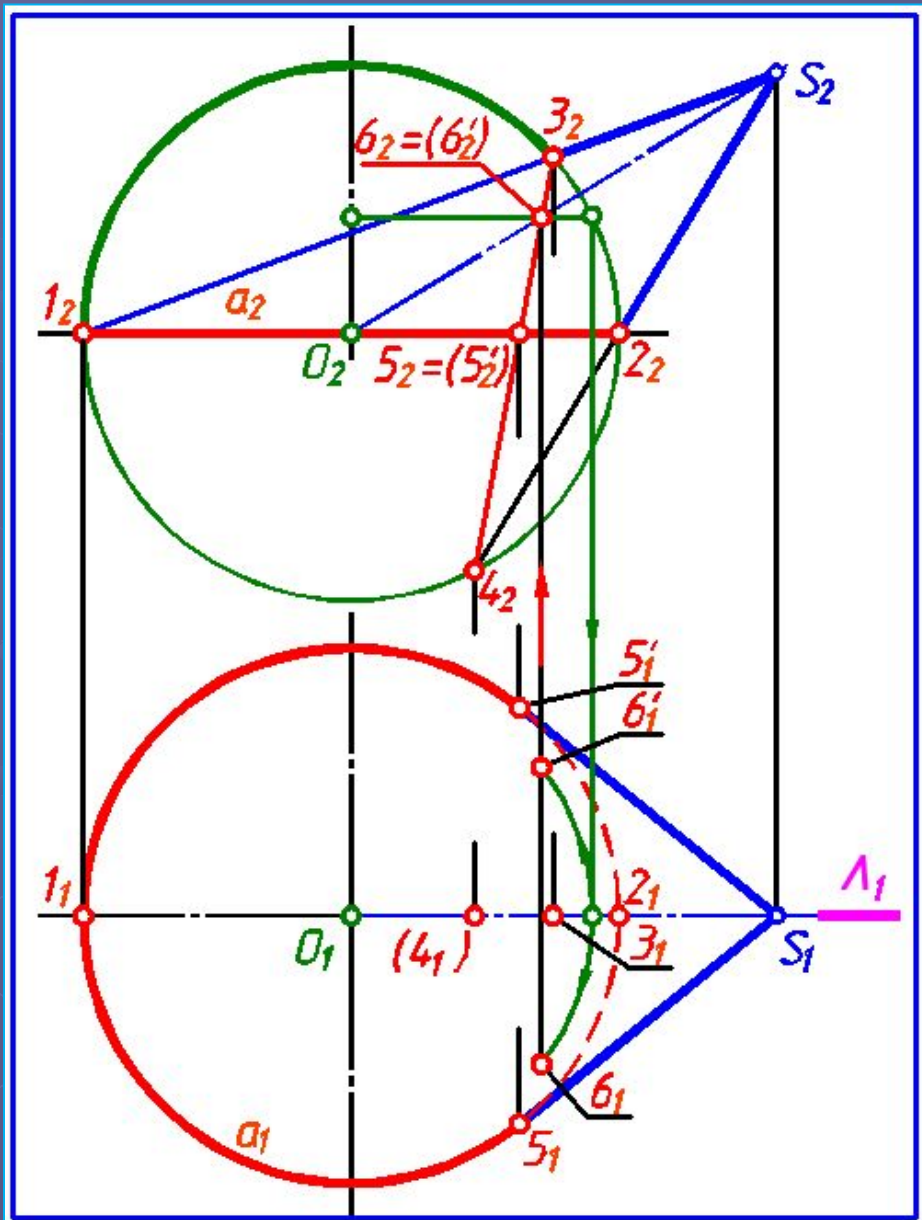
3. Опорные точки **3** и **4** (очерковые на $П_2$) определены с помощью общей плоскости симметрии **Λ** *(по правилу очерк - ось).*

Теорема 1



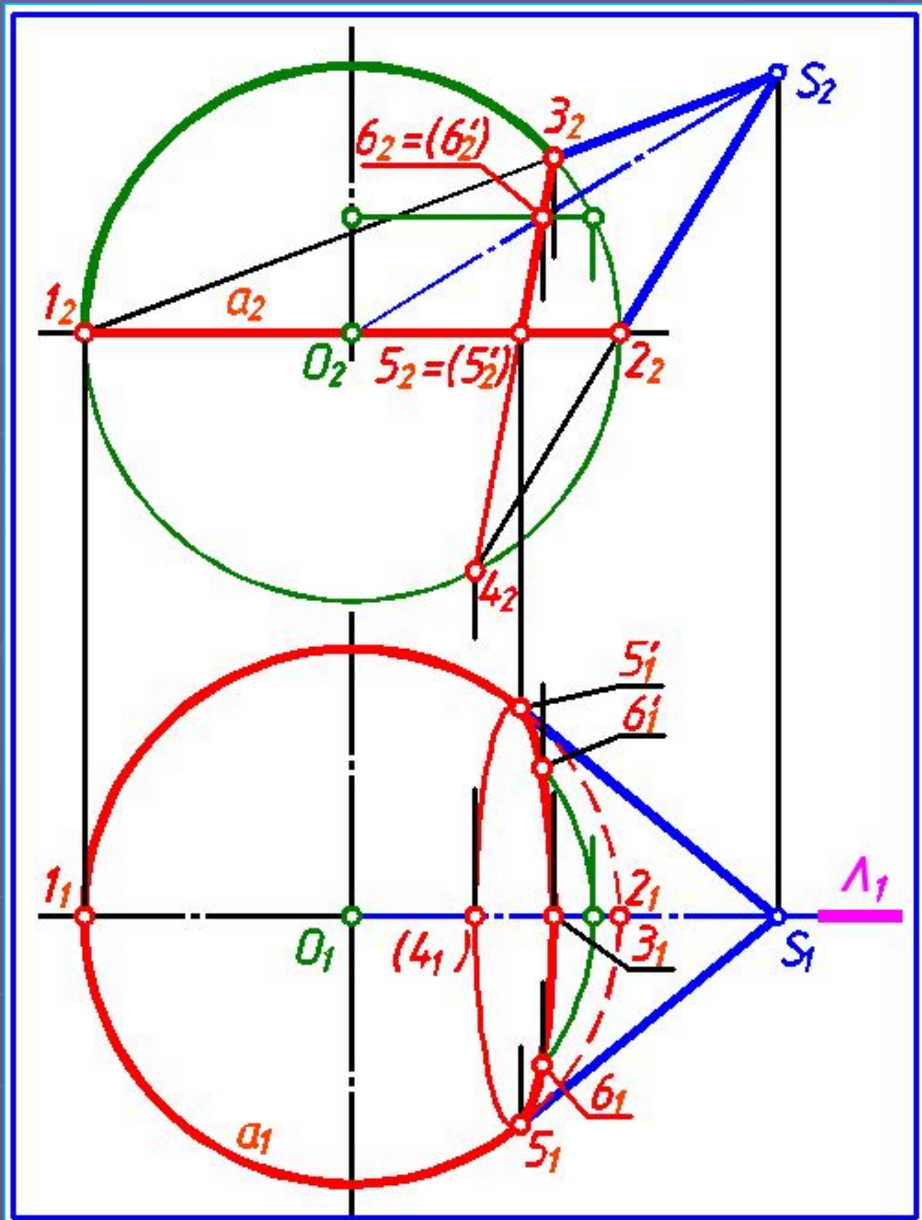
Опорные точки **5** и **5'** (очерковые на $П_1$) определены по принадлежности окружности ***a*.**

Теорема 1



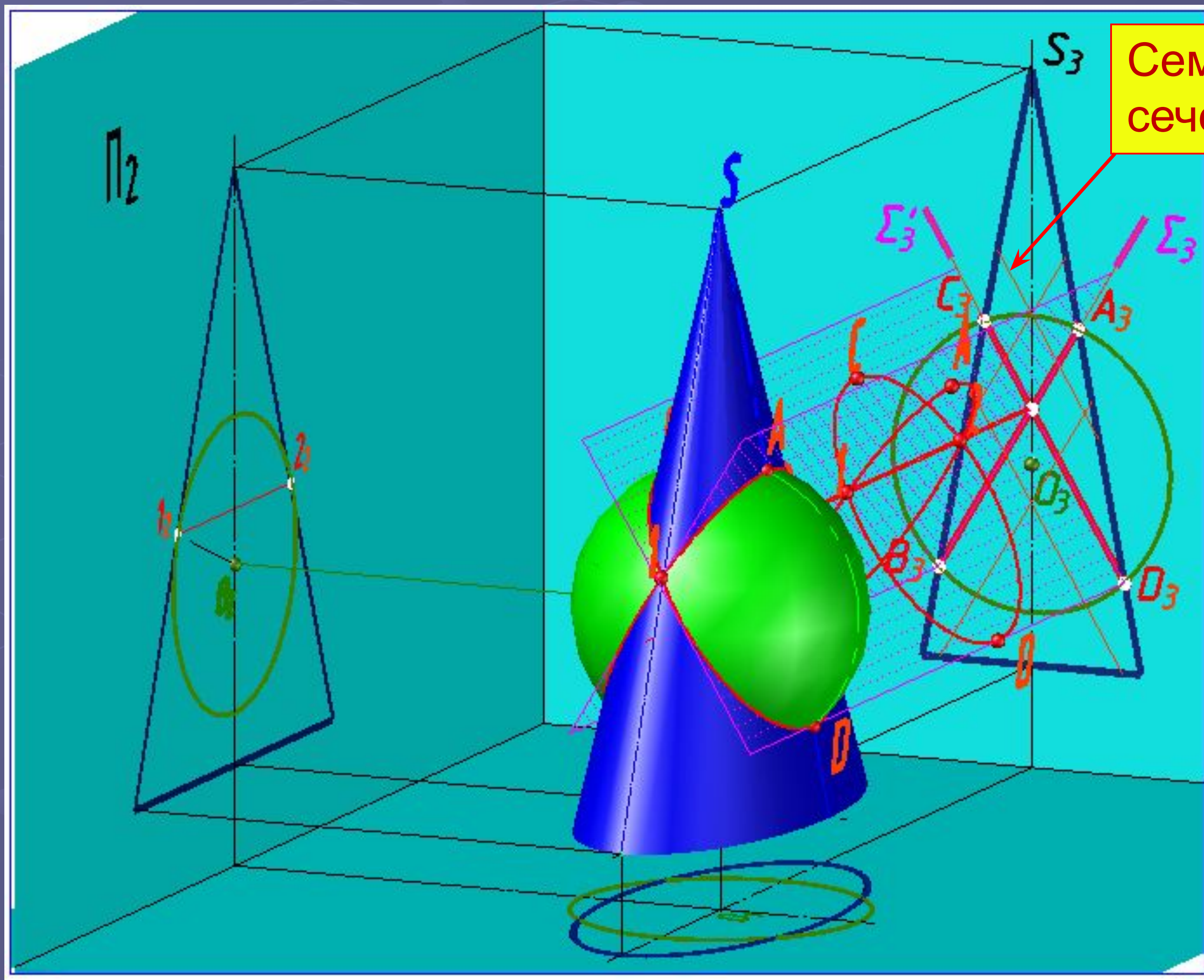
4. Промежуточные точки **6** и **6'** (для построения эллипса) определены по принадлежности полусфере *(радиус окружности – от оси до очерка).*

Теорема 1



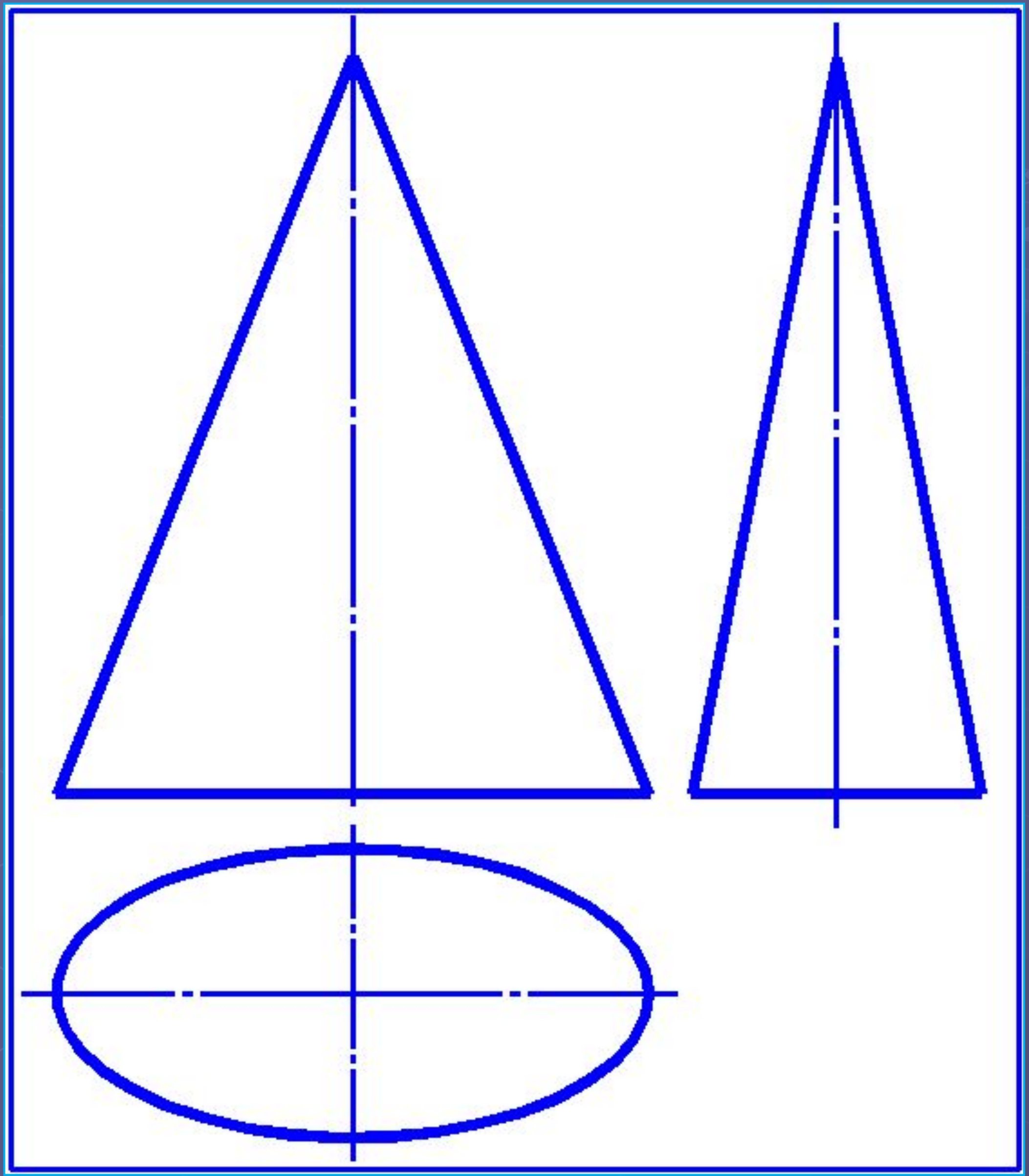
5. Найденные точки **5, 6, 3, 6',5'** на $П_1$ соединяем плавной кривой.
На $П_2$ кривые проецируются в отрезки [**1-2**] и [**3-5**].
Так как задана полусфера, нижнюю часть эллипса (точка **4**) обводить не следует.

Если какая-нибудь поверхность 2-ого порядка пересекается со сферой по одной окружности, то она пересекается с ней еще раз по другой окружности.



Семейство круговых сечений

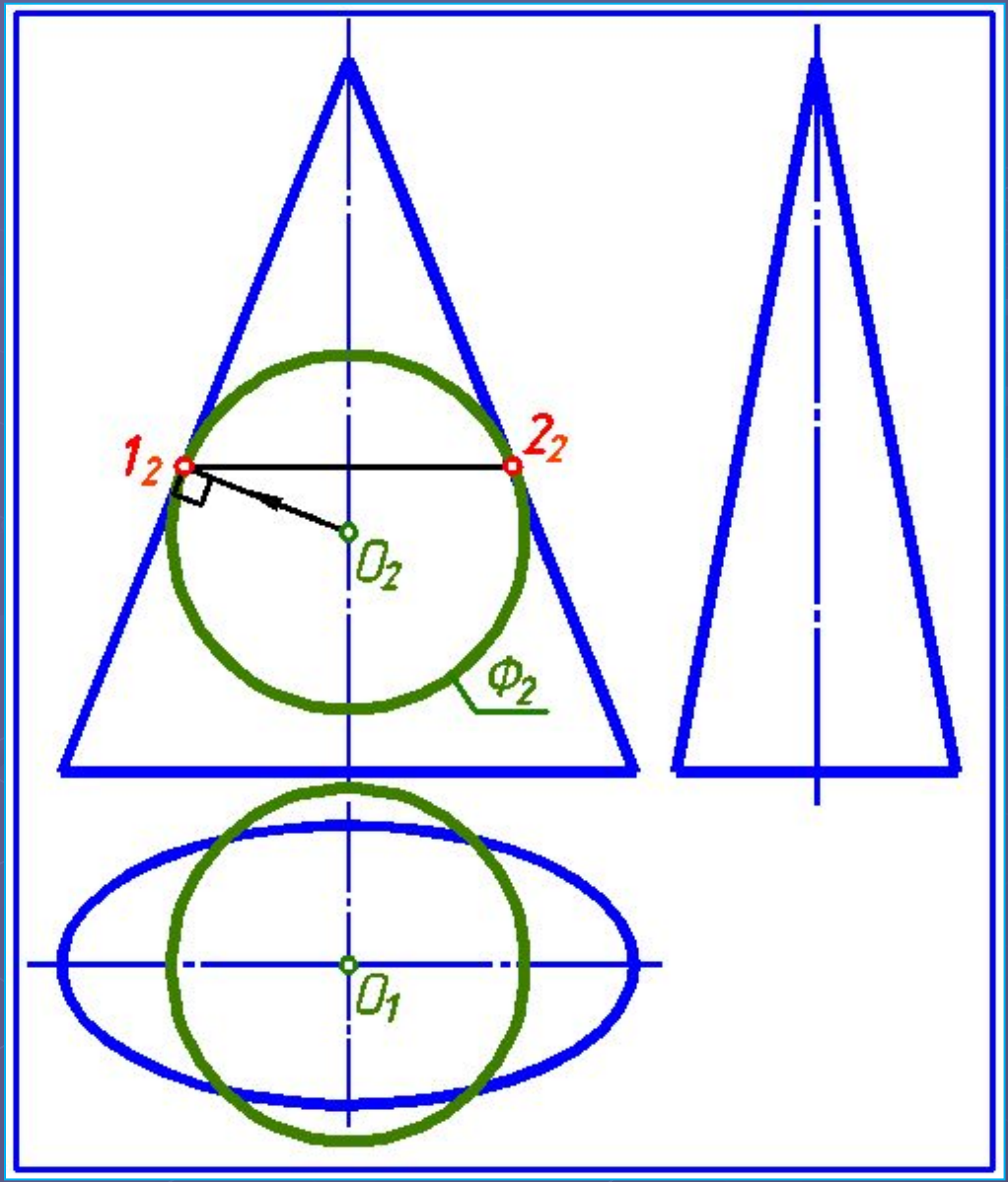
Следствие теоремы 1



Задача. Найти семейство круговых сечений эллиптического конуса.

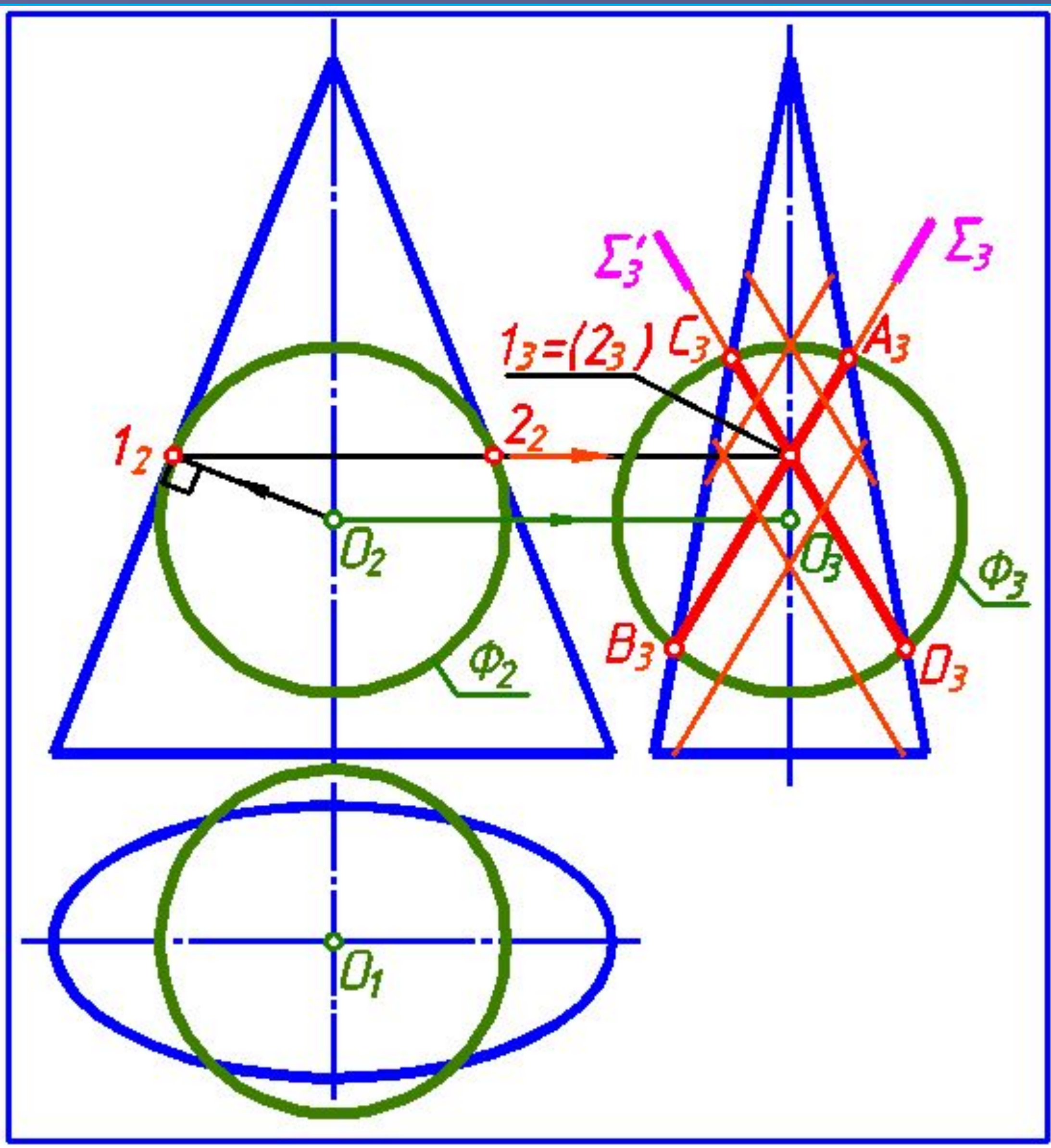
Сфера, имеющая двойное касание с поверхностью второго порядка, может быть использована для нахождения круговых сечений тех поверхностей второго порядка, которые их имеют.

Следствие теоремы 1



Проведем сферу с центром O на оси конуса и радиусом, равным длине отрезка |1,O|. Эта сфера будет касаться двух образующих конуса в точках 1 и 2.

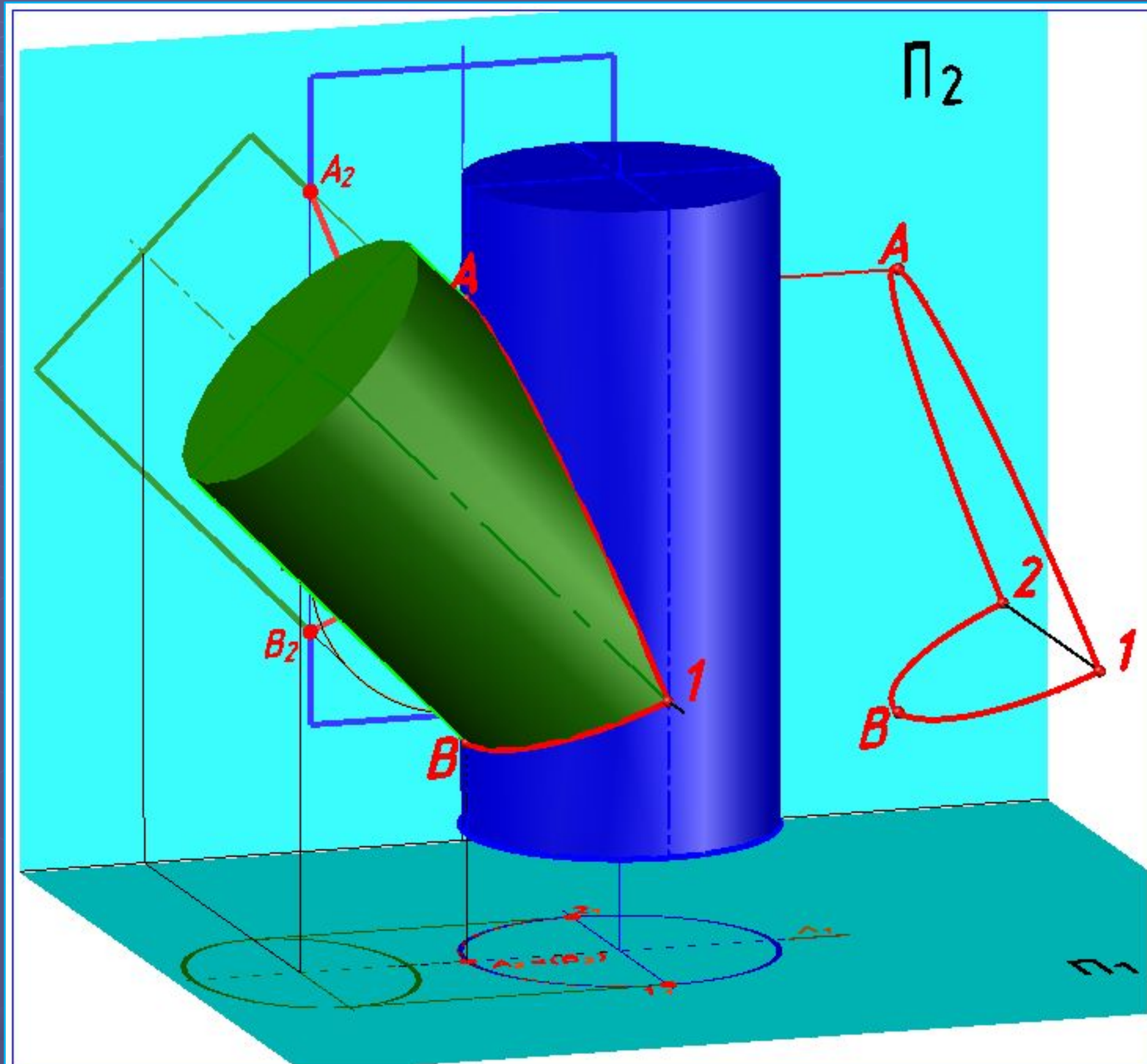
Следствие теоремы 1



Линия пересечения со сферой распадается на две окружности ***AB*** и ***CD***, расположенные в профильно проецирующих плоскостях ***Σ*** и ***Σ'***. Полученные окружности определяют два семейства круговых сечений эллиптического конуса.

Теорема 2 (о двойном касании)

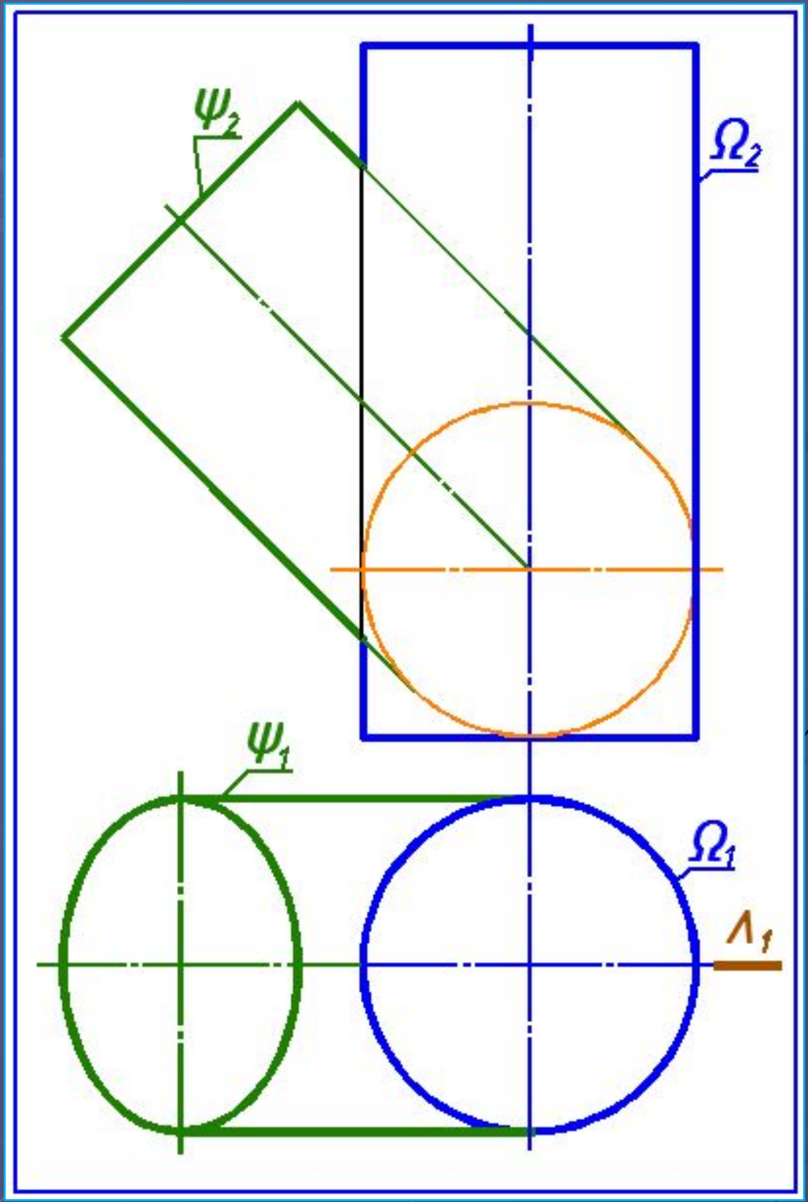
Если две поверхности второго порядка имеют касание в двух точках, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки касания (*1* и *2*).



Теорема 2 (о двойном касании)

Задача. Построить линию пересечения цилиндров *Ψ* и *Ω*.

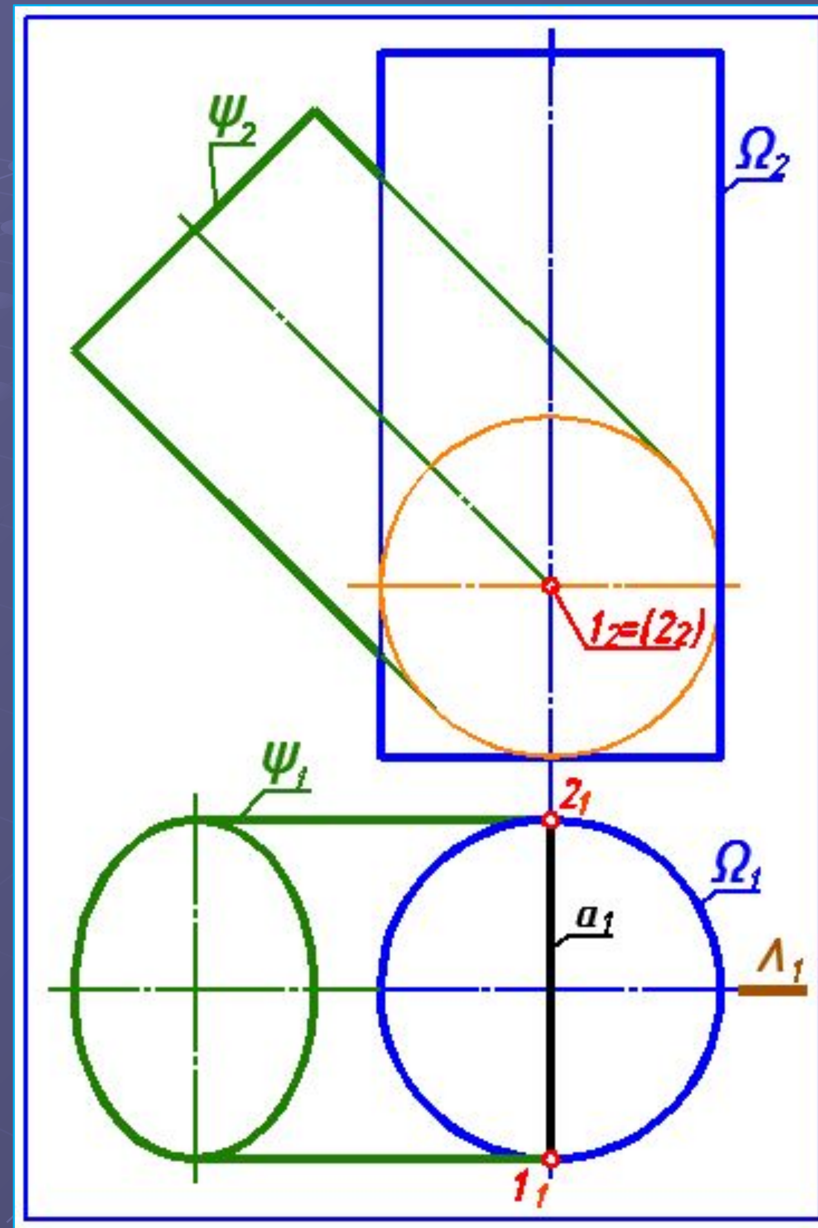
1. Заданы две поверхности вращения, имеющие точки касания. Имеется общая плоскость симметрии *Λ*.



Теорема 2 (о двойном касании)

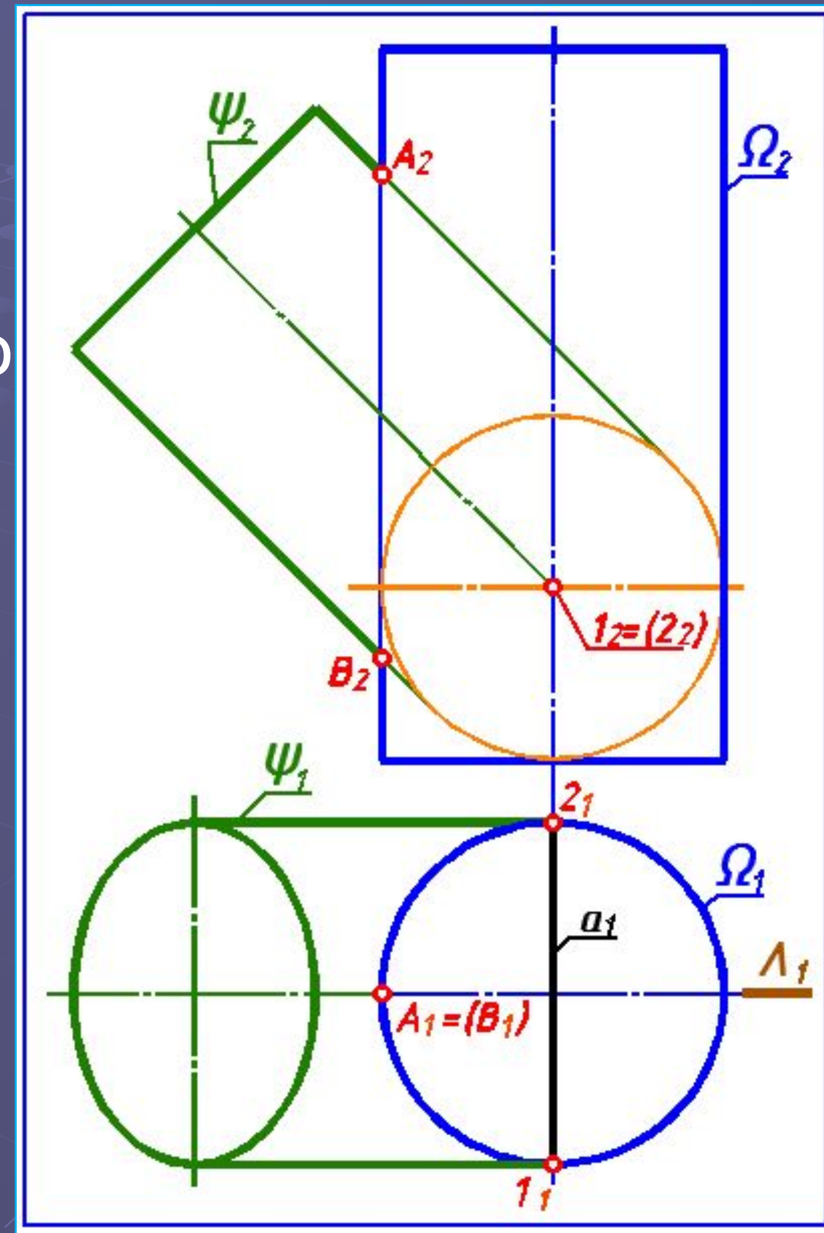
Находим точки ***1*** и ***2*** касания цилиндра ***Ψ*** с цилиндром ***Ω.*** Находим линию ***a***(***1***,***2***).

2. Если две поверхности второго порядка имеют касание в двух точках (***1*** и ***2***), то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую ***a***, соединяющую точки касания.



Теорема 2 (о двойном касании)

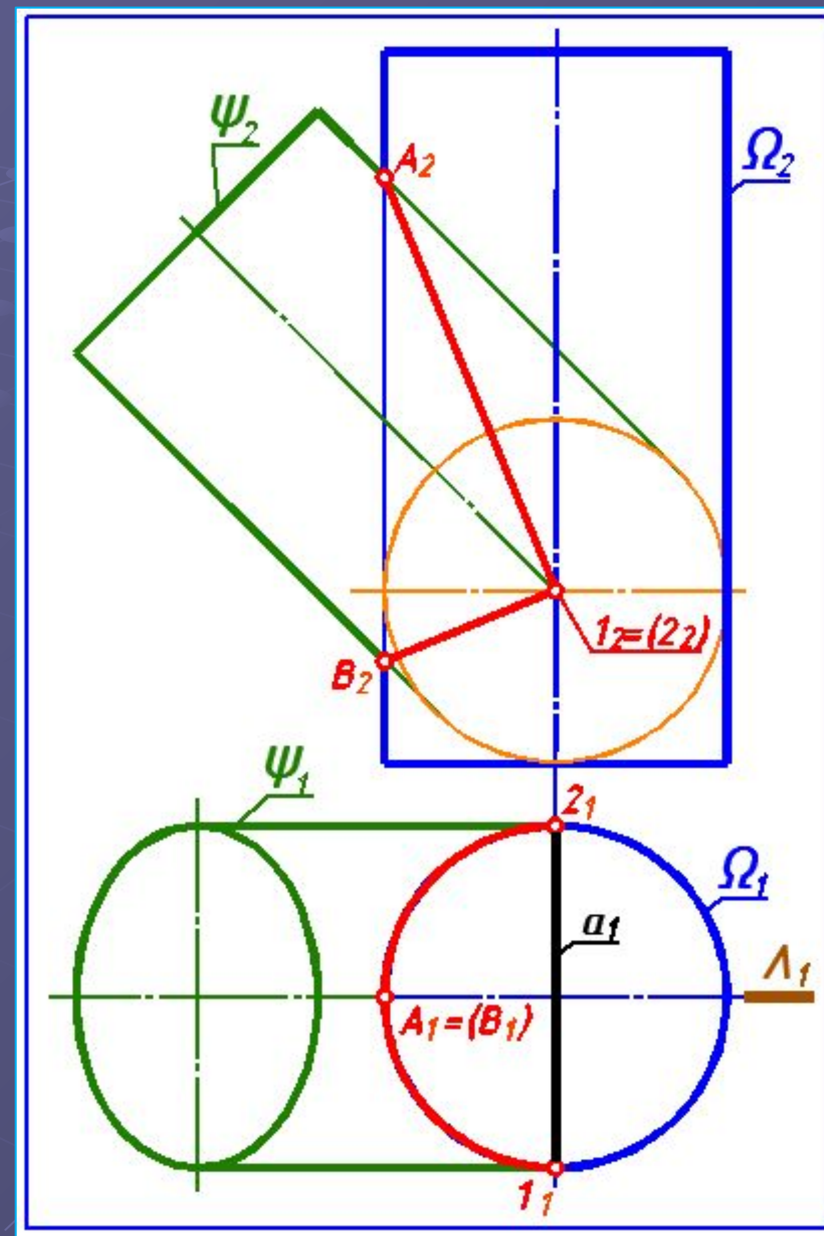
3. Опорные точки. Экстремальные относительно $П_1$ (они же очерковые на $П_2$) точки ***A*** и ***B*** построены с помощью общей плоскости симметрии ***Λ***, которая пересекает цилиндры по очерковым образующим.



Теорема 2 (о двойном касании)

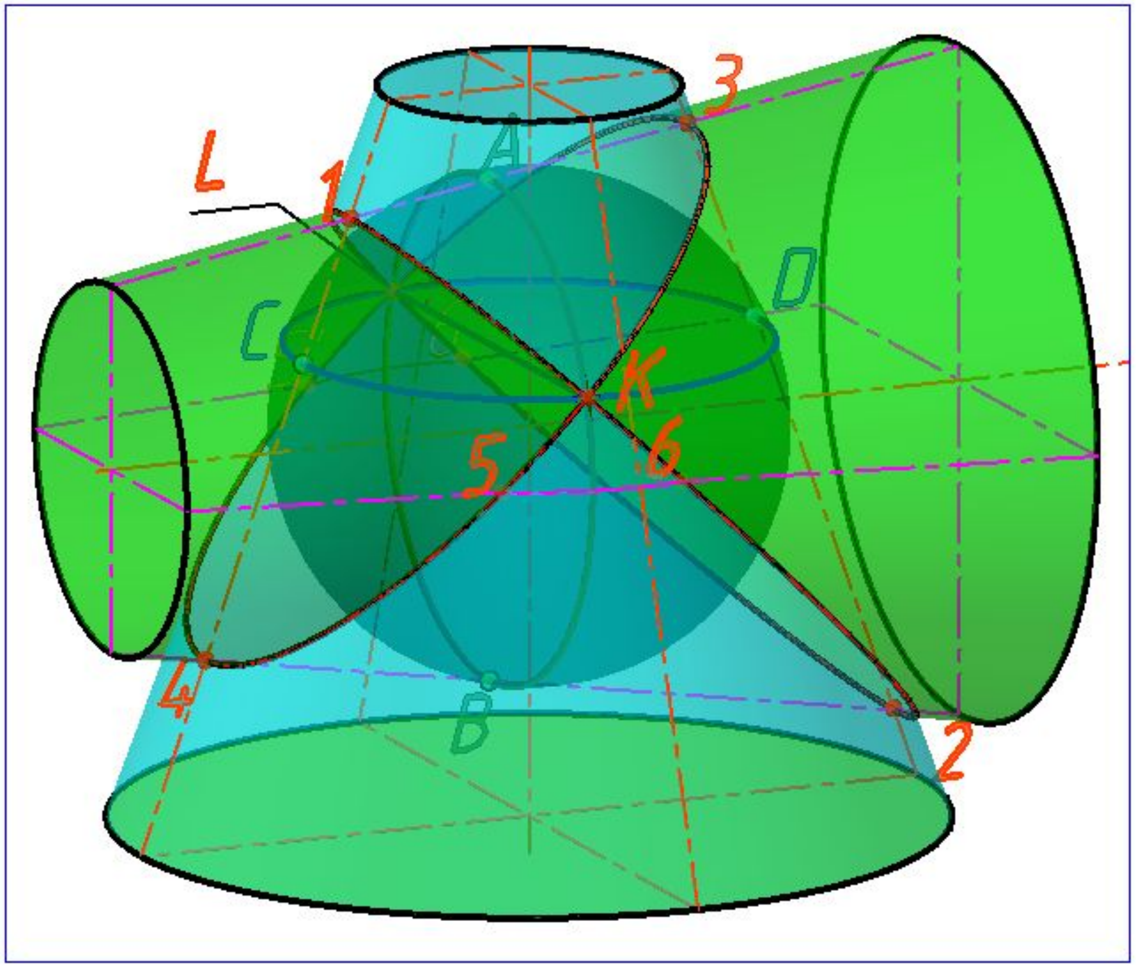
4. Определять промежуточные точки нет необходимости так как проекция линии пересечения на $П_1$ совпадает с частью проекции вертикального цилиндра Ω.

5. Соединив найденные точки (***A*,*1*, *B***), получим проекции частей эллипсов, которые на $П_2$, проецируются в отрезки [A1] и [1B].

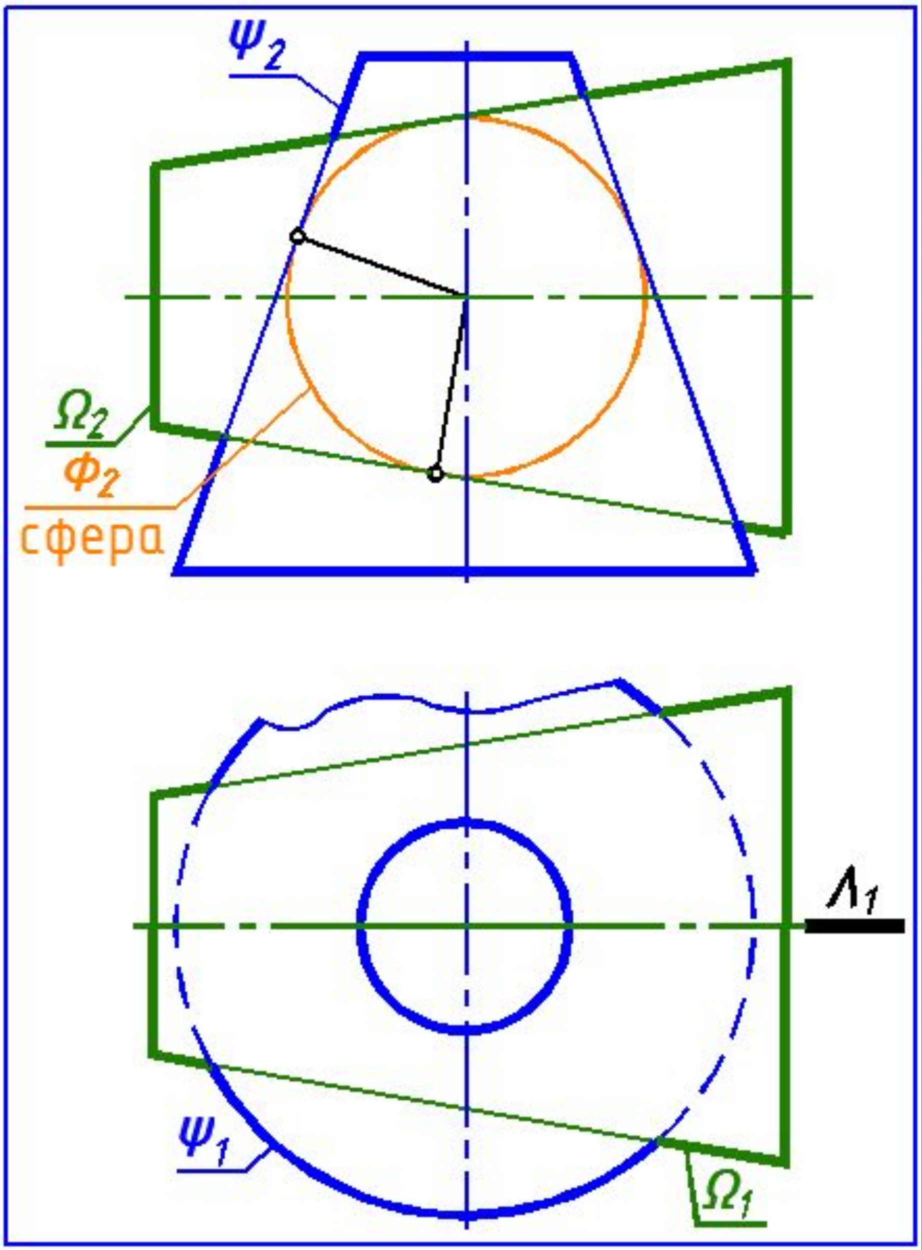


Теорема Монжа

Если две поверхности второго порядка описаны около третьей поверхности второго порядка, или вписаны в нее, то они пересекаются по двум плоским кривым второго порядка, плоскости которых проходят через прямую (*KL*), соединяющую точки пересечения линий касания (*AB* и *CD*).



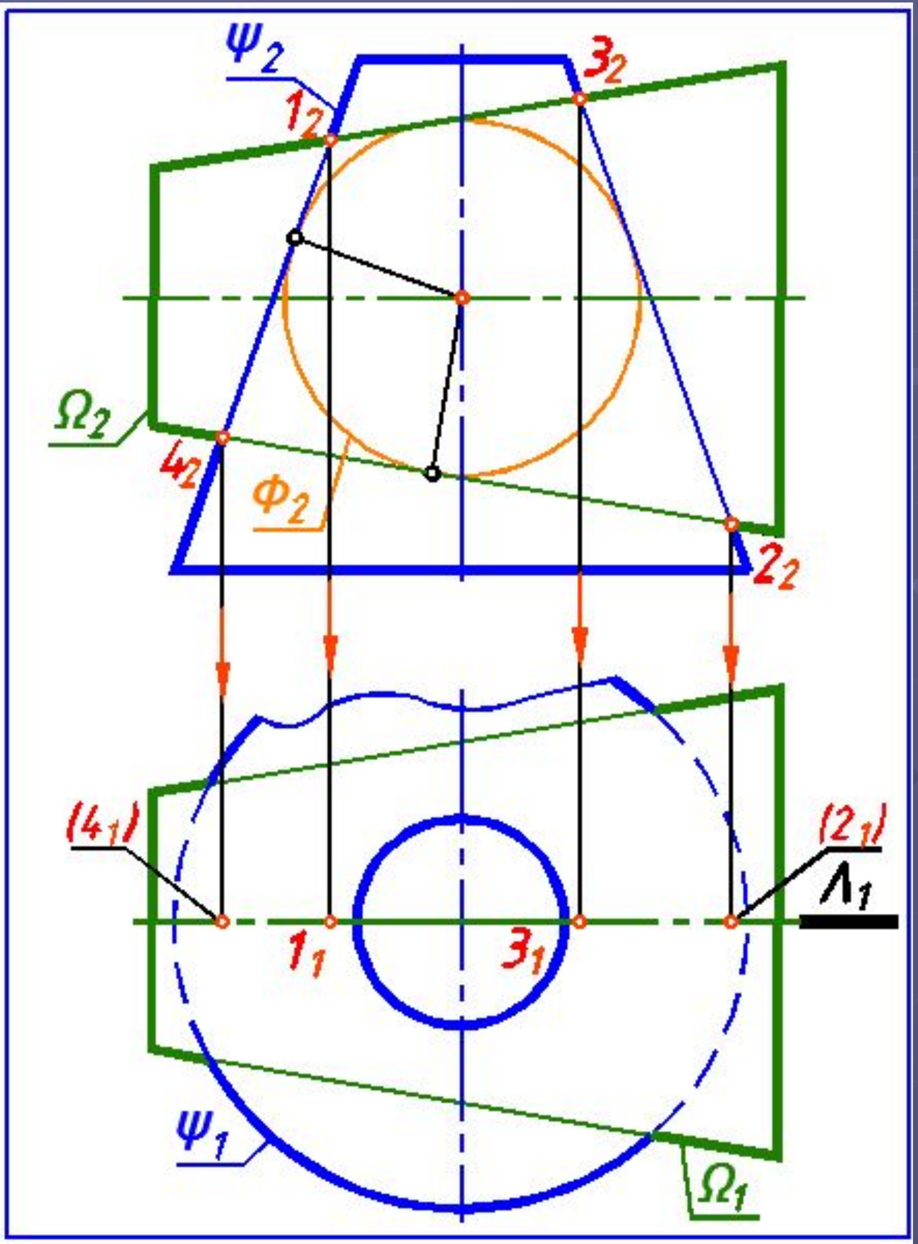
Теорема Монжа



Задача. Построить проекции линии пересечения поверхностей конуса (Ω) и вертикального конуса (Ψ). Определить видимость.

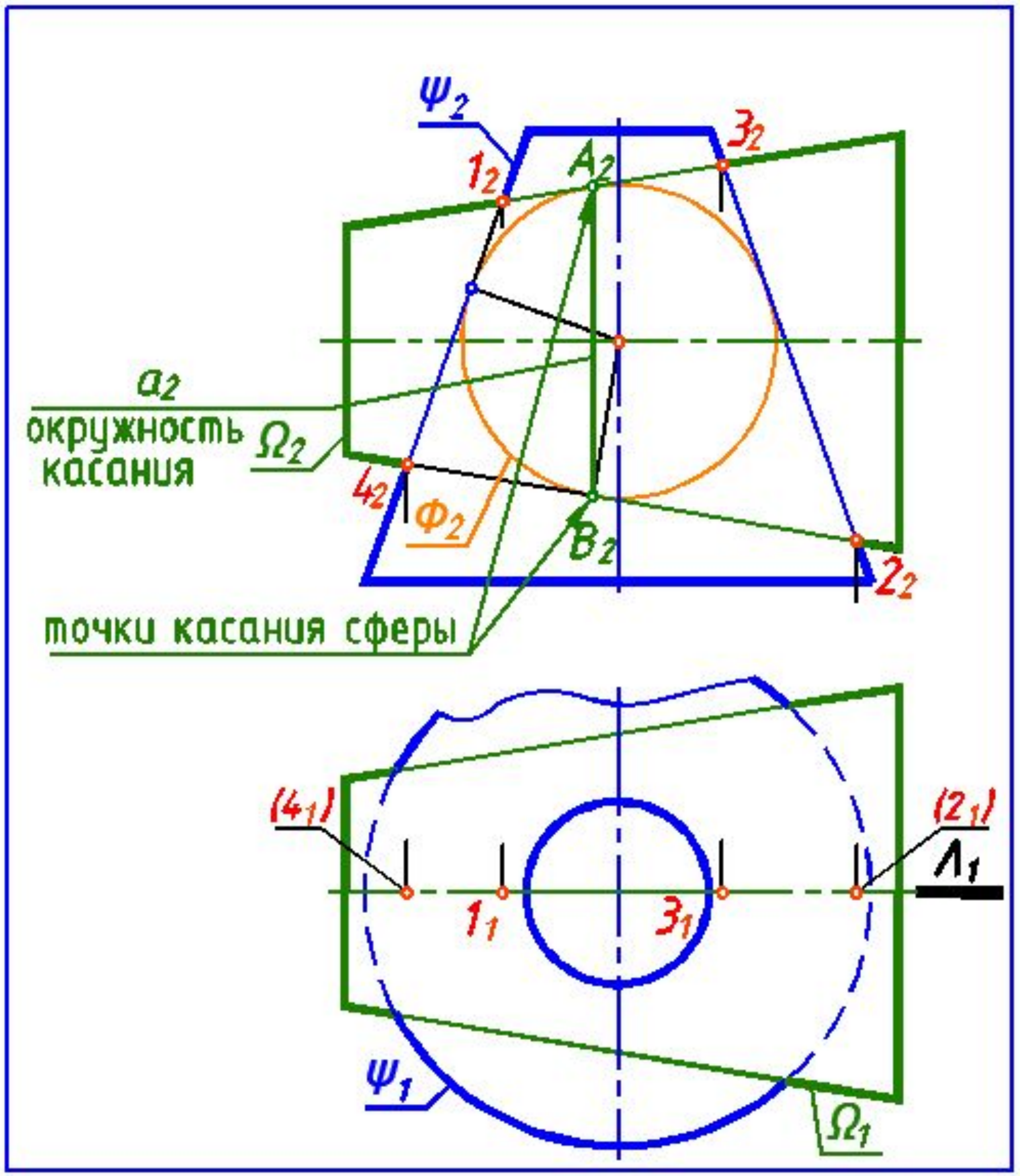
1. Заданы две поверхности вращения, описанные вокруг сферы ***Ф.***
2. На основании теоремы Монжа искомая линия пересечения - две плоские кривые второго порядка.

Теорема Монжа



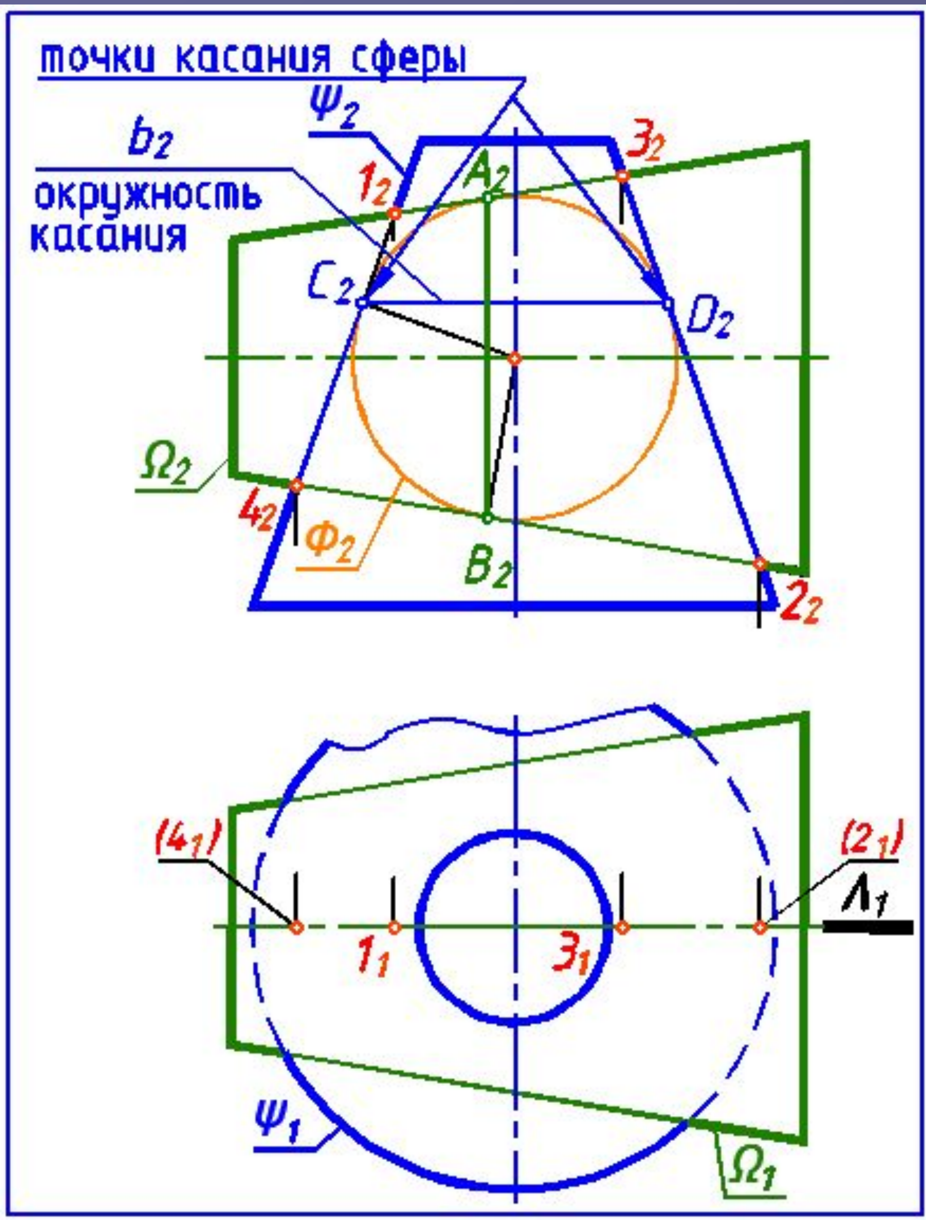
3. Опорные точки. Экстремальные (они же очерковые относительно $П_2$) точки ***1***, ***2***, ***3*** и ***4*** построены с помощью общей плоскости симметрии ***Λ*** *(очерк – ось)*.

Теорема Монжа



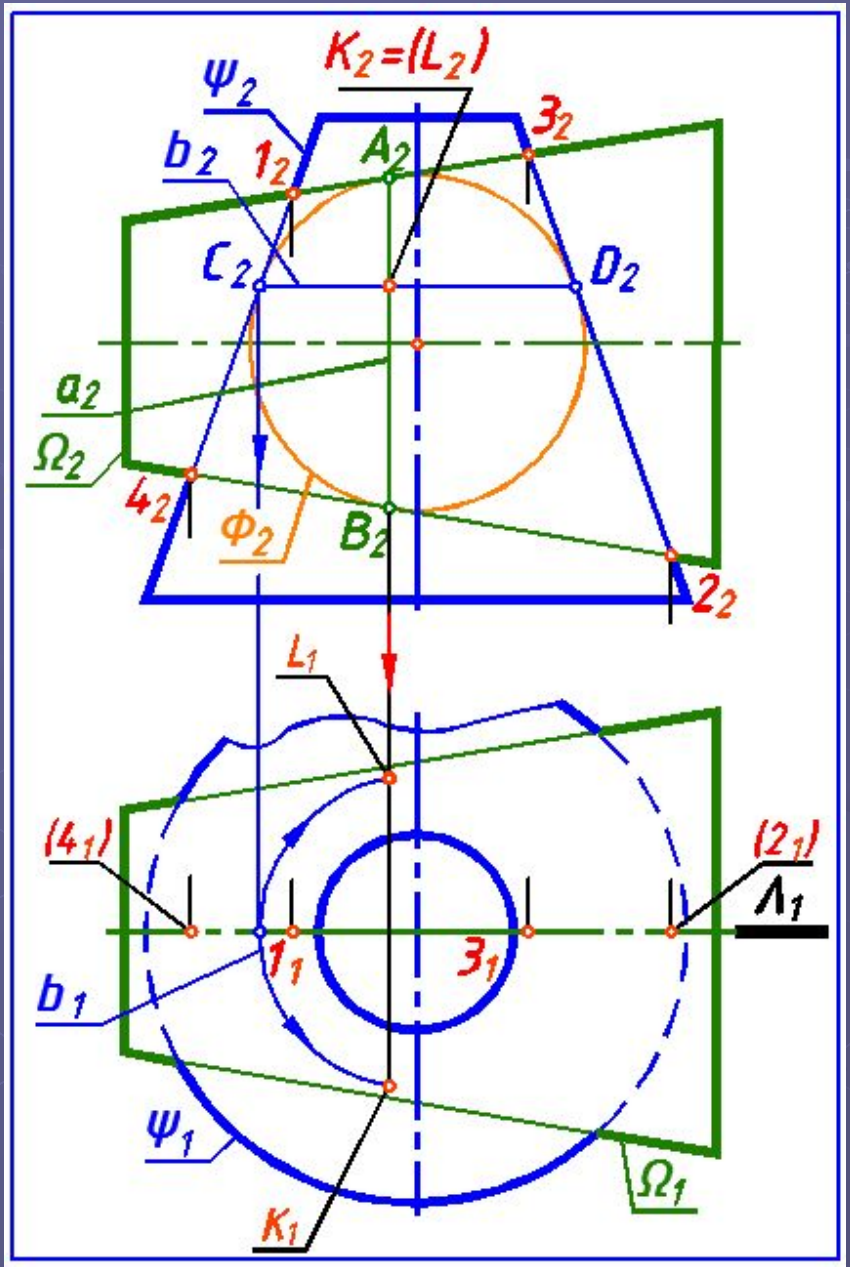
Находим линию ***a*****(*****AB*****)** касания сферы ***Ф*** и конуса ***Ω*****,** соединив точки касания ***A*** и ***B*****.**

Теорема Монжа



Находим линию ***b*** **(*CD*)** касания сферы ***Φ*** и вертикального конуса ***Ψ***, соединив точки касания ***C*** и ***D***.

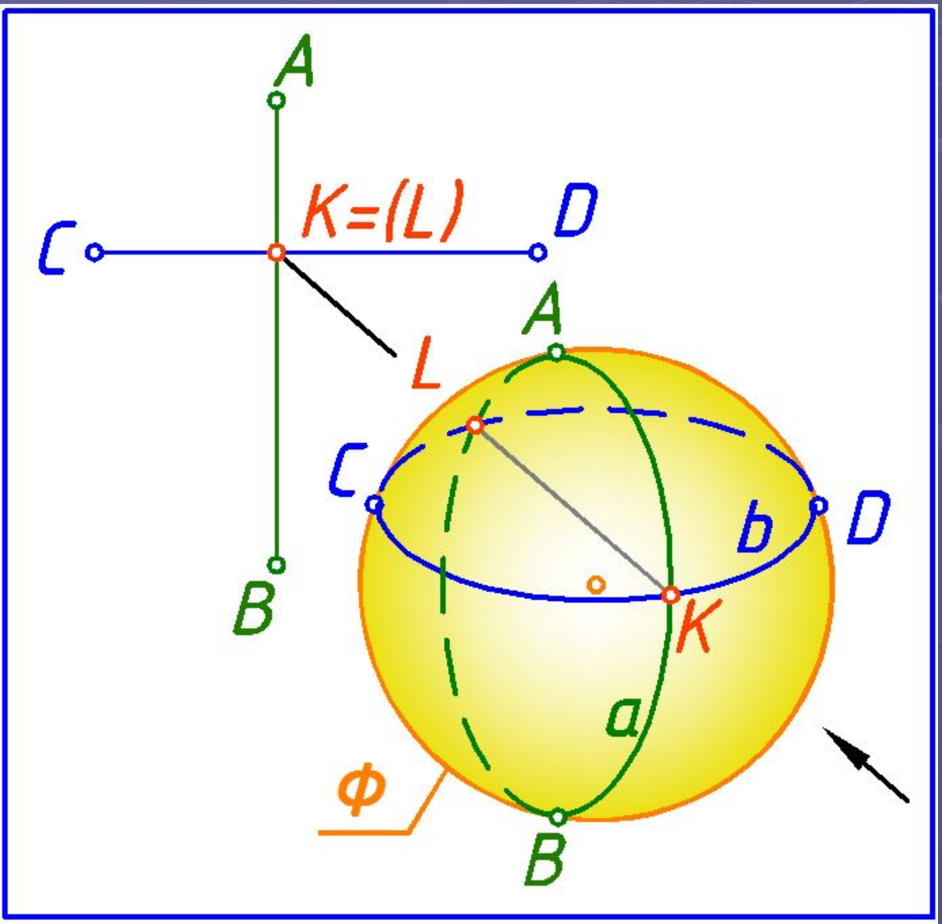
Теорема Монжа



Определяем прямую ***KL***, соединяющую точки пересечения линий ***a***(***AB***) и ***b***(***CD***) касания сферы ***Ф*** и конусов ***Ω*** и ***Ψ***.

Горизонтальные проекции точек ***K*** и ***L*** найдены из условия принадлежности их поверхности конуса ***Ψ*** с помощью параллели ***b*** (*радиус – от оси до очерка*).

Особые случаи пересечения кривых поверхностей



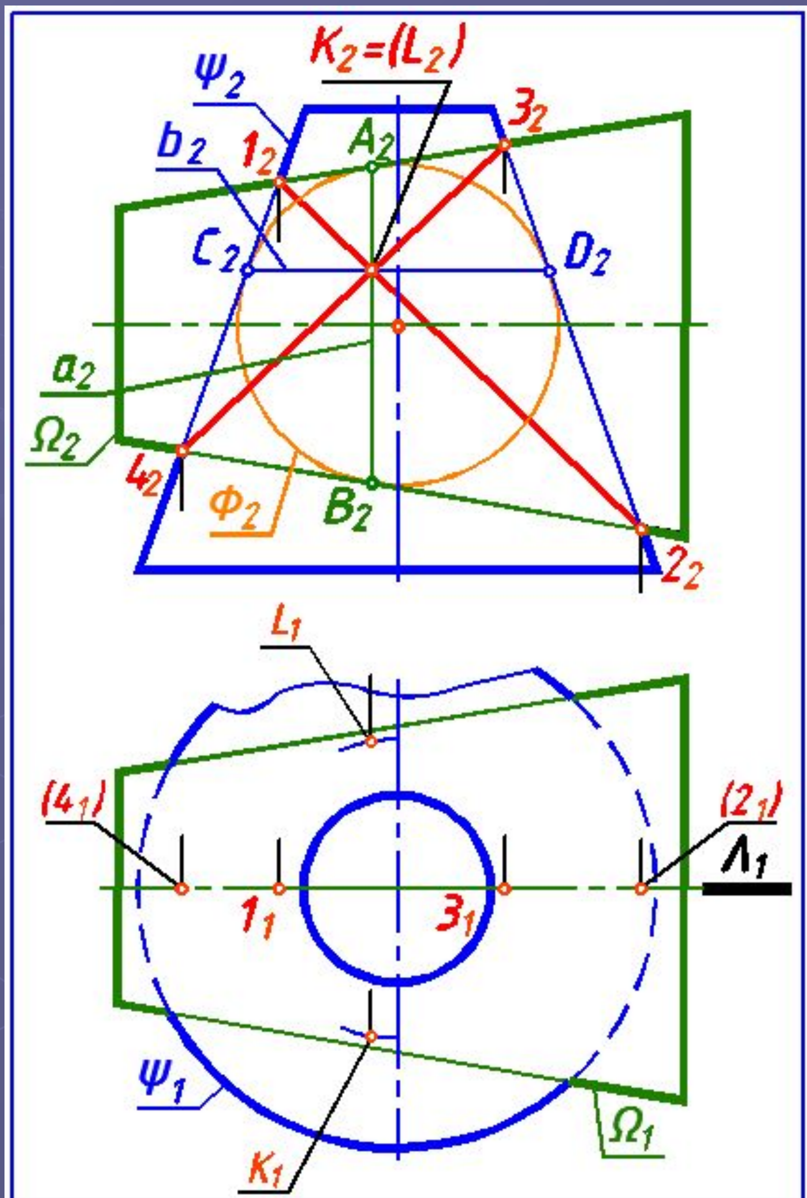
Сфера **Ф** касается конуса **Ω** по окружности **a(AB)**.

Сфера **Ф** касается конуса **Ψ** по окружности **b(CD)**.

Определяем отрезок **KL**, в пересечении окружностей **a (AB)** и **b(CD)**.

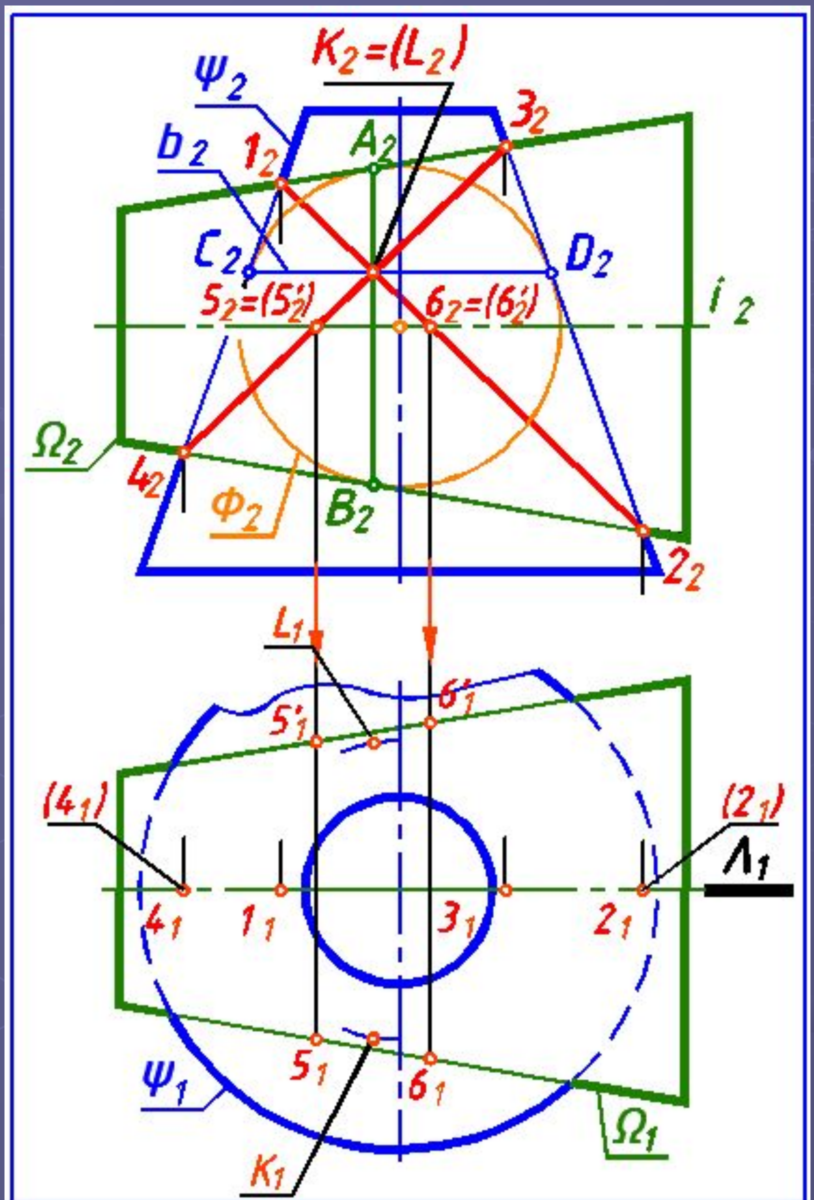
Окружности **a** и **b** на $П_2$ проецируются в отрезки *AB* и *CD*, а отрезок **KL** – в точку .

Особые случаи пересечения кривых поверхностей



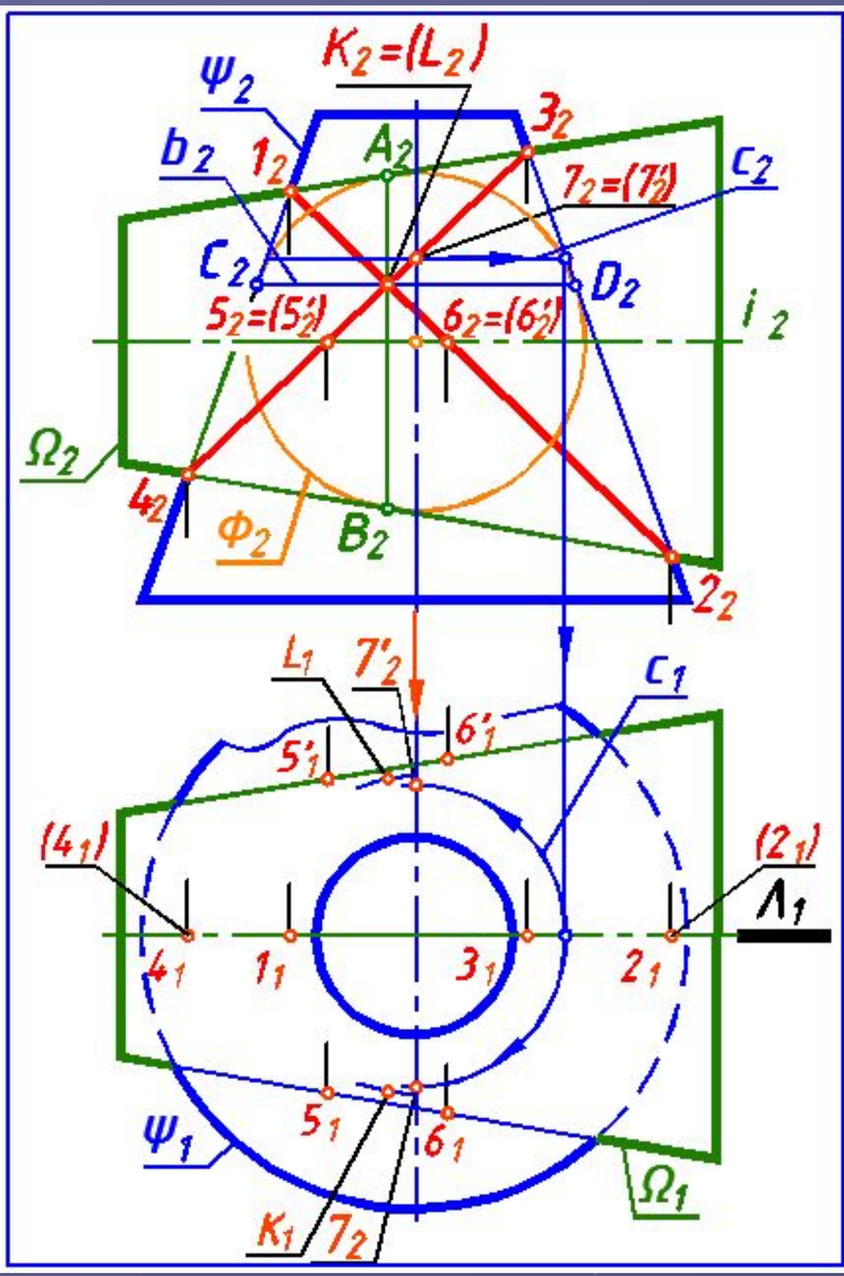
На основании теоремы Монжа искомая линия пересечения распалась на две плоские кривые второго порядка (**1-2** и **3-4**), плоскости которых проходят через прямую ***KL***.

Теорема Монжа



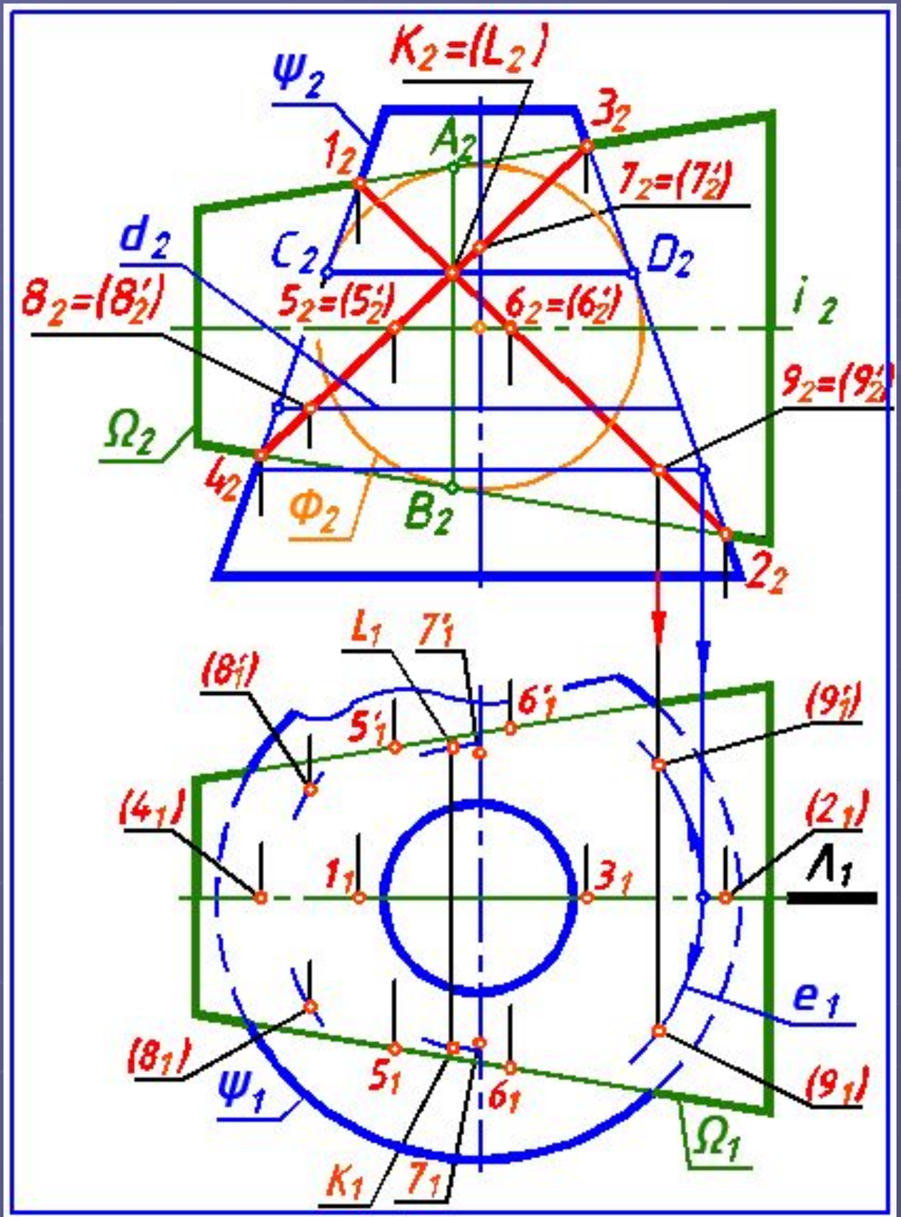
После построения проекции линии пересечения на $П_2$ находим очерковые относительно $П_1$ точки **5**, **5'** и **6**, **6'** из условия принадлежности горизонтальным очерковым образующим конуса **Ω** *(ось – очерк).*

Теорема Монжа



Очерковые относительно $П_3$ точки **7**, и **7'** линии пересечения найдены из условия принадлежности их поверхности конуса ***Ψ*** с помощью параллели ***c*** (*радиус от оси до очерка*).

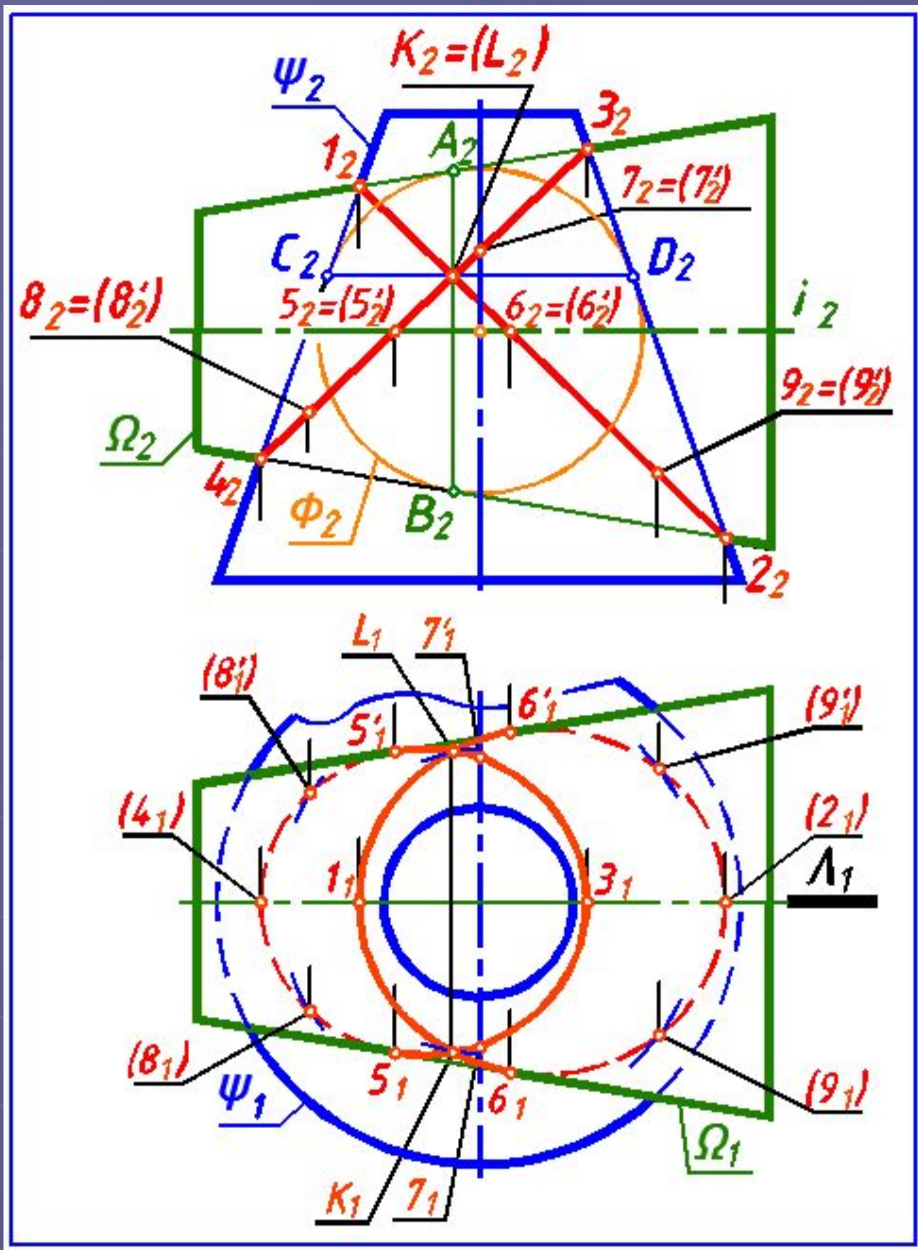
Теорема Монжа



4. Промежуточные точки **8**, и **8'** линии пересечения найдены из условия принадлежности их поверхности конуса **Ψ** с помощью параллели ***d***.

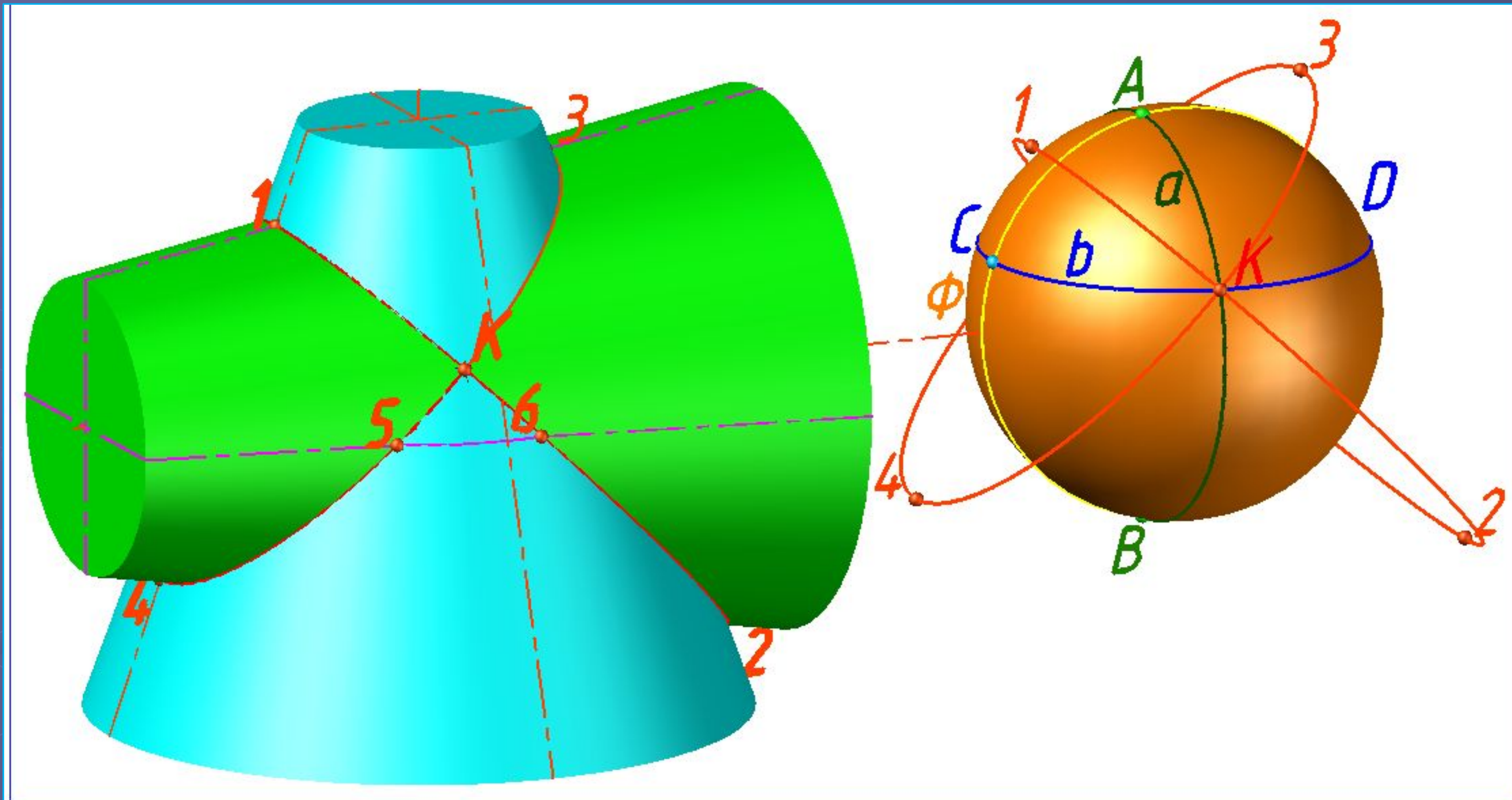
Промежуточные точки **9**, и **9'** линии пересечения найдены из условия принадлежности их поверхности конуса **Ψ** с помощью параллели ***e***.

Теорема Монжа



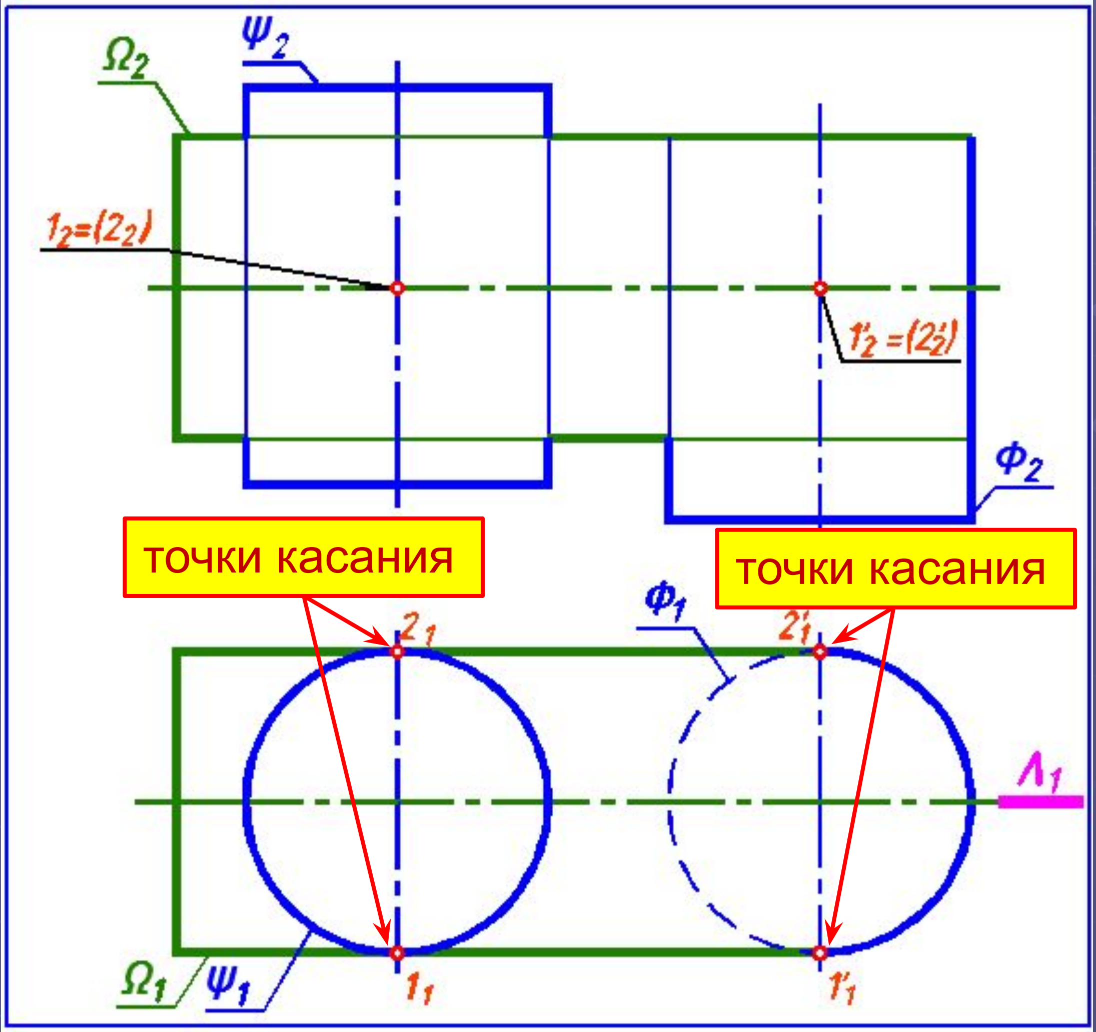
5) Соединив полученные точки плавной кривой с учетом видимости, получим горизонтальную проекцию линии пересечения заданных поверхностей. Точки **5, 5', 6, 6'** − точки смены видимости. Доводим очерк конуса **Ω** до этих точек.

Теорема Монжа



На основании теоремы Монжа линия пересечения конусов, описанных вокруг сферы, распалась на две плоские кривые (эллипсы), имеющие общие точки ***K*** и ***L***

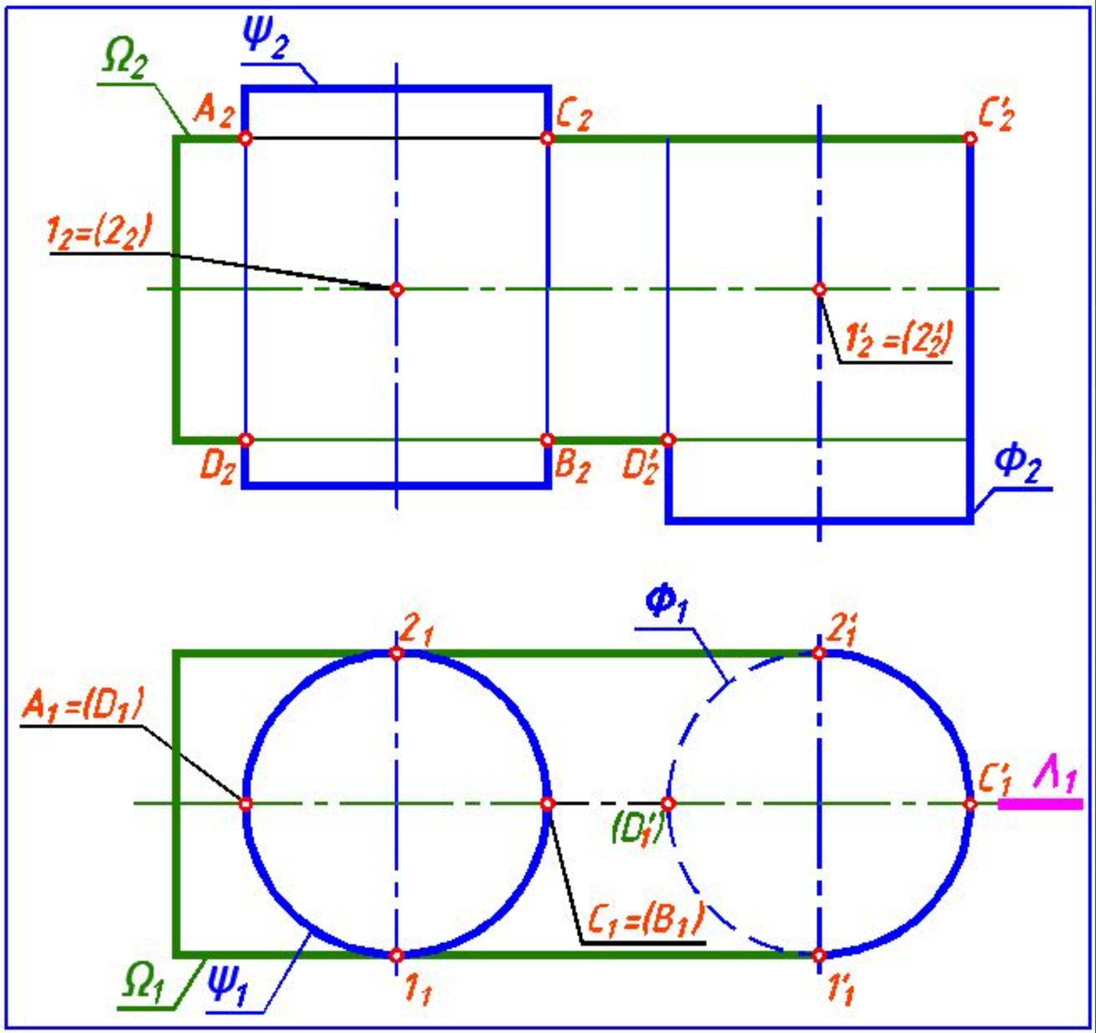
Теорема о двойном касании



Задача. Построить проекции линий пересечения горизонтального цилиндра ***(Ω)*** и вертикальных цилиндров ***(Ψ)*** и ***(Φ)***. Определить видимость.

1. Заданы поверхности второго порядка, имеющие точки касания ***1***, ***2***. Имеется общая плоскость симметрии ***Λ***, параллельная $П_2$.

Теорема о двойном касании

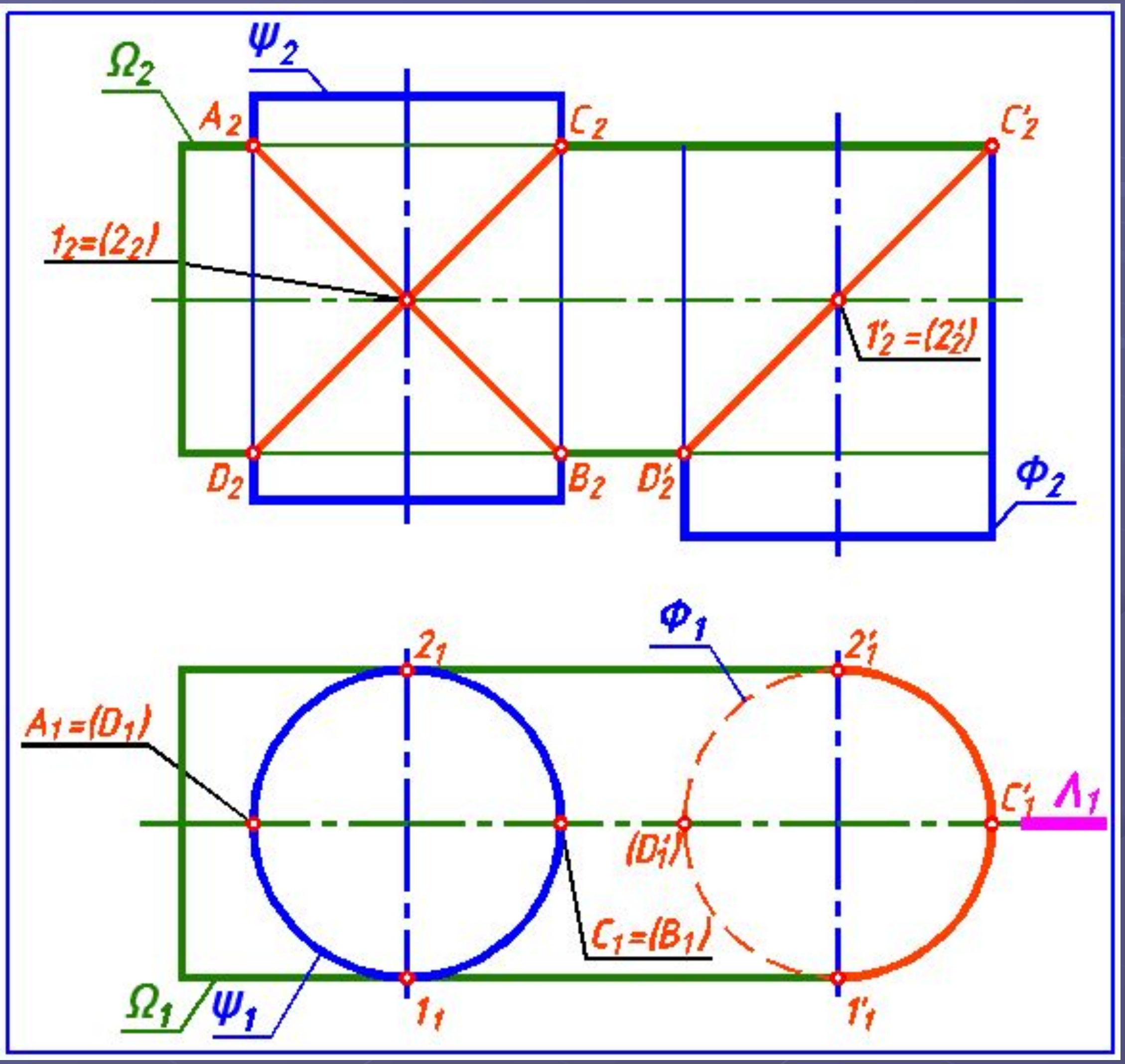


2. Линия пересечения цилиндров **Ω** и **Ψ** − две кривые второго порядка (эллипса), плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки касания ***1, 2.***

Линия пересечения цилиндров **Ω** и **Φ** − кривая второго порядка (эллипс), плоскость которой проходят через прямую, соединяющую точки касания ***1, 2.***

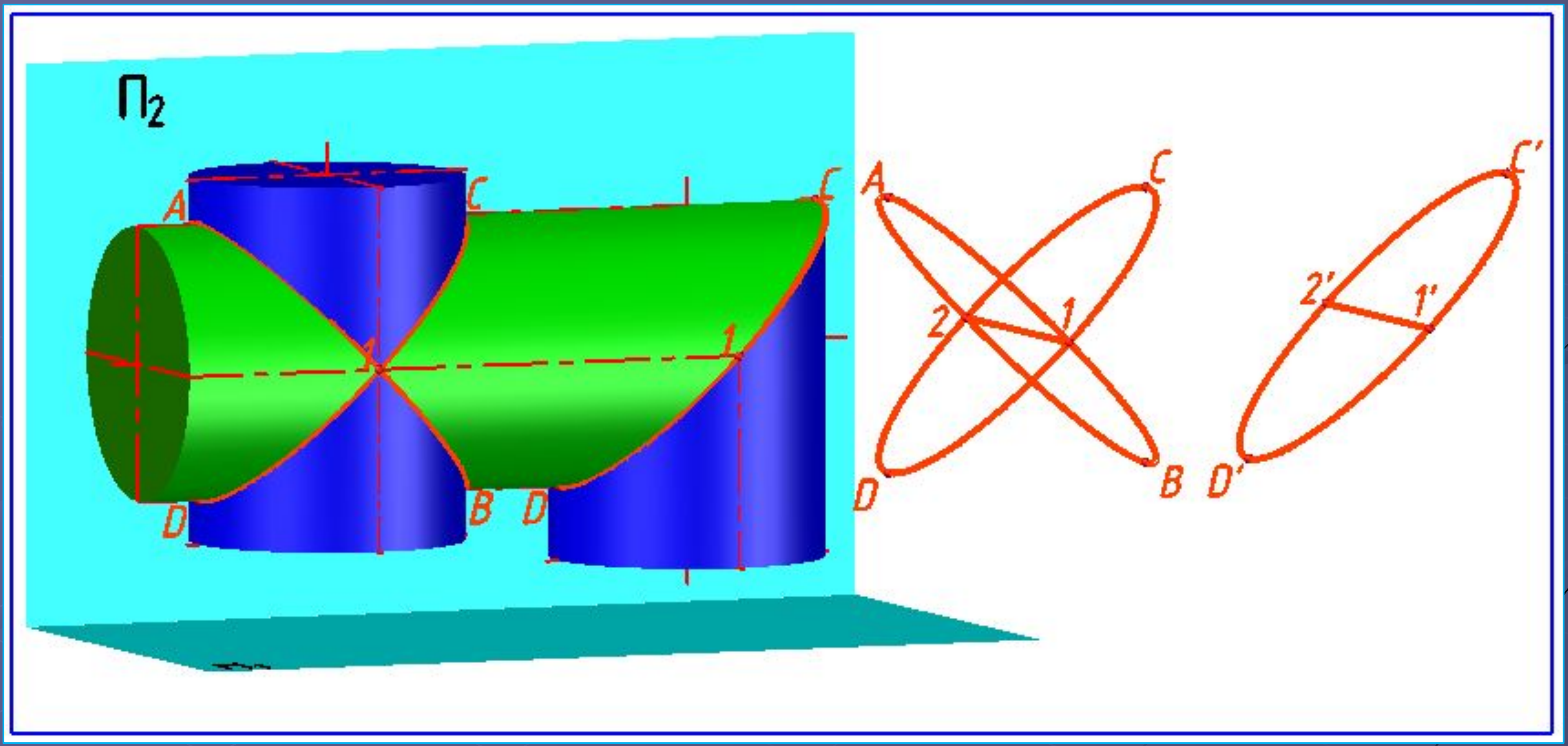
3. Опорные точки: ***A, B, C, D, C', D'*** − экстремальные (в тоже время очерковые), найдены с помощью общей плоскости симметрии ***Λ.***

Теорема о двойном касании



- Находим фронтальные проекции линий пересечения:
  от **A** до **B** через **1**, **2**;
  от **D** до **C** через **1**, **2**;
  от ***D'*** до ***C'*** через ***1'***, ***2'***.
- Горизонтальные проекции линий пересечения совпадают с проекциями вертикальных цилиндров.

Теорема о двойном касании



Теорема 2. Если две поверхности второго порядка имеют касание в двух точках, то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки касания (*1* и *2*).

Содержание