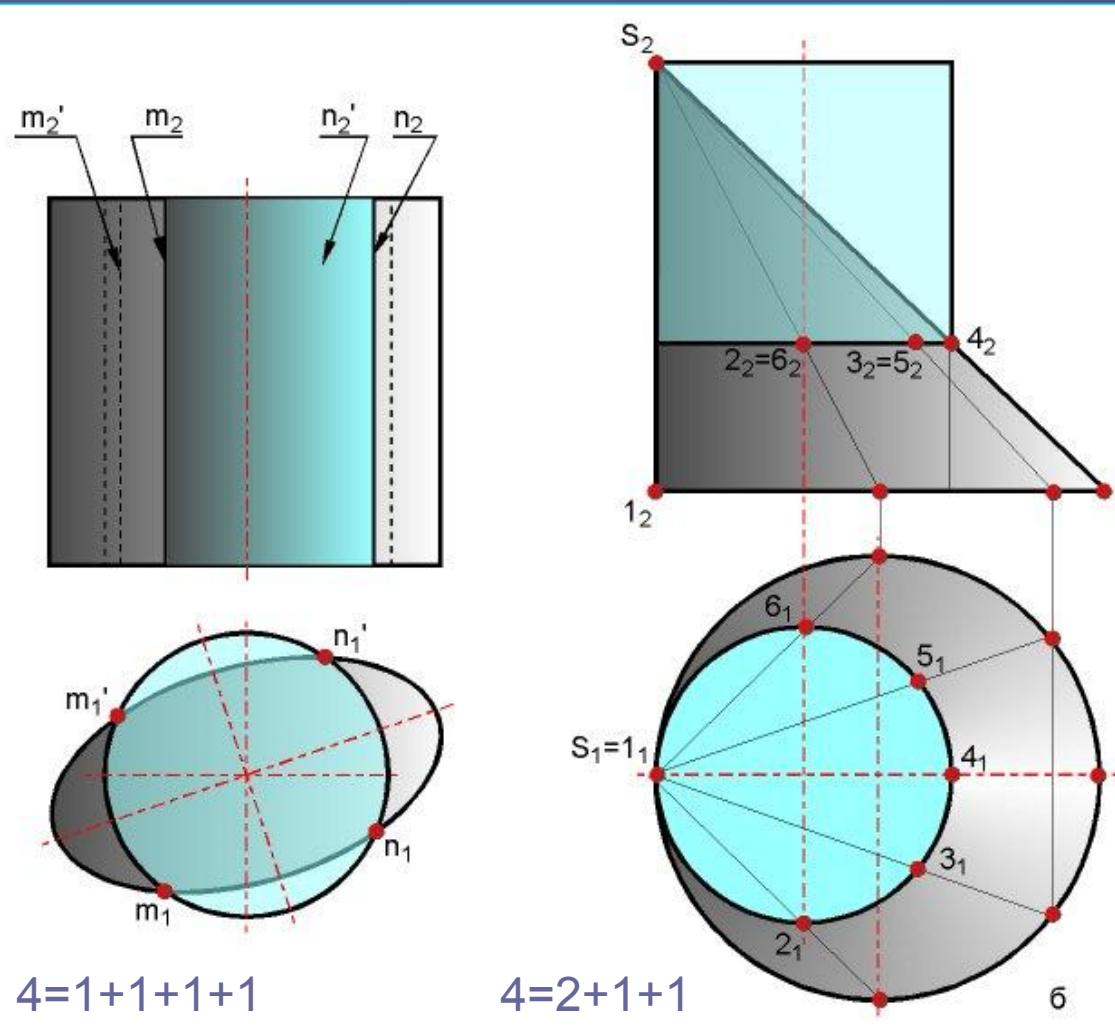


Особые случаи пересечения

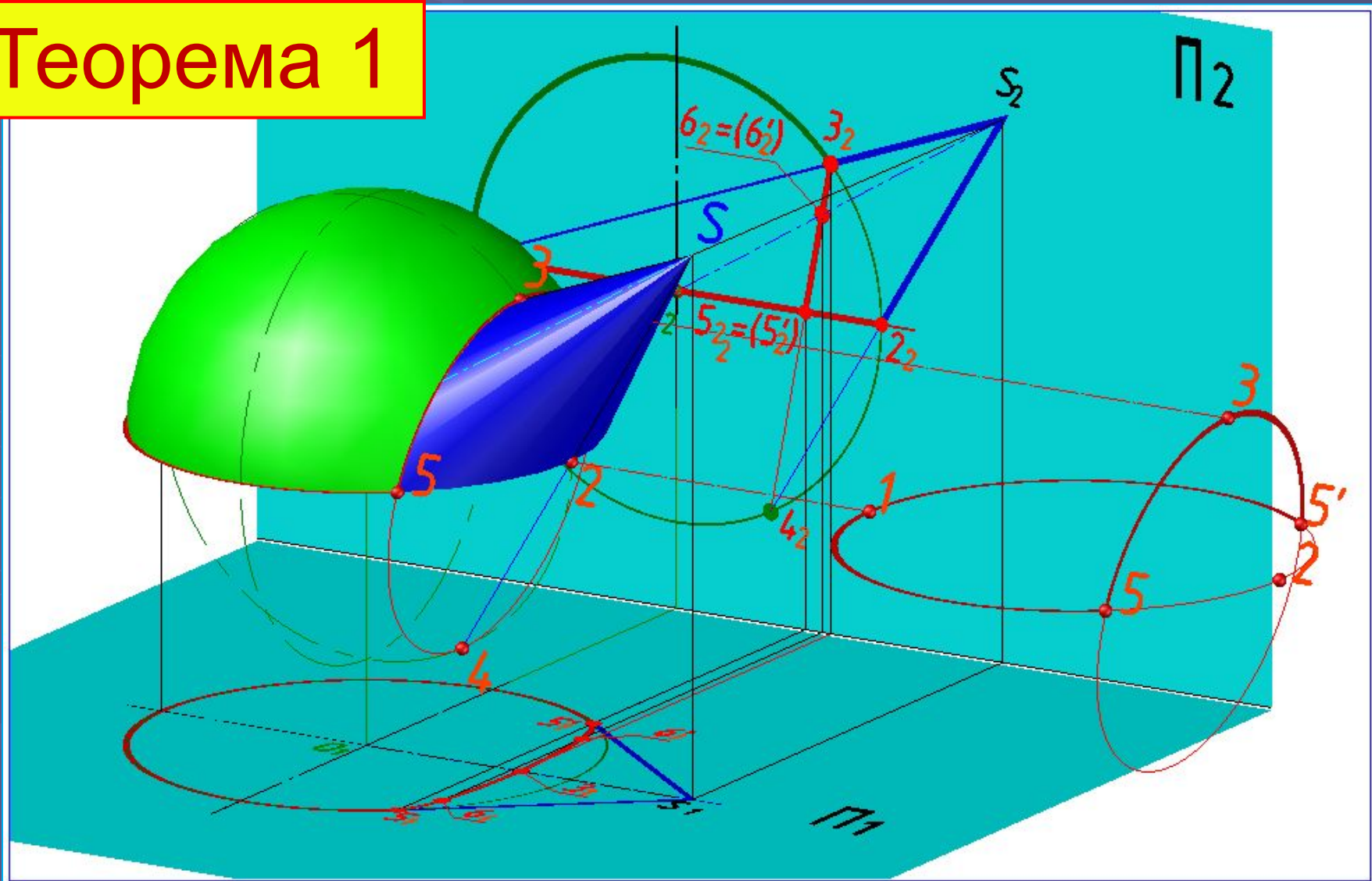
Две поверхности 2-ого порядка пересекаются в общем случае по кривой 4-ого порядка (2x2)

В особых случаях линия пересечения распадается на 2 и более, но порядок при этом не меняется.

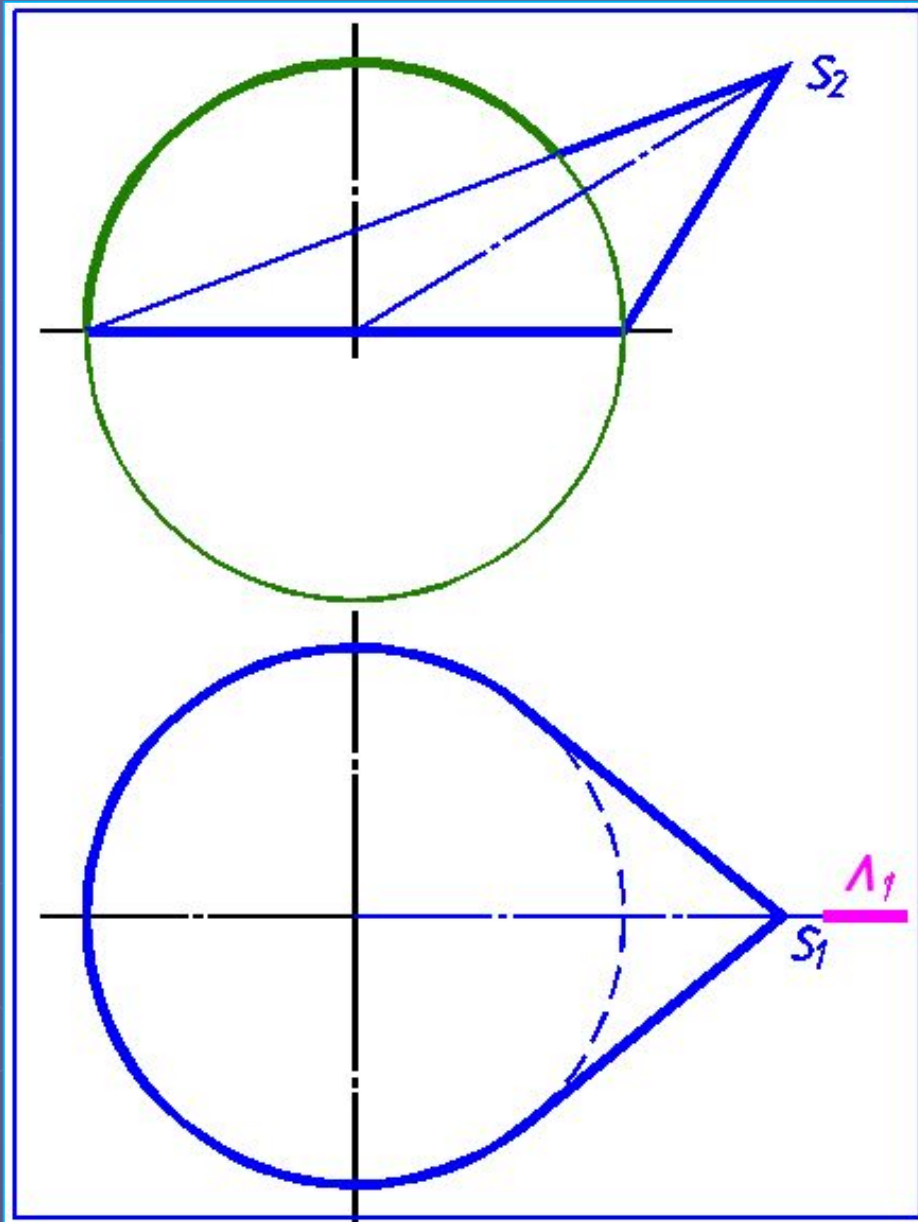


Если две поверхности 2-ого порядка пересекаются по одной плоской кривой, то они пересекаются и еще по одной кривой, которая тоже является плоской.

Теорема 1



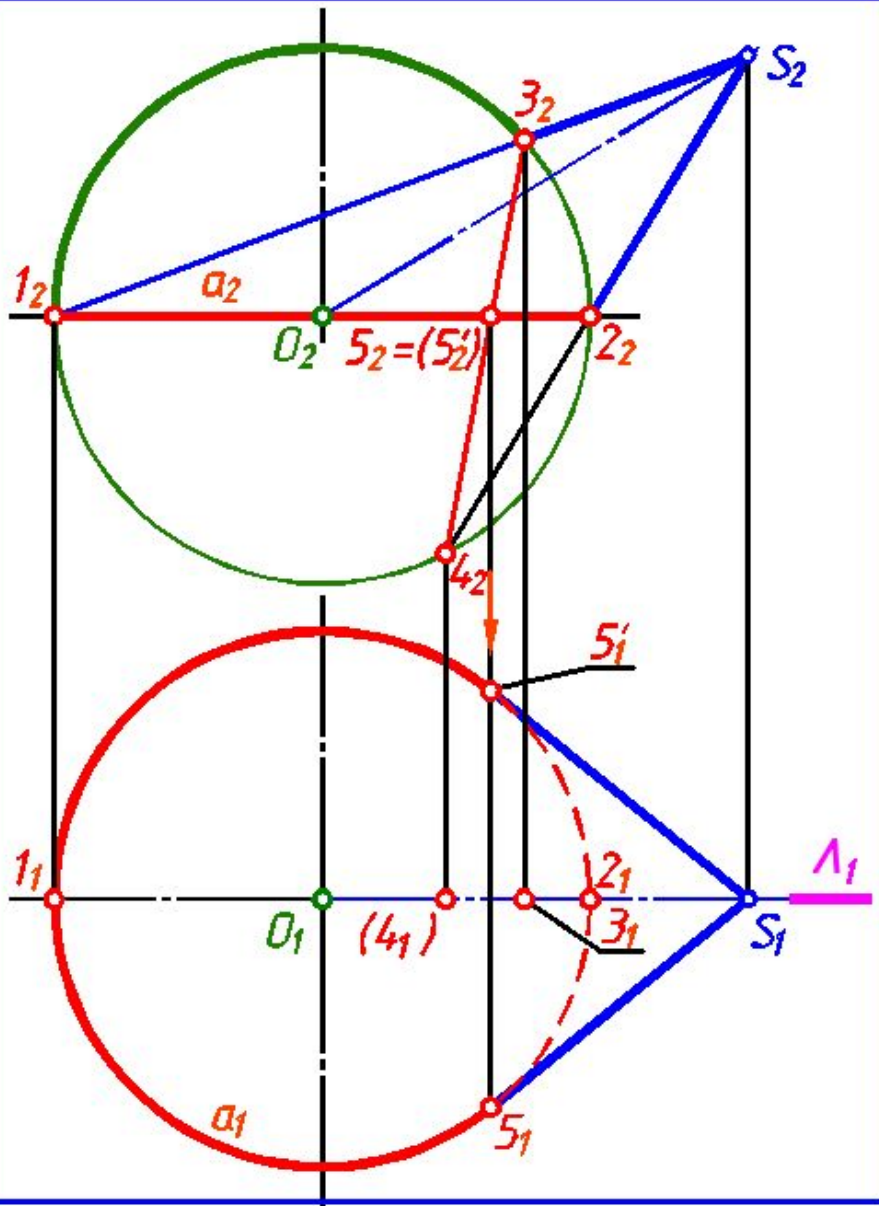
Теорема 1



Задача. Построить линию пересечения **полусферы** и **конуса**.

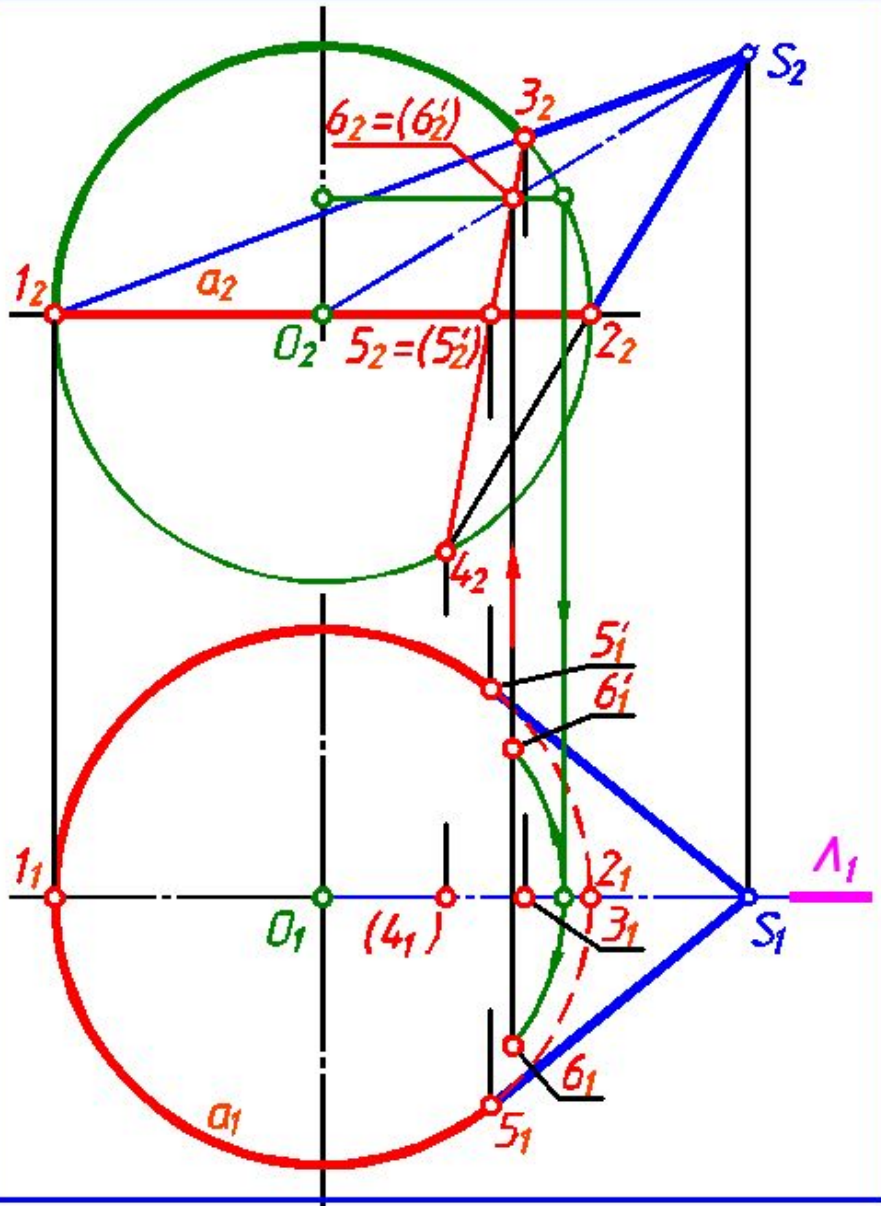
1. Заданные поверхности 2-го порядка имеют общее основание (**окружность**).
Имеется общая плоскость симметрии Λ .

Теорема 1



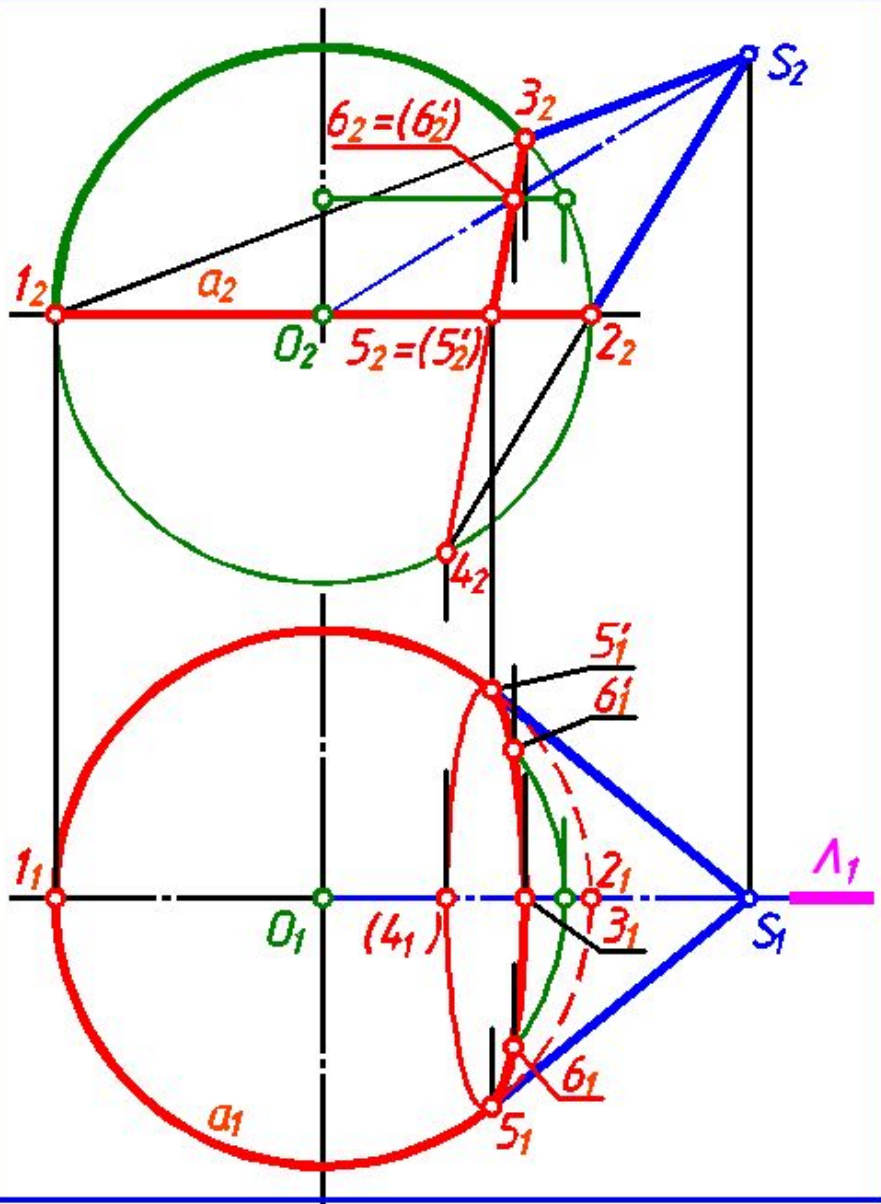
Опорные точки **5** и **5'** (очерковые на Π_1) определены по принадлежности окружности **a**.

Теорема 1



4. Промежуточные точки **6** и **6'** (для построения эллипса) определены по принадлежности **полусфере** (радиус окружности — от оси до очерка).

Теорема 1

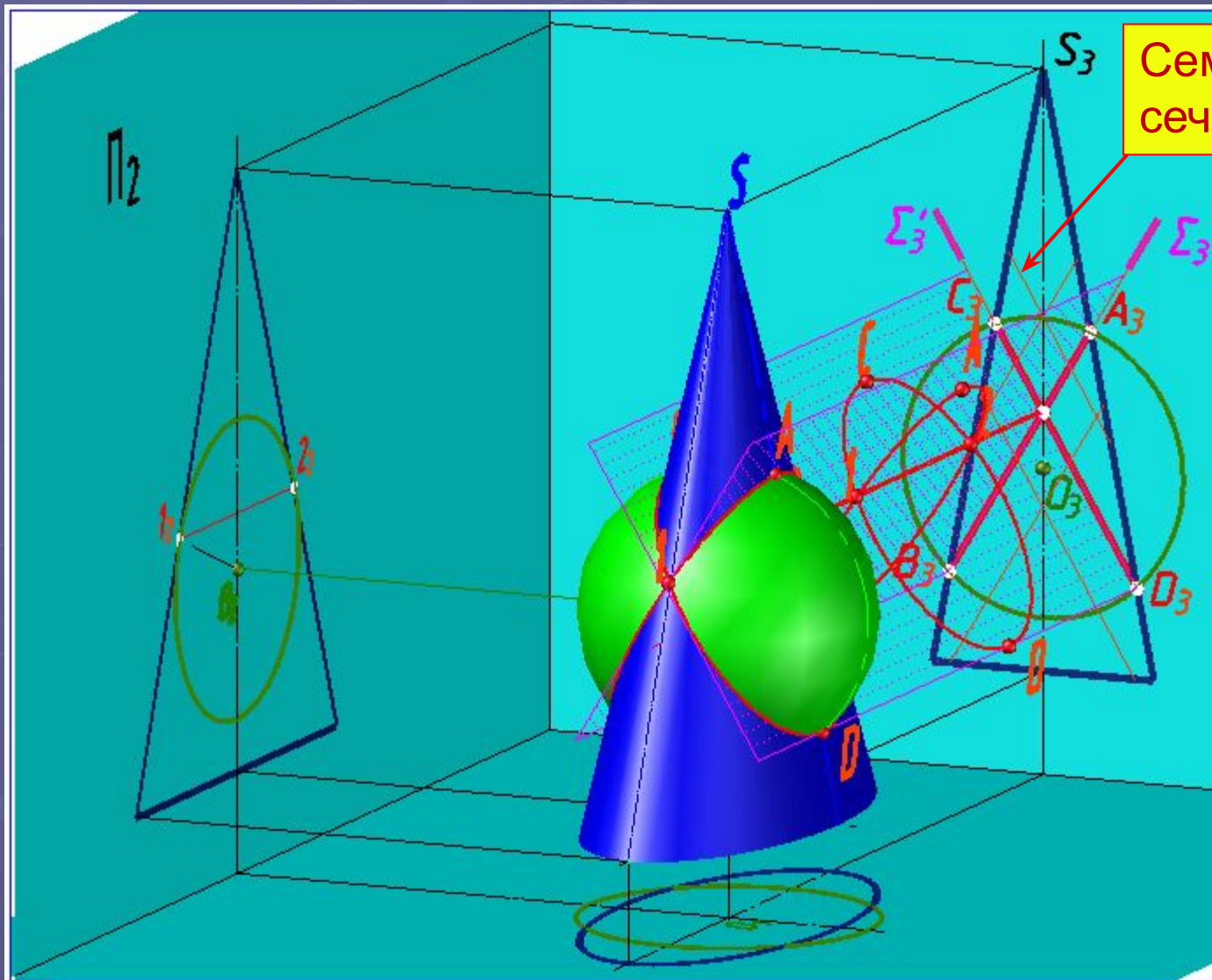


5. Найденные точки **5, 6, 3, 6', 5'** на Π_1 соединяем плавной кривой.

На Π_2 кривые проецируются в отрезки **[1-2]** и **[3-5]**.

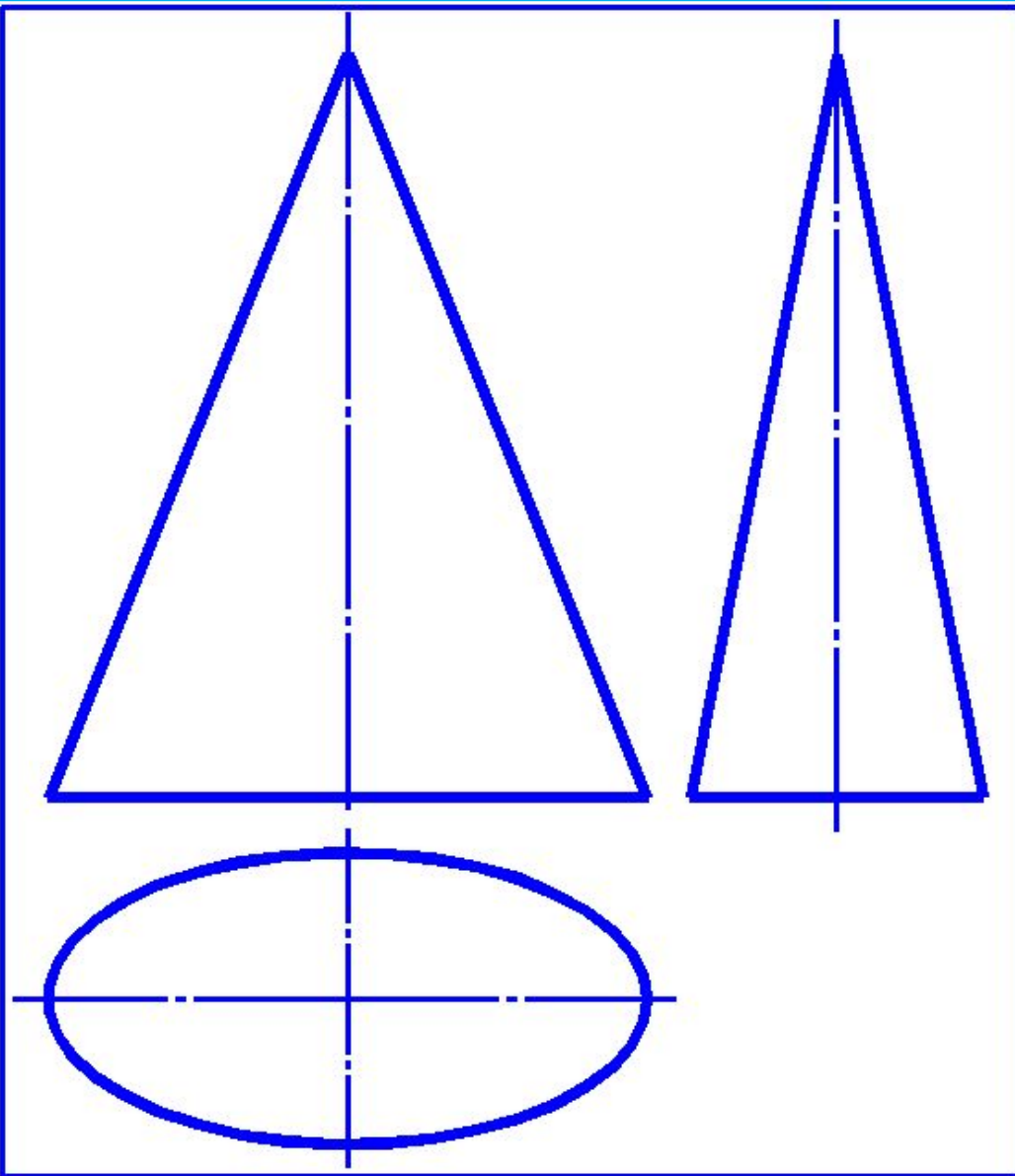
Так как задана полусфера, нижнюю часть эллипса (точка **4**) обводить не следует.

Если какая-нибудь поверхность 2-ого порядка пересекается со сферой по **одной окружности**, то она пересекается с ней **еще раз по другой окружности**.



Семейство круговых сечений

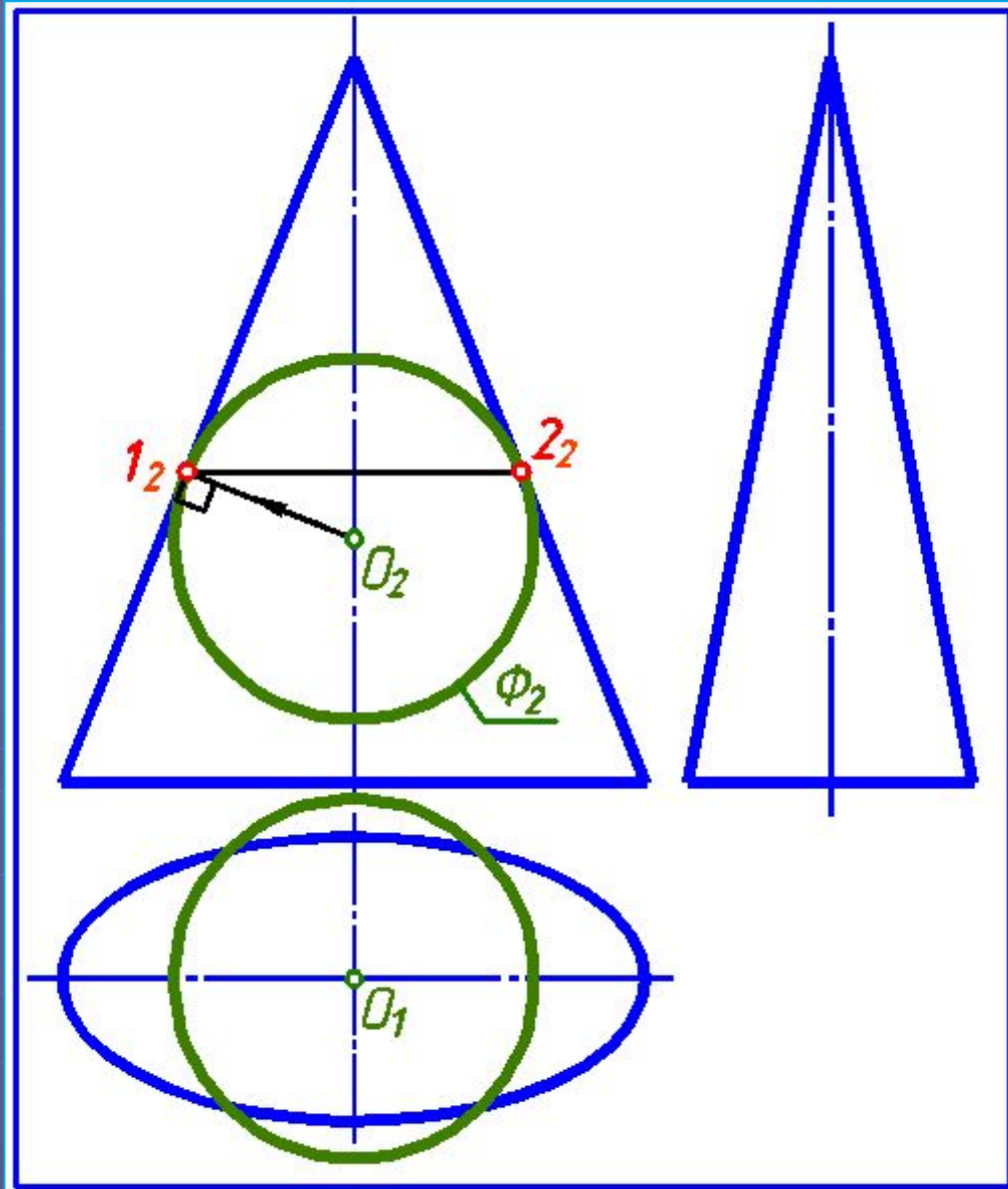
Следствие теоремы 1



Задача. Найти семейство **круговых сечений** эллиптического конуса.

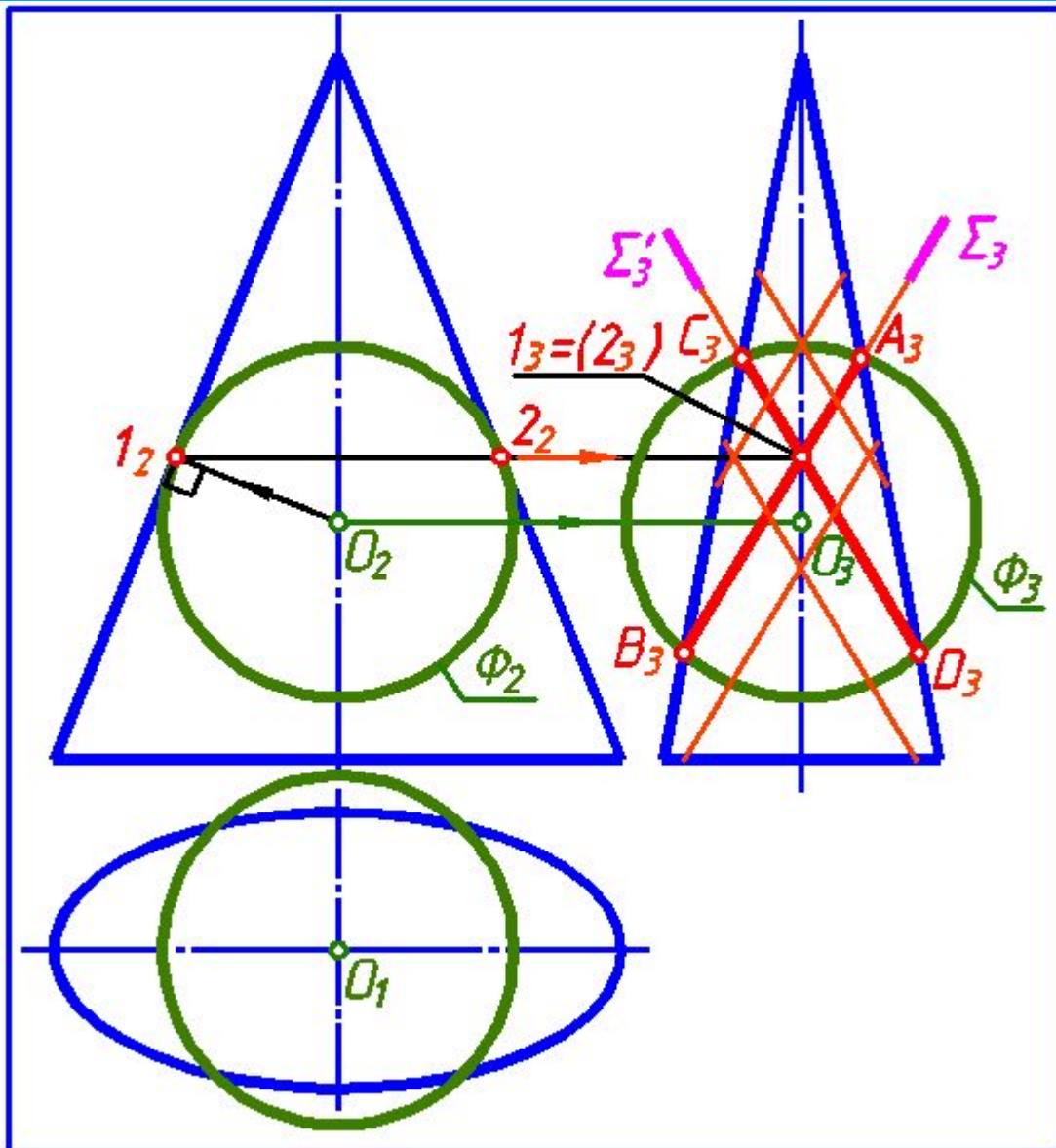
Сфера, имеющая двойное касание с поверхностью второго порядка, может быть использована для нахождения **круговых сечений** тех поверхностей второго порядка, которые их имеют.

Следствие теоремы 1



Проведем **сферу** с центром O на оси **конуса** и радиусом, равным длине отрезка $|1, O|$. Эта **сфера** будет **касаться** двух образующих конуса в точках **1** и **2**.

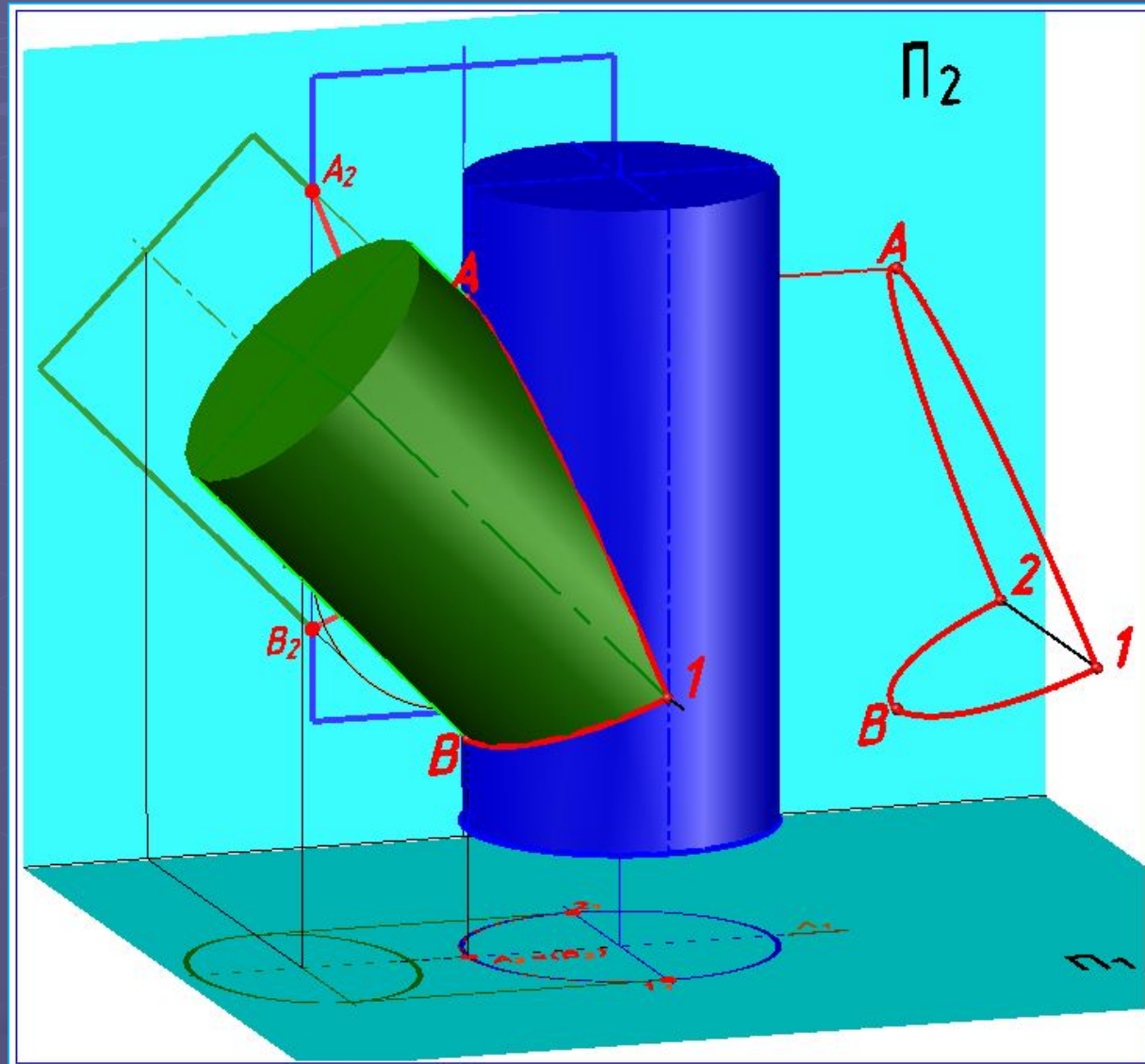
Следствие теоремы 1



Линия пересечения со сферой распадается на две окружности AB и CD , расположенные в профильно проецирующих плоскостях Σ и Σ' . Полученные окружности определяют два семейства круговых сечений эллиптического конуса.

Теорема 2 (о двойном касании)

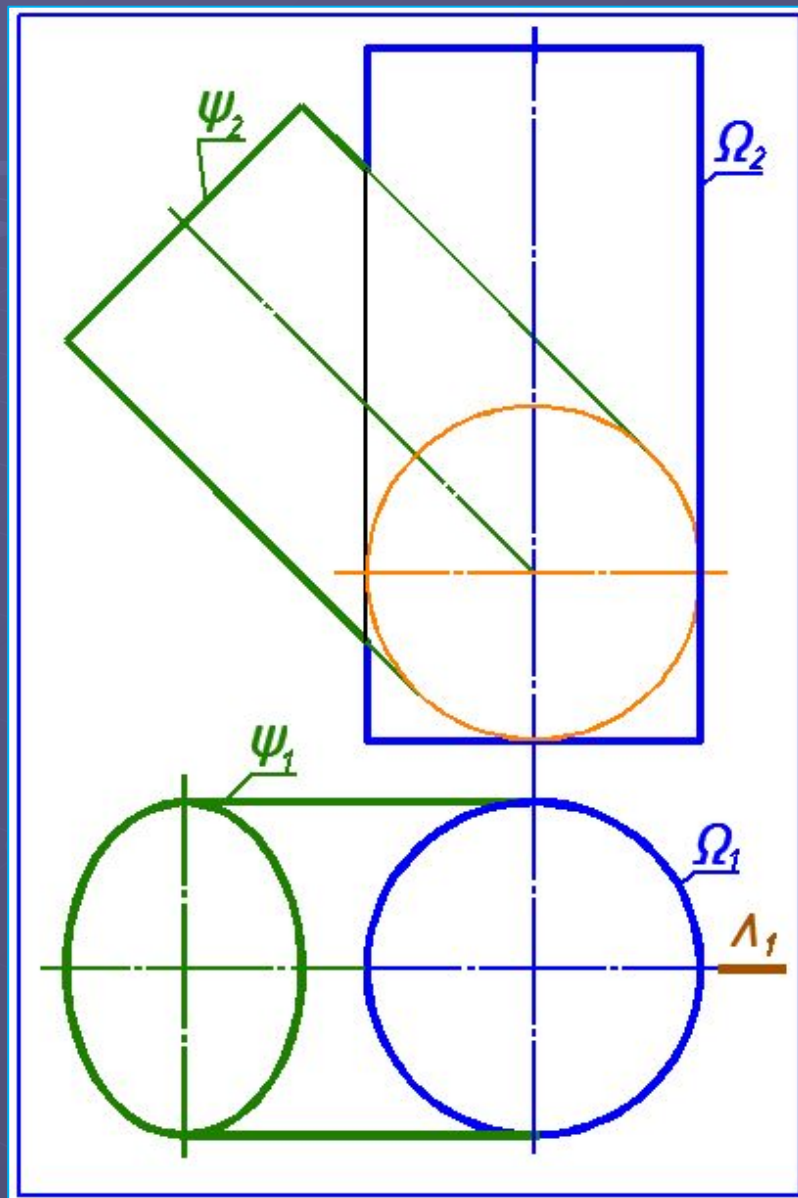
Если две поверхности второго порядка **имеют касание в двух точках**, то линия их пересечения **распадается на две плоские кривые второго порядка**, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки касания (**1** и **2**).



Теорема 2 (о двойном касании)

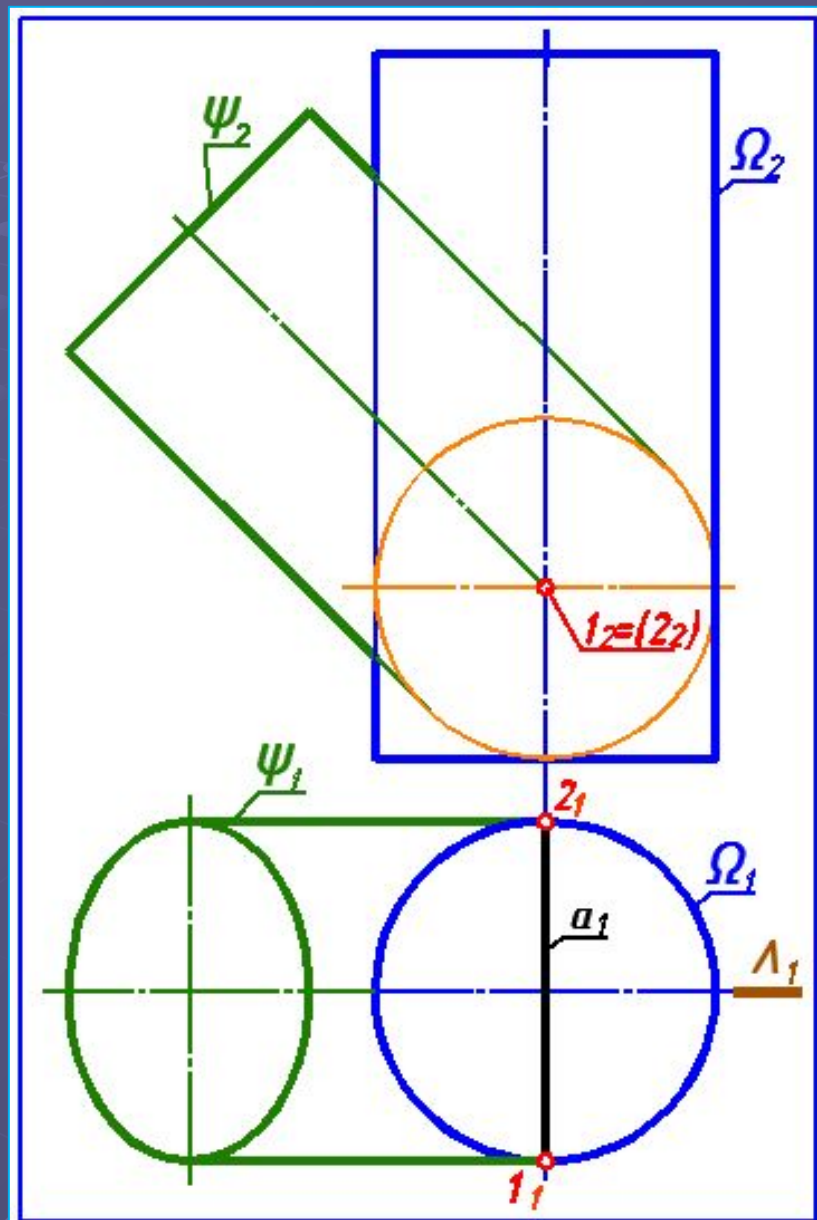
Задача. Построить линию пересечения цилиндров ψ и Ω .

1. Заданы две поверхности вращения, имеющие точки касания. Имеется общая плоскость симметрии Λ .



Теорема 2 (о двойном касании)

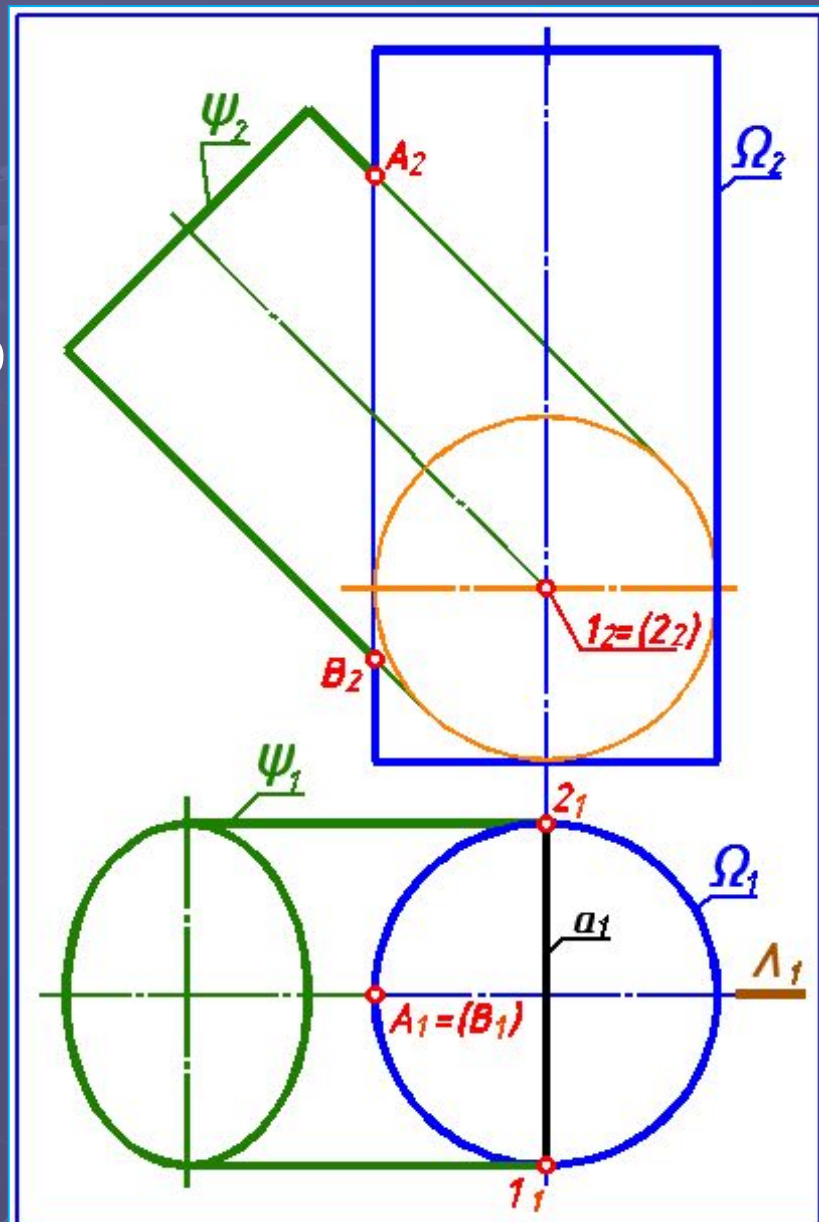
Находим точки **1** и **2** касания цилиндра ψ с цилиндром Ω .
Находим линию $a(1,2)$.
2. Если две поверхности второго порядка имеют касание в двух точках (**1** и **2**), то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую a , соединяющую точки касания.



Теорема 2 (о двойном касании)

3. Опорные точки.

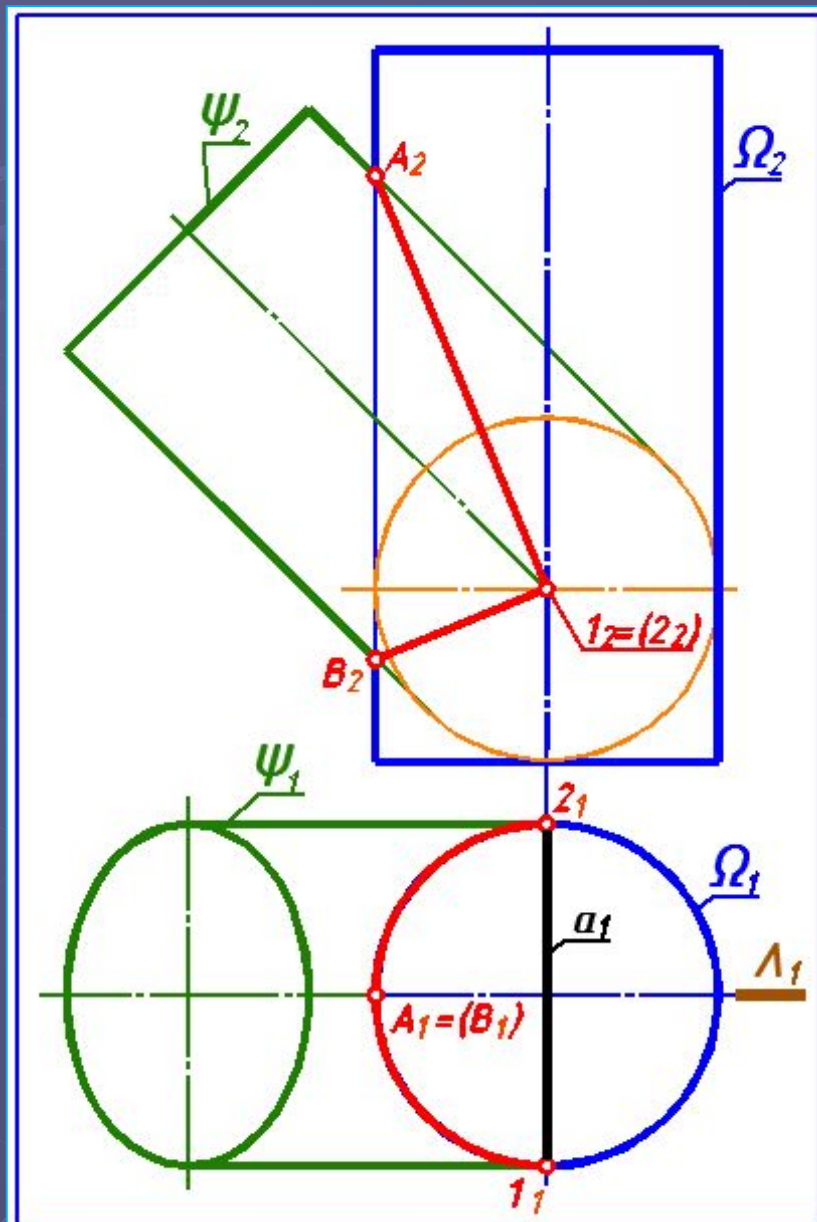
Экстремальные относительно Π_1 (они же очерковые на Π_2) точки A и B построены с помощью общей плоскости симметрии Λ , которая пересекает цилиндры по очерковым образующим.



Теорема 2 (о двойном касании)

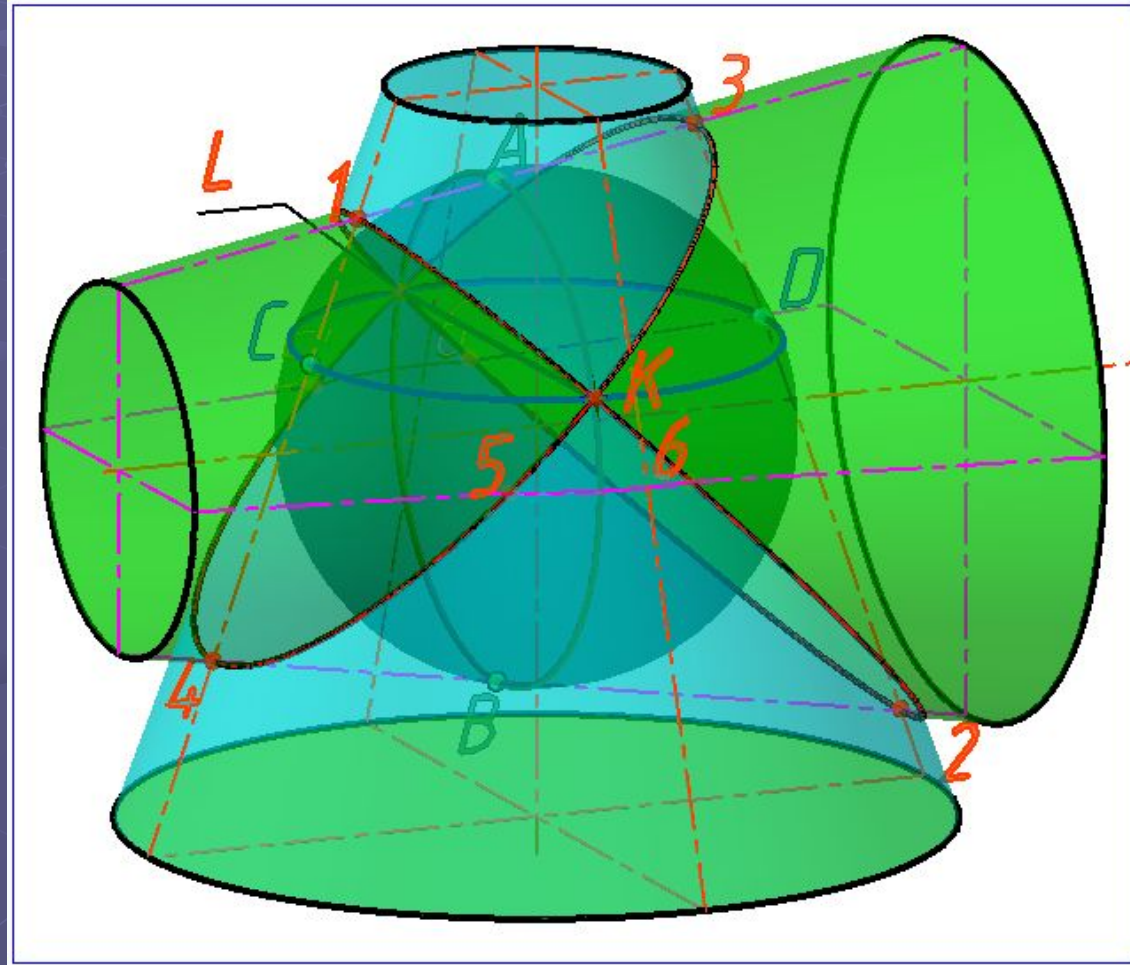
4. Определять промежуточные точки нет необходимости так как проекция линии пересечения на Π_1 совпадает с частью проекции вертикального цилиндра Ω .

5. Соединив найденные точки $(A, 1, B)$, получим проекции частей эллипсов, которые на Π_2 , проецируются в отрезки $[A1]$ и $[1B]$.

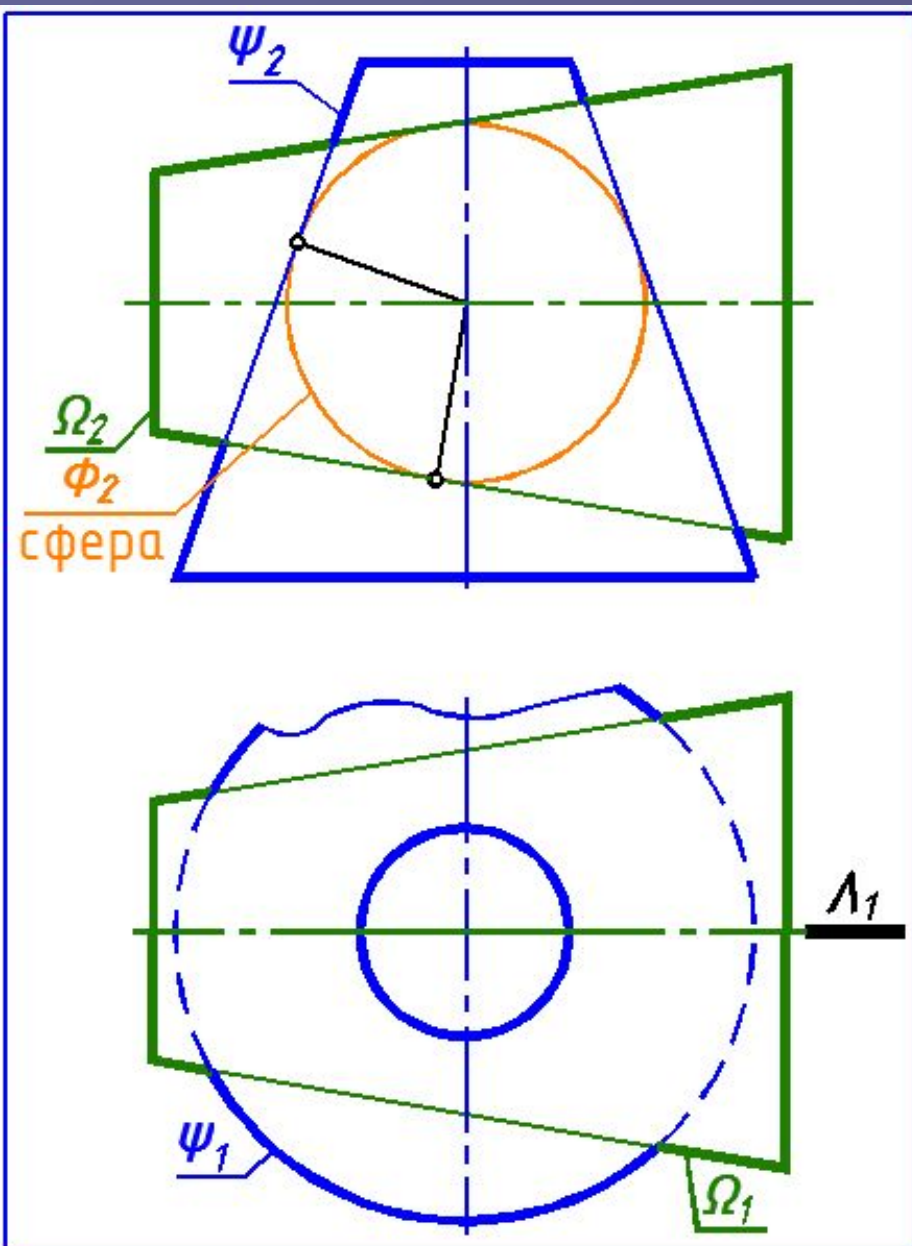


Теорема Монжа

Если две поверхности второго порядка описаны около третьей поверхности второго порядка, или вписаны в нее, то они пересекаются по двум плоским кривым второго порядка, плоскости которых проходят через прямую (KL), соединяющую точки пересечения линий касания (AB и CD).



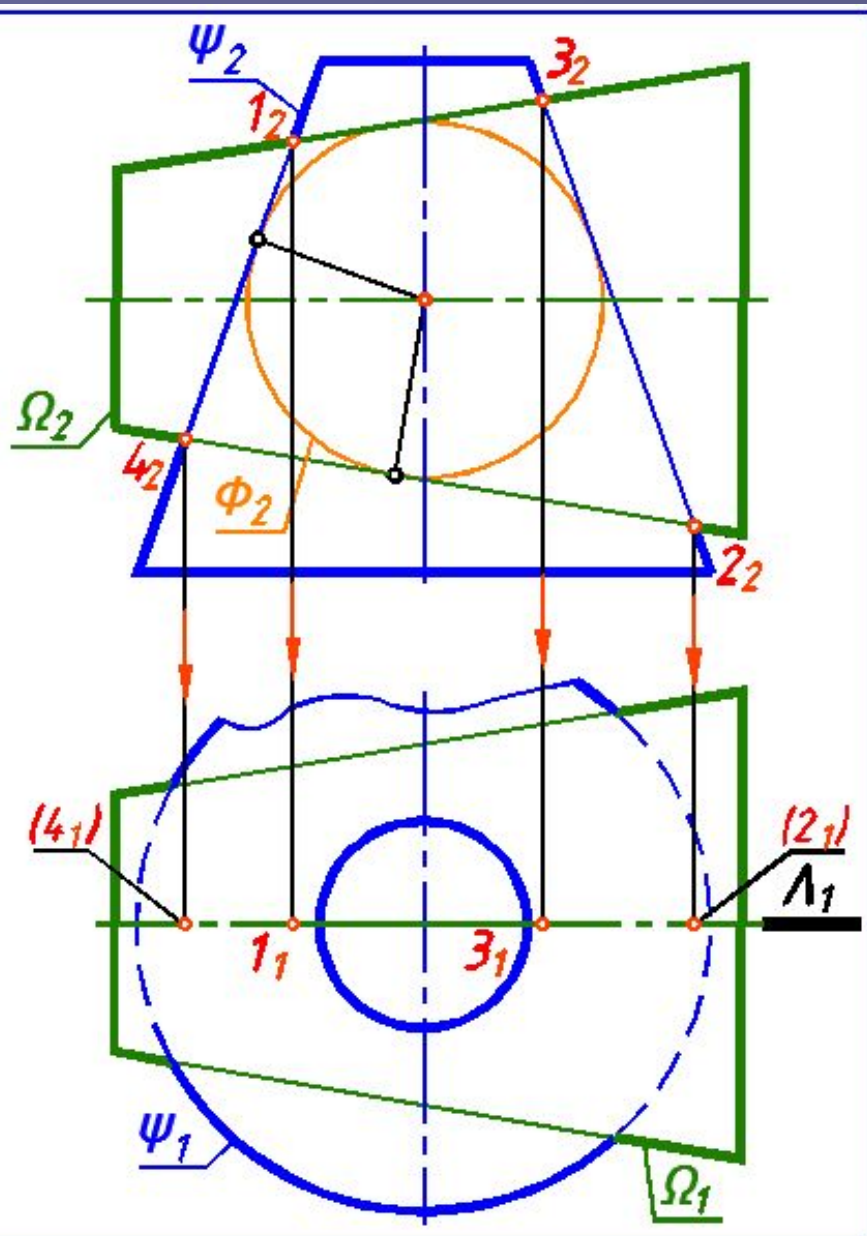
Теорема Монжа



Задача. Построить проекции линии пересечения поверхностей конуса (Ω) и вертикального конуса (Ψ). Определить видимость.

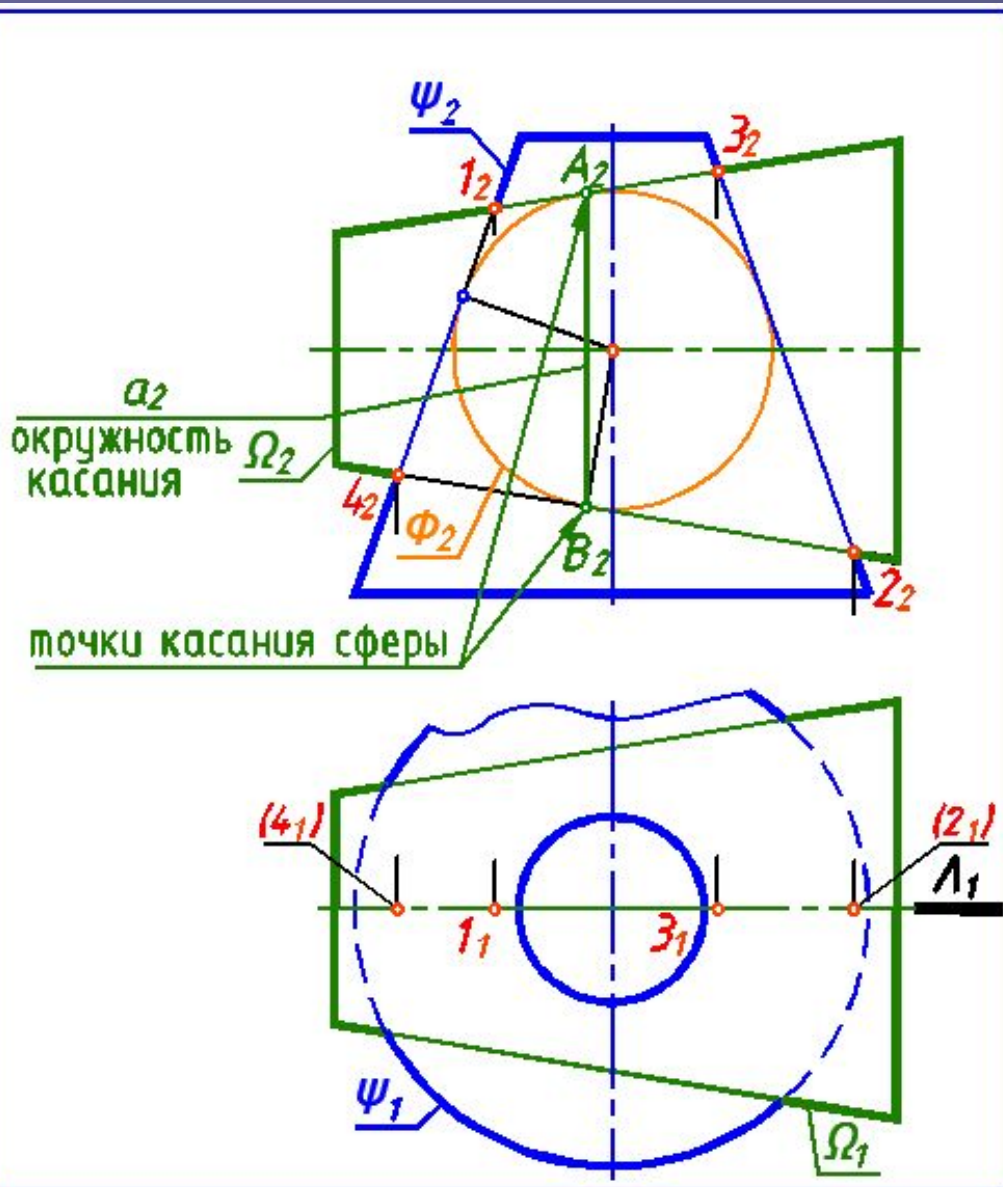
1. Заданы две поверхности вращения, описанные вокруг сферы Φ .
2. На основании теоремы Монжа искомая линия пересечения - две плоские кривые второго порядка.

Теорема Монжа



3. Опорные точки. Экстремальные (они же очерковые относительно Π_2) точки **1, 2, 3** и **4** построены с помощью общей плоскости симметрии Λ (очерк – ось).

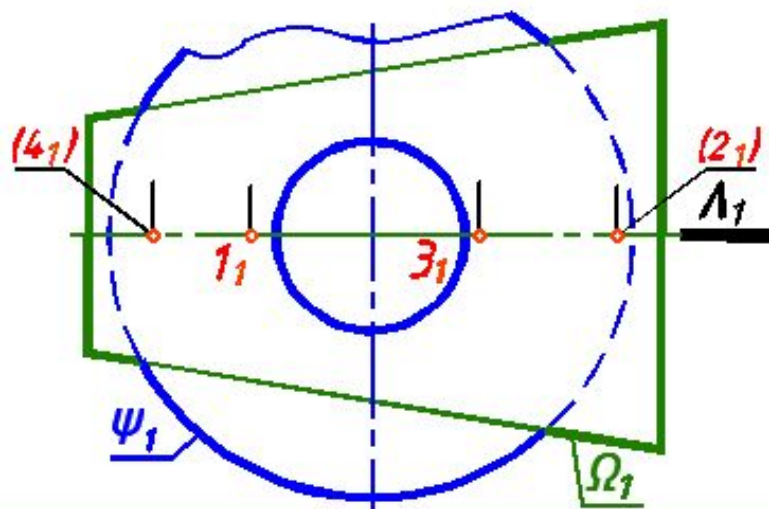
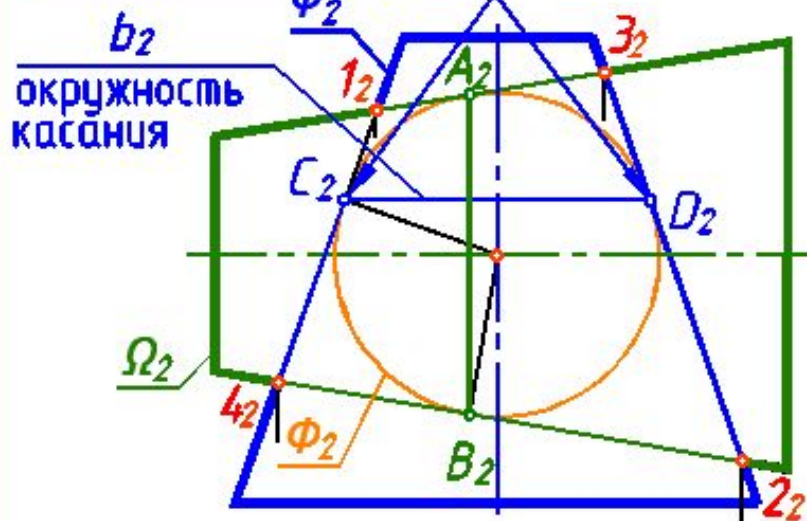
Теорема Монжа



Находим линию $a(AB)$ касания сферы Φ и конуса Ω , соединив точки касания A и B .

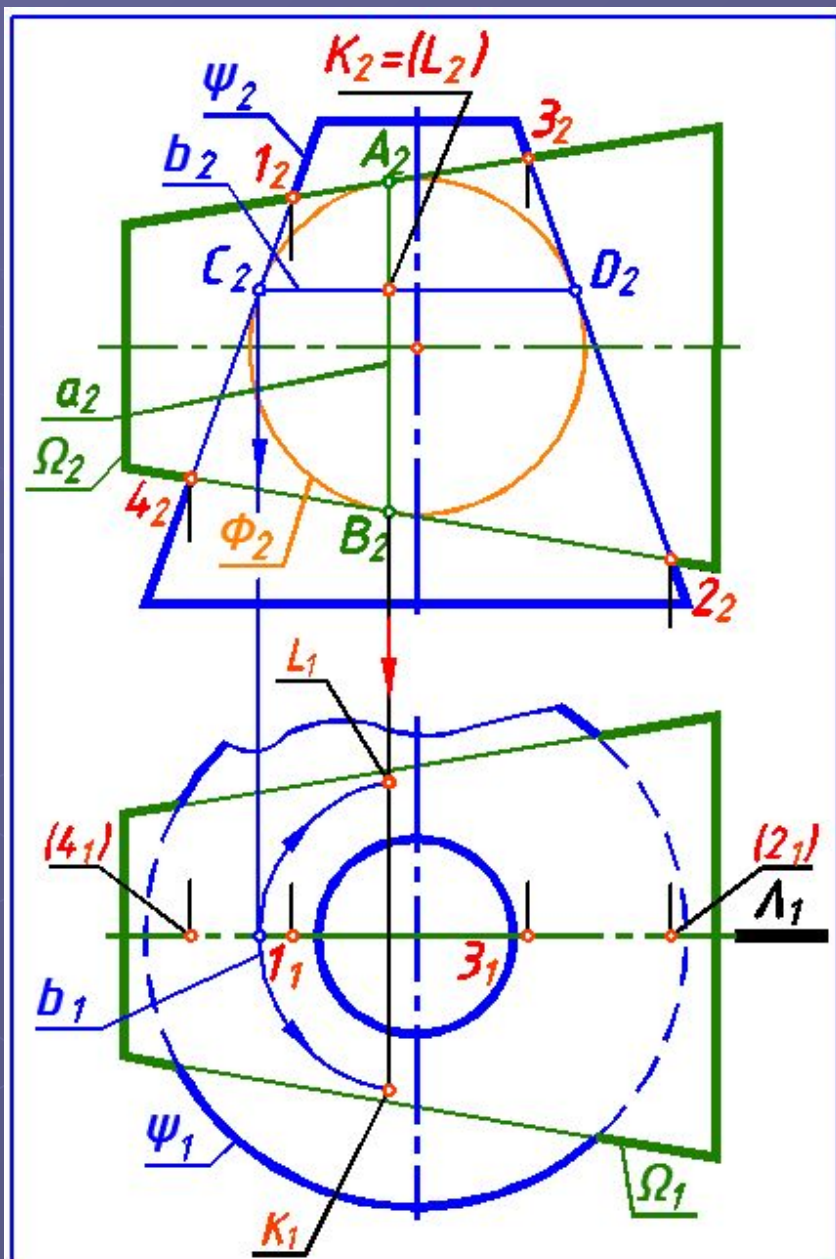
Теорема Монжа

точки касания сферы



Находим линию b (CD) касания сферы Φ и вертикального конуса Ψ , соединив точки касания C и D .

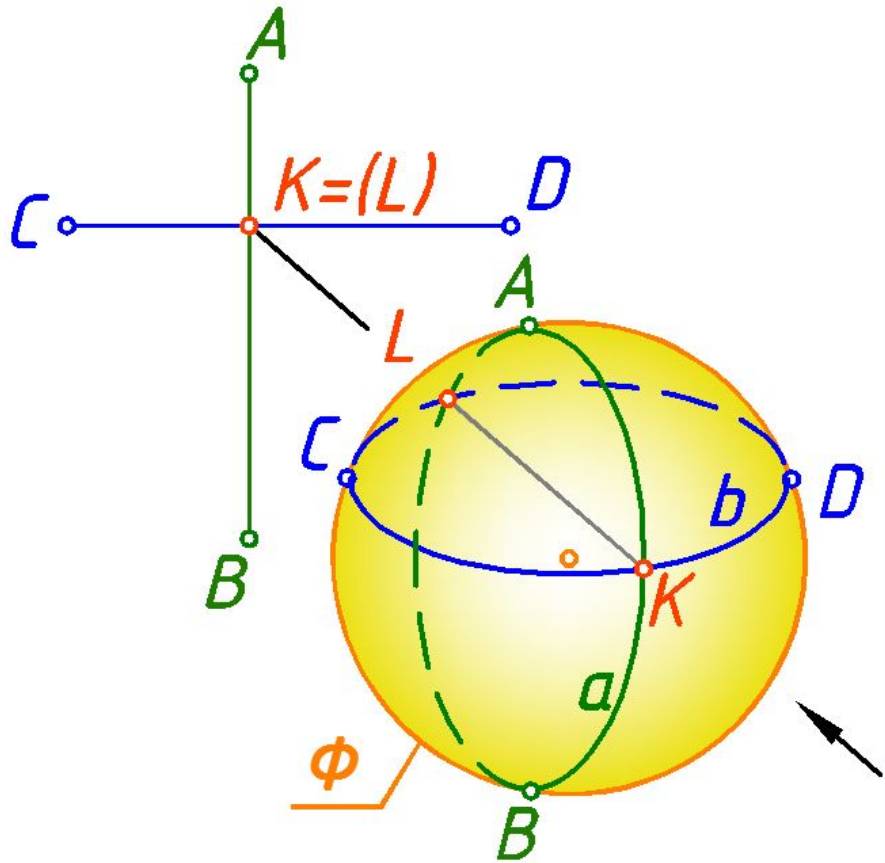
Теорема Монжа



Определяем прямую **KL** , соединяющую точки пересечения линий **$a(AB)$** и **$b(CD)$** касания сферы Φ и конусов Ω и Ψ .

Горизонтальные проекции точек **K** и **L** найдены из условия принадлежности их поверхности конуса Ψ с помощью параллели **b** (радиус – от оси до очерка).

Особые случаи пересечения кривых поверхностей



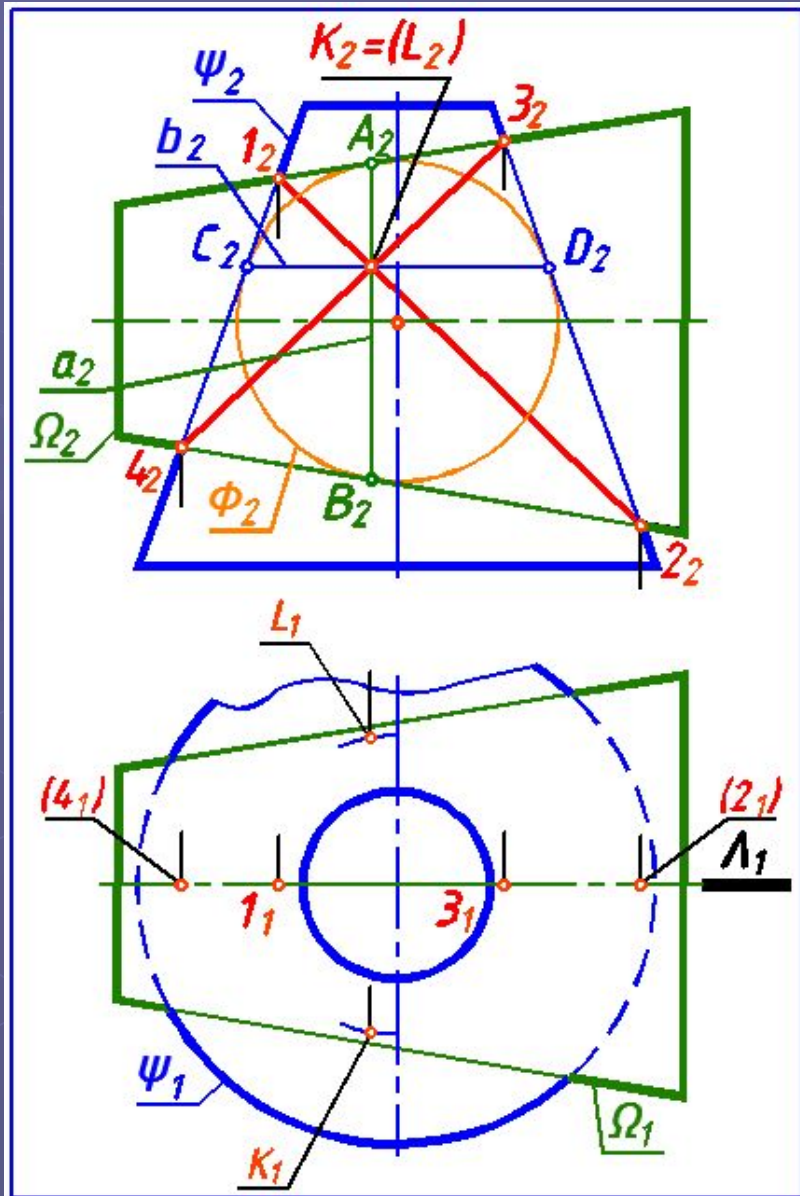
Сфера Φ касается конуса Ω по окружности $a(AB)$.

Сфера Φ касается конуса Ψ по окружности $b(CD)$.

Определяем отрезок KL , в пересечении окружностей $a(AB)$ и $b(CD)$.

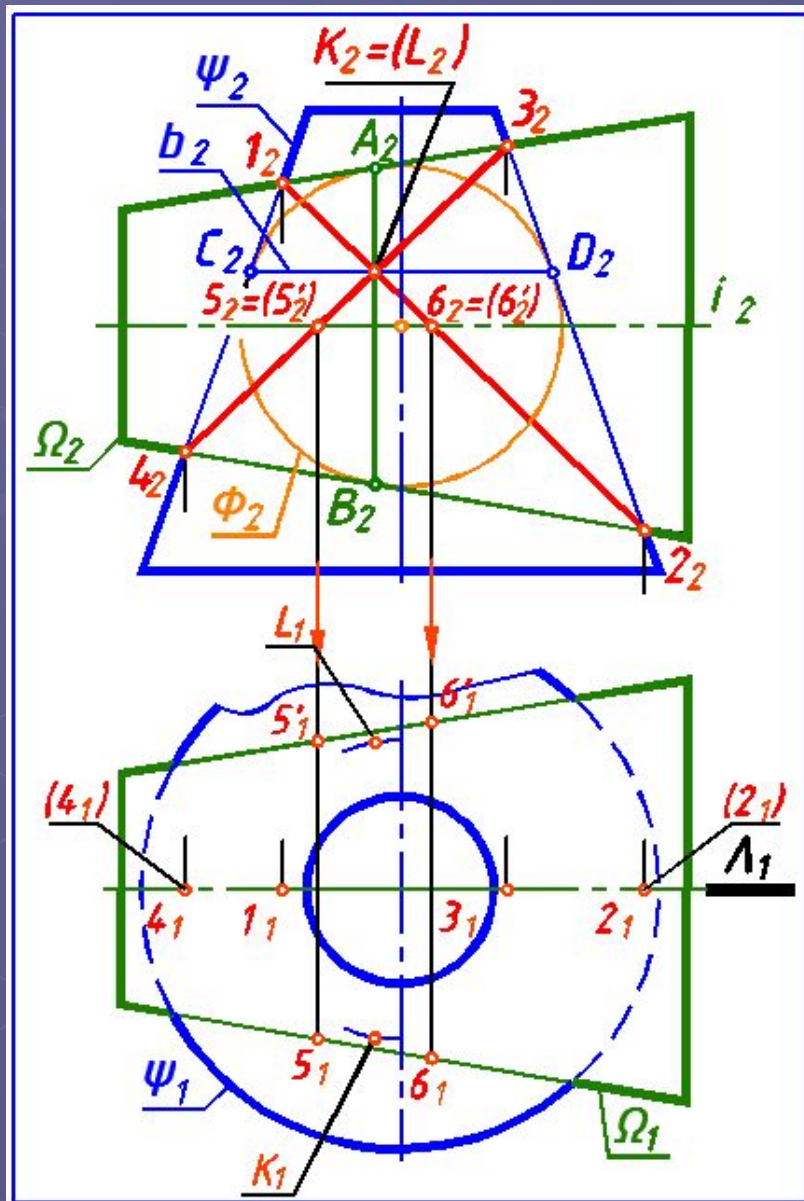
Окружности a и b на Π_2 проецируются в отрезки AB и CD , а отрезок KL – в точку.

Особые случаи пересечения кривых поверхностей



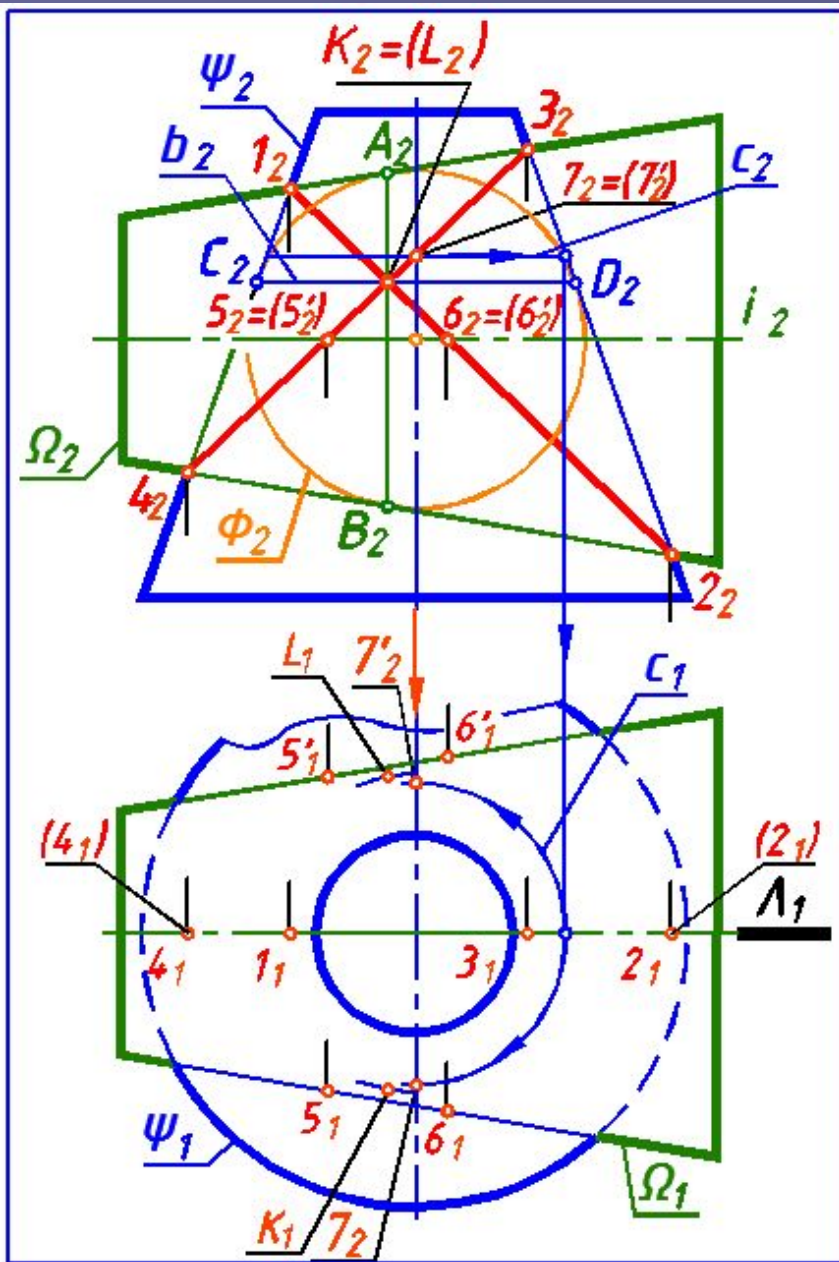
На основании теоремы
Монжа **искомая линия**
пересечения распалась на
две плоские кривые второго
порядка (**1-2** и **3-4**),
плоскости которых проходят
через прямую **KL**.

Теорема Монжа



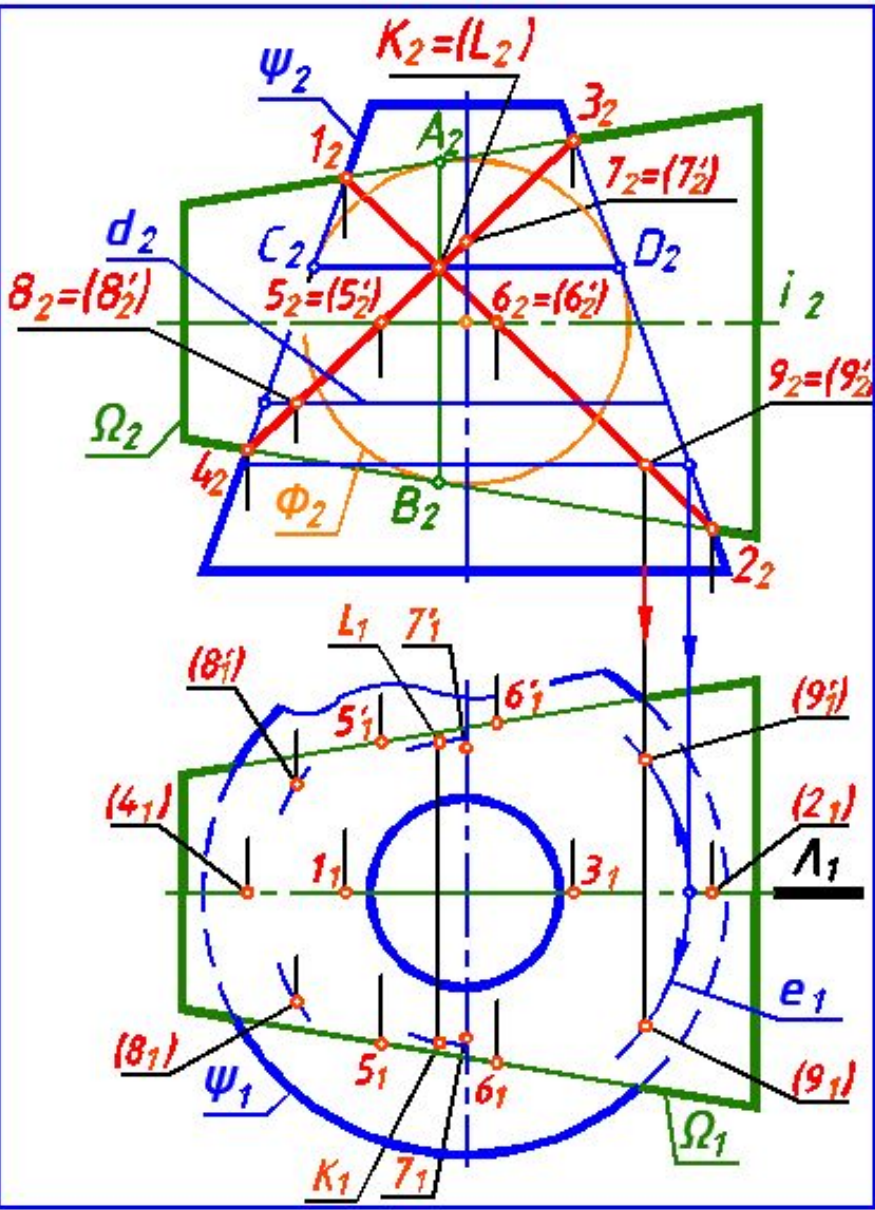
После построения проекции линии пересечения на Π_2 находим очерковые относительно Π_1 точки $5, 5'$ и $6, 6'$ из условия принадлежности горизонтальным очерковым образующим конуса Ω (ось – очерк).

Теорема Монжа



Очерковые относительно Π_3 точки 7 , и $7'$ линии пересечения найдены из условия принадлежности их поверхности конуса Ψ с помощью параллели c (радиус от оси до очерка).

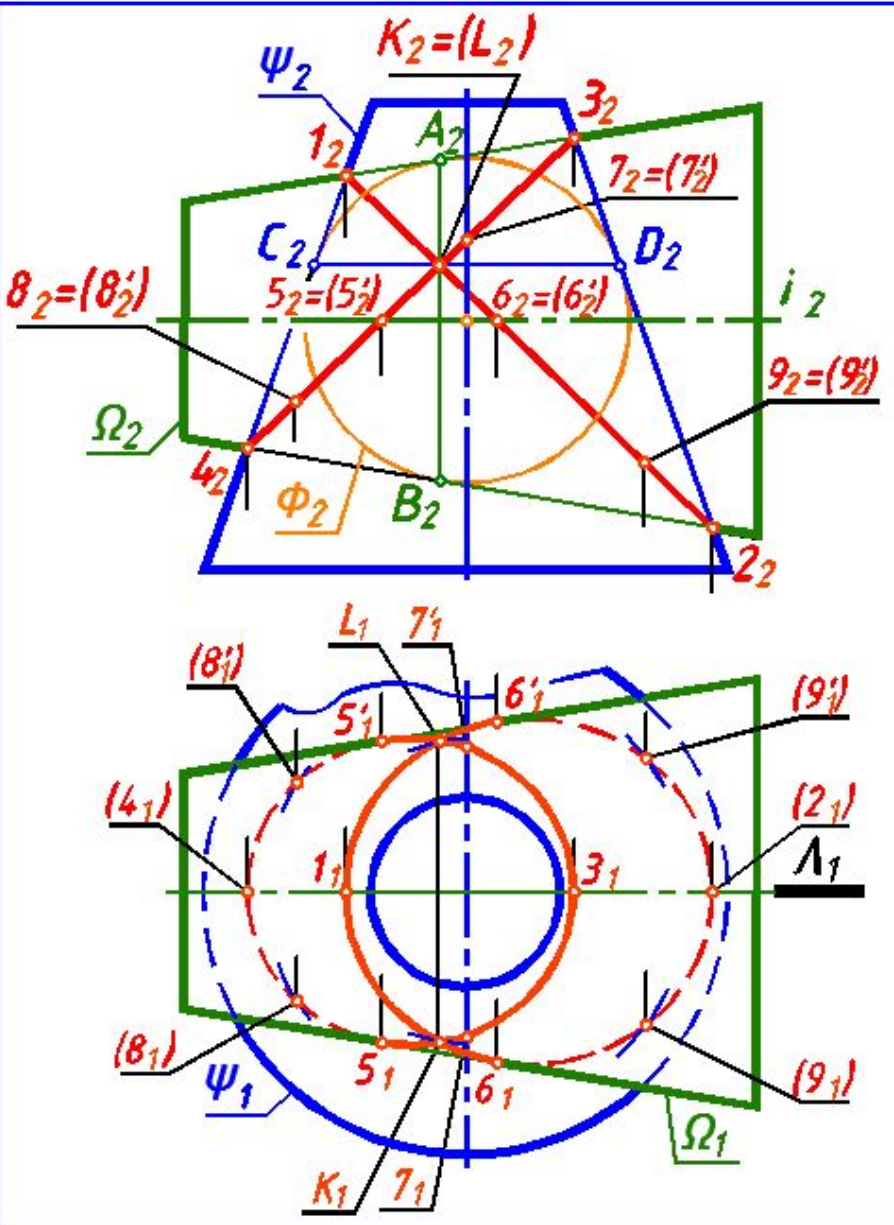
Теорема Монжа



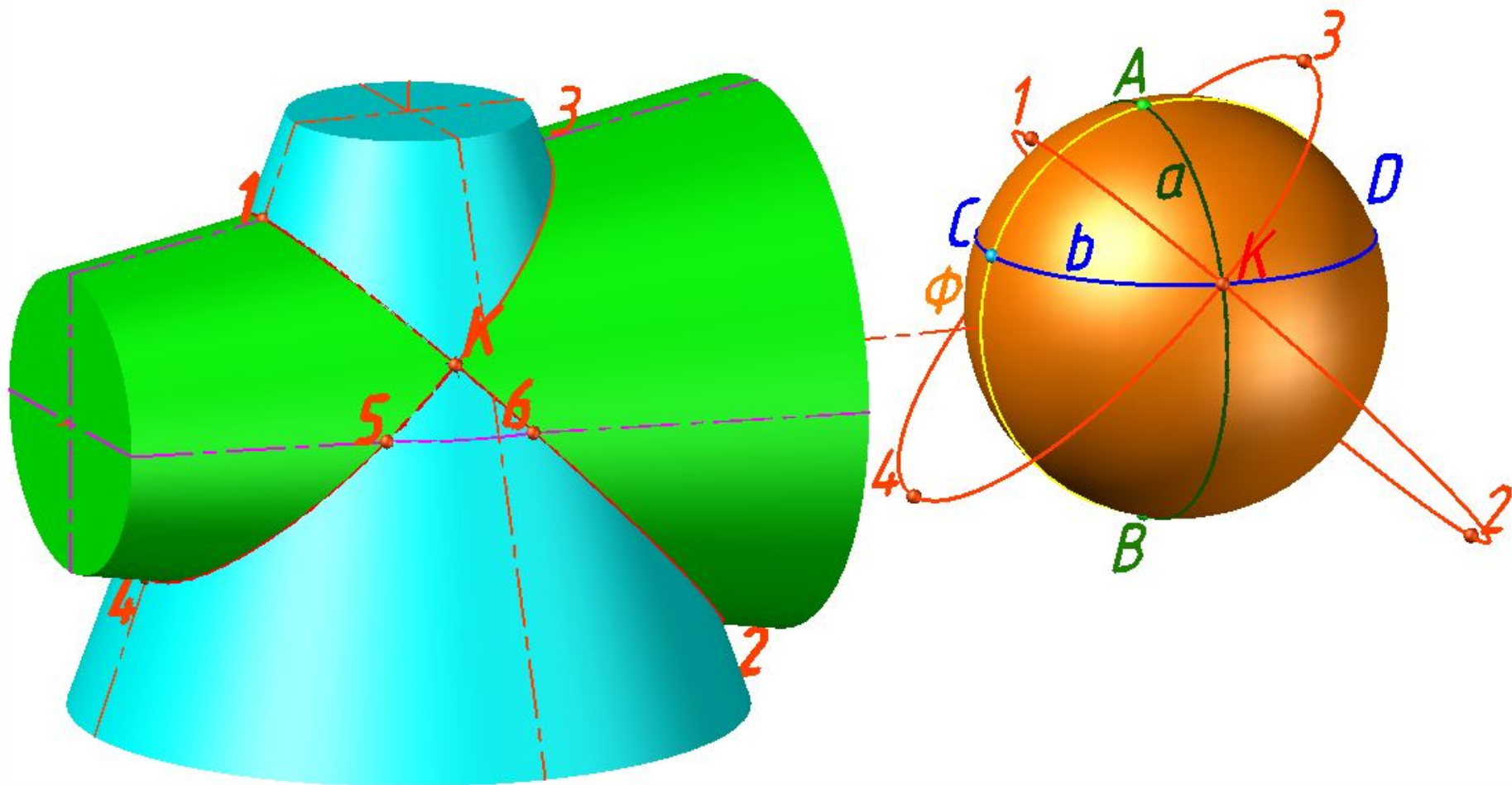
4. Промежуточные точки **8**, и **8'** линии пересечения найдены из условия принадлежности их поверхности конуса Ψ с помощью параллели d . Промежуточные точки **9**, и **9'** линии пересечения найдены из условия принадлежности их поверхности конуса Ψ с помощью параллели e .

Теорема Монжа

5) Соединив полученные точки плавной кривой с учетом видимости, получим горизонтальную проекцию линии пересечения заданных поверхностей. Точки **5, 5', 6, 6'** – точки смены видимости. Доводим **очерк конуса Ω** до этих точек.



Теорема Монжа

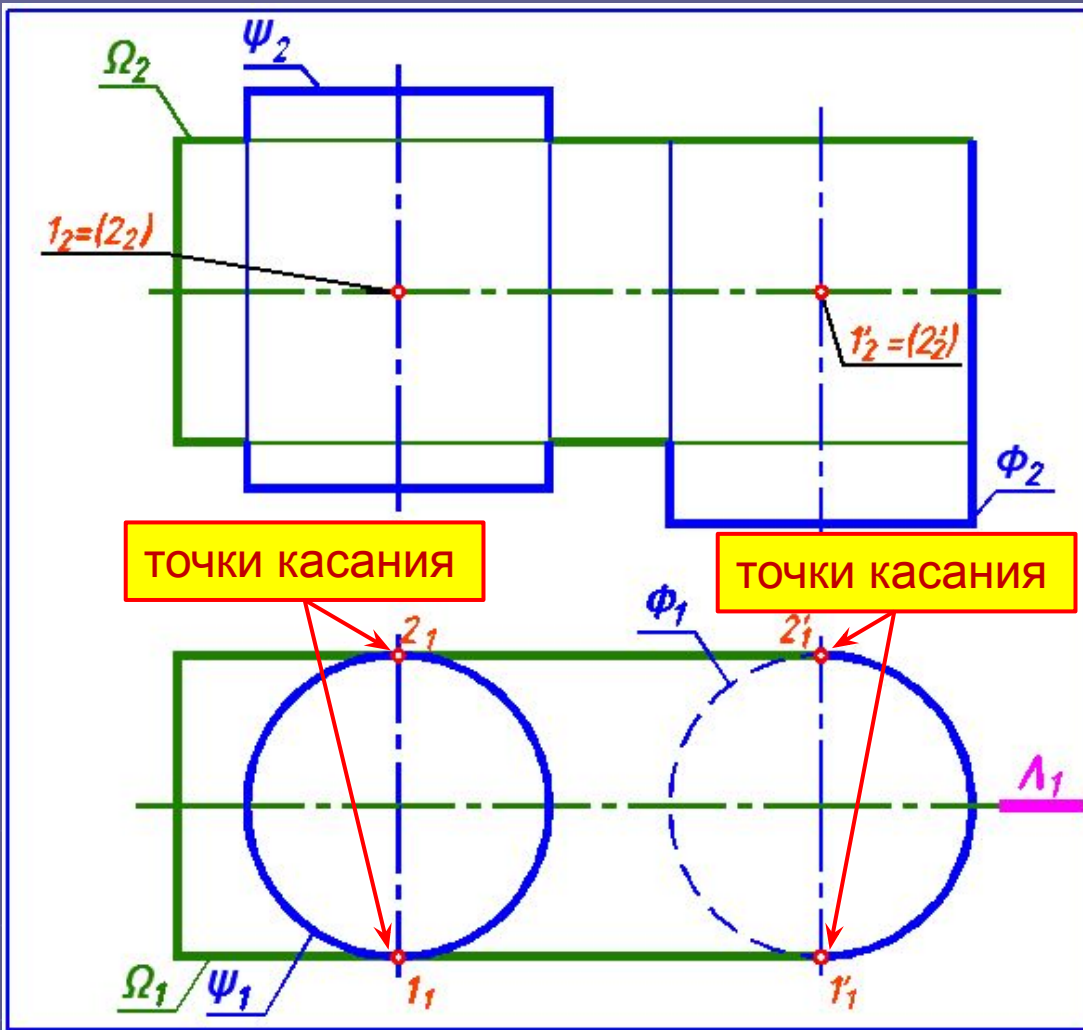


На основании теоремы Монжа линия пересечения конусов, описанных вокруг сферы, распалась на **две плоские кривые** (эллипсы), имеющие общие точки **K** и **L**

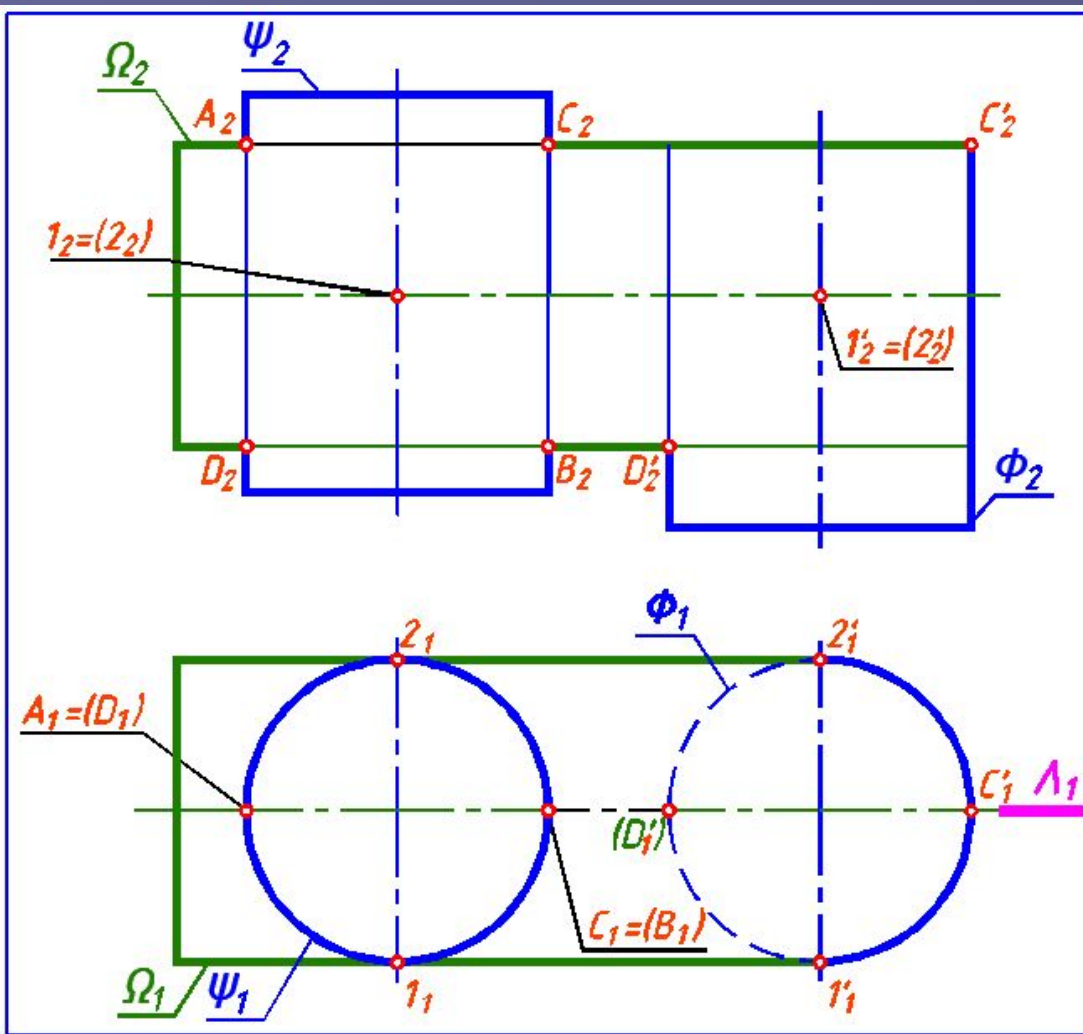
Теорема о двойном касании

Задача. Построить проекции линий пересечения горизонтального цилиндра (Ω) и вертикальных цилиндров (Ψ) и (Φ). Определить видимость.

1. Заданы поверхности второго порядка, имеющие точки касания **1**,
- 2**. Имеется общая плоскость симметрии Λ , параллельная Π_2 .



Теорема о двойном касании

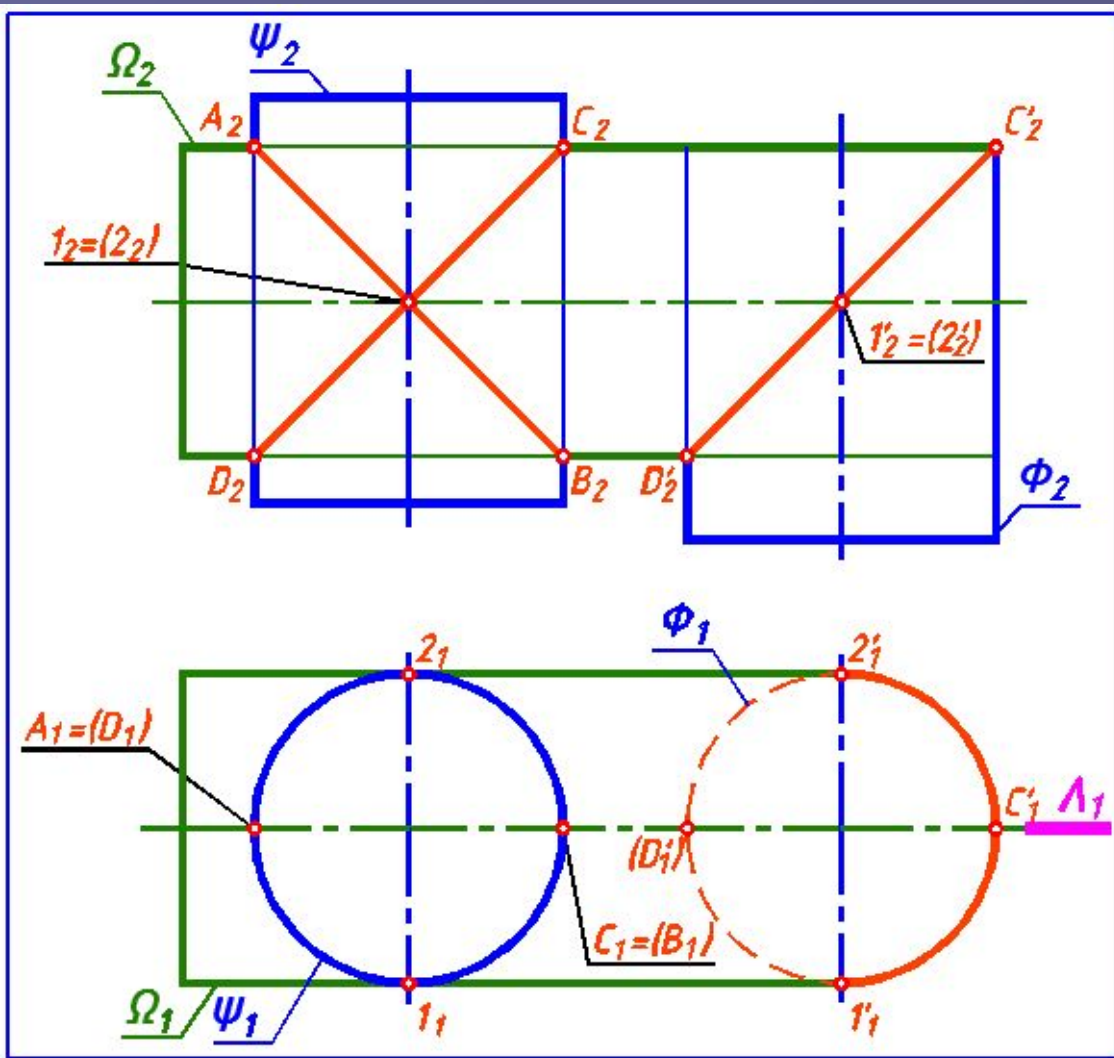


2. Линия пересечения цилиндров Ω и Ψ – две кривые второго порядка (эллипса), плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки касания **1, 2**.

Линия пересечения цилиндров Ω и Φ – кривая второго порядка (эллипс), плоскость которой проходит через прямую, соединяющую точки касания **1, 2**.

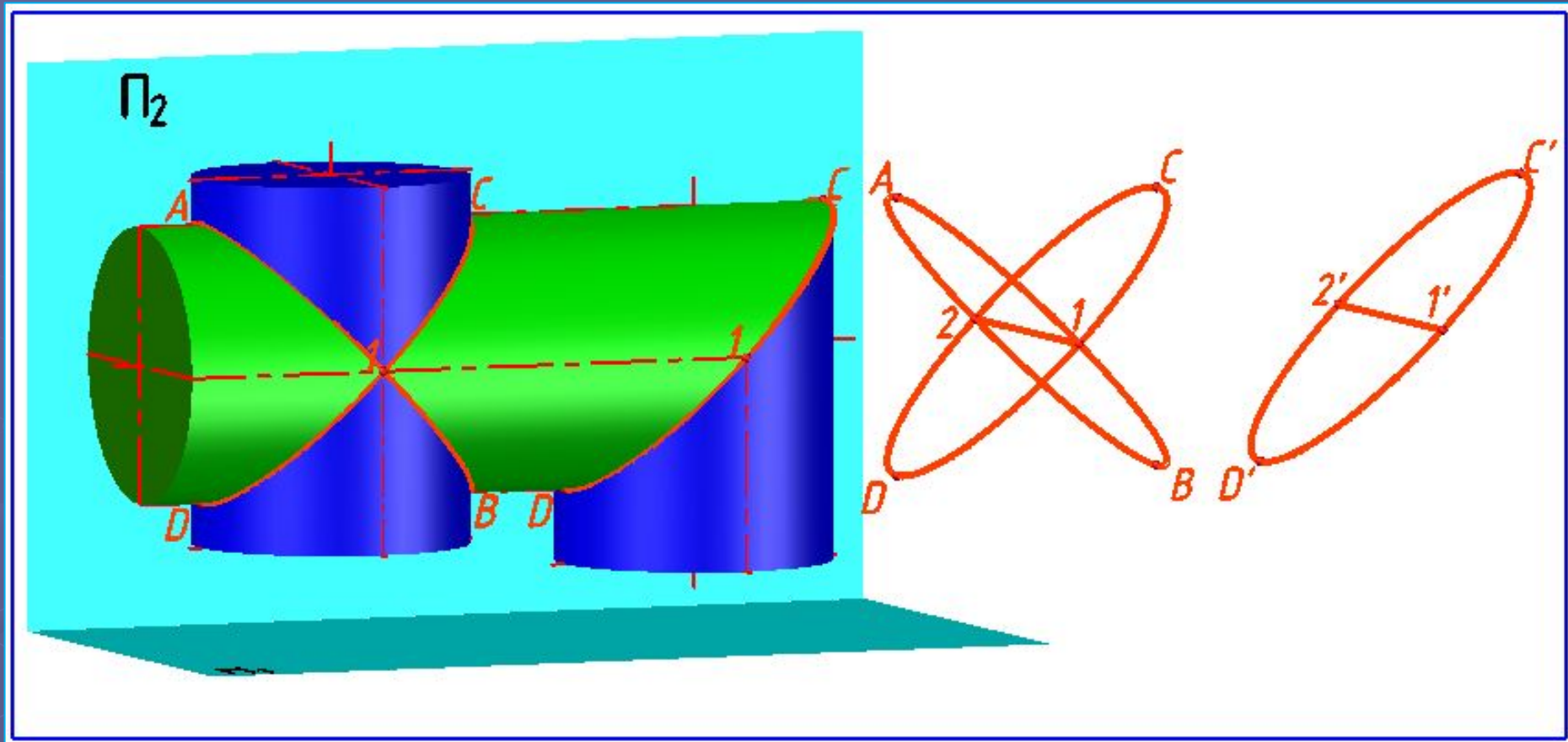
3. Опорные точки: **A, B, C, D, C', D'** – экстремальные (в тоже время очерковые), найдены с помощью общей плоскости симметрии Λ .

Теорема о двойном касании



- Находим фронтальные проекции линий пересечения:
 - от A до B через $1, 2$;
 - от D до C через $1, 2$;
 - от D' до C' через $1', 2'$.
- Горизонтальные проекции линий пересечения совпадают с проекциями вертикальных цилиндров.

Теорема о двойном касании



Теорема 2. Если две поверхности второго порядка имеют касание в двух точках, то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки касания (1 и 2).