

**Оценка параметров генеральной
совокупности
(генеральные параметры).**

План лекции

- 1. Методы группировки экспериментальных данных.**
- 2. Точечная оценка параметра.**
- 3. Интервальная оценка параметра.**

Методы группировки экспериментальных данных

- Допустим, из генеральной совокупности извлечена выборка объемом n , измерена некоторая величина X , в результате чего получен ряд значений x_1, x_2, \dots, x_n .
- Этот ряд называется **простым статистическим рядом**.

Пример: измерена масса тела 10 девочек 6 лет.
Полученные данные образуют простой
статистический ряд:

24 22 23 28 24 23 25 27 25 25

- Отдельные значения статистического ряда называются *вариантами*.
- Если варианта x_i появилась f раз, то число f называют *частотой*, а ее отношение к объему выборки f/n – *относительной частотой*.
- Последовательность вариантов, записанная в возрастающем (убывающем) порядке, называется *ранжированным рядом*.

Пример: *Ранжированный ряд:*

22 23 23 24 24 25 25 25 27 28

Таблица, в первой строке которой записаны все значения величины (варианты), во второй – соответствующие им частоты, называется безынтервальным *вариационным рядом*.

Пример: Безынтервальный вариационный ряд

x	22	23	24	25	27	28
m	1	2	2	3	1	1

Графическим изображением безынтервального вариационного ряда является полигон (рис. 1).

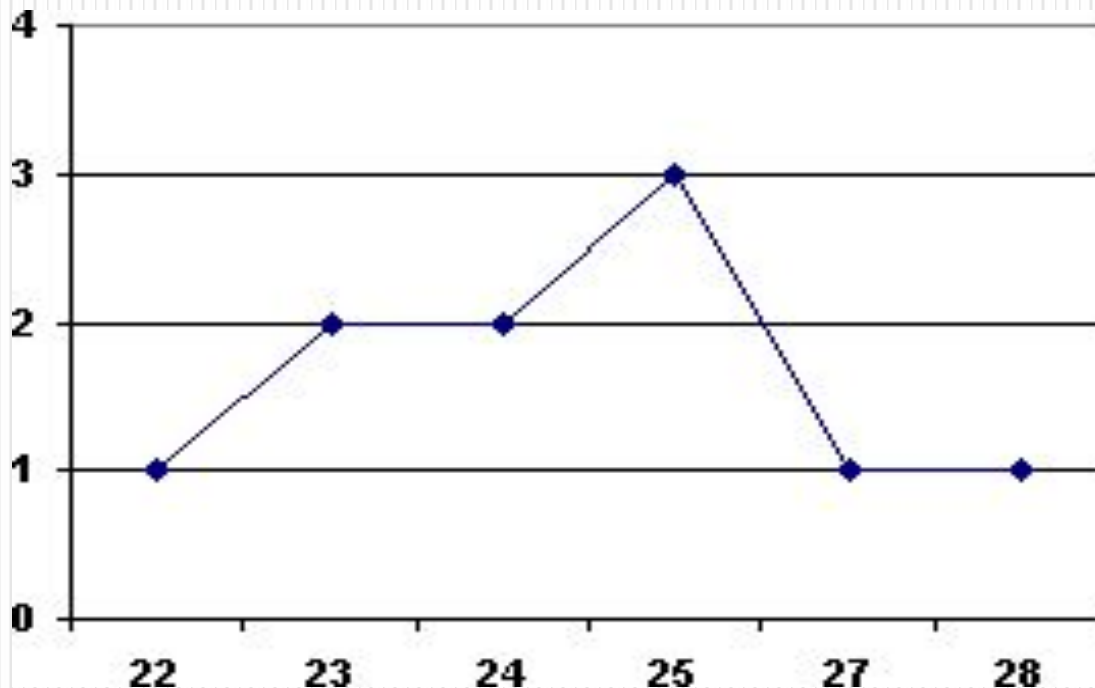


Рис. 1. Полигон вариационного ряда

Для его построения на оси ОХ откладывают значения вариантов, на оси ОУ – соответствующие им частоты.

Точки с координатами $(x_i; f_i)$ соединяют отрезками, полученная ломаная линия называется **полигоном частот**.

- Основными параметрами генеральной совокупности являются **математическое ожидание (генеральная средняя) $M(X)$** и **среднее квадратическое отклонение σ** .
- Это постоянные величины, которые можно оценить по выборочным данным. Оценка генерального параметра, выражаемая одним числом, называется **точечной**.

- Точечной оценкой генеральной средней m является выборочное среднее .
- Выборочным средним называется среднее арифметическое всех значений величины, встречающихся в выборке.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Пример: Вычислить среднее значение массы тела девочек 6 лет.

$$\bar{X} = \frac{24 + 22 + 23 + 28 + 24 + 23 + 25 + 27 + 25 + 25}{10} = 24,6$$

Если выборочное среднее вычисляется по вариационному ряду, то находят сумму произведений вариант на соответствующие частоты, и делят на количество элементов в выборке.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{n}$$

Пример: Вычислить среднее значение массы тела девочек 6 лет (ранжированный ряд – 22 23 23 24 24 25 25 25 26 27).

$$\bar{X} = \frac{22 + 23 \cdot 2 + 24 \cdot 2 + 25 \cdot 3 + 26 + 27}{10} = 24,6$$

- Выборочное среднее является основной характеристикой положения, показывает центр распределения совокупности, позволяет охарактеризовать исследуемую совокупность одним числом, проследить тенденцию развития, сравнить различные совокупности.
- Непараметрическими характеристиками положения являются **мода** и **медиана**.
- **Модой** называется варианта, имеющая наибольшую частоту
- **Медианой** называется варианта, расположенная в центре ранжированного ряда.
- Если ряд состоит из четного числа вариантов, то медианой считают среднее арифметическое двух вариантов, расположенных в центре ранжированного ряда.

Пример: найти моду и медиану выборочной совокупности по массе тела девочек 6 лет

$$M_o = 25; M_e = 24,5$$

генеральные параметры

– выборочная средняя $\bar{x}_{\text{вп}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ |

– выборочная дисперсия $D = \sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

– выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

- **Пример.** *Определить основные статистические показатели результатов измерения роста студентов, если данные выборки таковы ($n=16$):*

**185, 171, 190, 170, 190, 178, 188, 174, 193,
178, 176, 180, 175, 176, 180, 192.**

Решение:

Для определения среднего арифметического используем формулу:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{(i)}}{n} = \frac{185 + 171 + \dots + 192}{16} = \frac{2896}{16} = 181 \text{ (см)}.$$

Выборочная дисперсия

$$d = \sum_{i=1}^n \frac{(x_{(i)} - \bar{x})^2}{n} = \frac{4 - 10 + \dots + 9}{16} = \frac{868}{16} = 54,25.$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{d} \approx 7,6.$$

Коэффициент вариации

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{7,6}{181} \cdot 100\% = 4,2\%.$$

Следовательно, по показателю роста студентов группа компактна, т.к. коэффициент вариации — 4,2 % (менее 10%).

● Для того чтобы статистические оценки давали «хорошие» приближения оцениваемых параметров, они должны быть:

- 1. несмещенными;**
- 2. эффективными;**
- 3. состоятельными.**

- *Определение.* Оценка называется **несмещенной**, если математическое ожидание ее выборочного распределения совпадает со значением генерального параметра.
- *Определение.* Точечная оценка называется **эффективной**, если она имеет наименьшую дисперсию выборочного распределения по сравнению с другими аналогичными оценками, т. е. обнаруживает наименьшую случайную вариацию.

- *Определение.* Точечная оценка называется **состоятельной**, если при увеличении объема выборочной совокупности она стремится к величине генерального параметра.
- Для выборки из нормальной генеральной совокупности эта оценка является эффективной, состоятельной и несмещенной.

Интервальная оценка параметра

- При выборке малого объема точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра, т.е. приводит к грубым ошибкам. По этой причине при небольшом объеме выборки следует пользоваться интервальными оценками.
- *Интервальной* называют оценку, которая определяется *двумя числами – концами интервала – доверительного интервала.*
- Интервальные оценки позволяют установить точность и надежность оценок.

- Знание величины ошибки репрезентативности недостаточно, чтобы быть уверенным в результатах выборочного исследования, т.к. конкретная ошибка одного выборочного наблюдения может быть больше (меньше) средней ошибки выборки.
- Поэтому на практике определяют так же пределы возможных ошибок выборки или **предельную ошибку выборки (Δ)**.
- Т.к. предельная ошибка может быть как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения, то говорят о **доверительном интервале** или доверительных границах, в пределах которых будет находиться показатель генеральной совокупности на основании данных выборочного исследования.

- Для оценки генерального параметра с помощью доверительного интервала необходимы три величины:
 1. значение выборочного показателя;
 2. критерий надежности t , или показатель безошибочных прогнозов, значение которого определяется заранее, при планировании исследования, исходя из представления о большей или меньшей ответственности возможных результатов работы;
 3. ошибка репрезентативности m или показатель точности выборочного параметра (определяется на основе выборочных данных по формулам математической статистики).

- Если признак генеральной совокупности распределён нормально, то интервальную оценку производят, используя интервал Стьюдента:

$$\bar{x} - t_{\gamma} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq X \leq \bar{x} + t_{\gamma} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- t_{γ} - критерий достоверности или критерий Стьюдента, который показывает, с какой вероятностью данные выборки совпадут с данными генеральной совокупности (определяется по таблице Стьюдента);
- γ - доверительная вероятность.

<i>n/γ</i>	0,95	0,99	0,999	<i>n/γ</i>	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,361	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

- Для большинства медицинских исследований допускают $p = 0,95$ или **95%**. В этом случае вероятность выхода результата выборочного исследования за границы доверительного интервала, т. е. вероятность ошибки составляет **0,05** или **5%**.
- Поэтому говорят, что результат исследования получен с уровнем значимости **0,05** ($p=0,05$).
- При необходимости более строгой оценки $p=0,99$ (**99%**), вероятность ошибки составит **0,01** (**1%**) и следовательно уровень значимости будет $p=0,01$

Виды интервалов

- нижняя граница последующего интервала повторяет верхнюю границу последующего интервала.
- С индивидуальными границами в интервал входят верхняя и нижняя границы.
- открытый интервал, интервал с одной границей
- При расчетах по интервальному вариационному ряду за X_i принимается середина интервала.

При построении интервального вариационного ряда необходимо выбрать оптимальное количество групп, самый распространенный способ по формуле Стерджесса

$$k=1+3.32\lg n$$

k – количество интервалов

n – объем совокупности

При расчетах почти всегда получают дробные значения, округления производить до целого числа.

Длина интервала – l

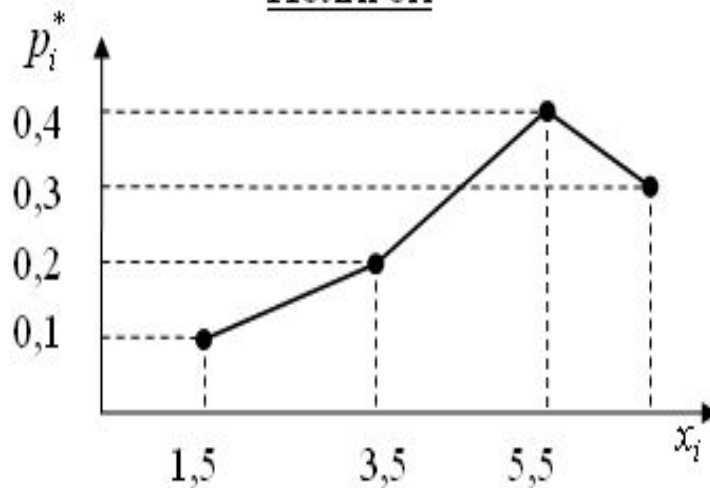
$$l = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{k}$$

- Интервалы могут быть как равные, так и нет. При изучении вариационного ряда существенную помощь оказывает графическое изображение.

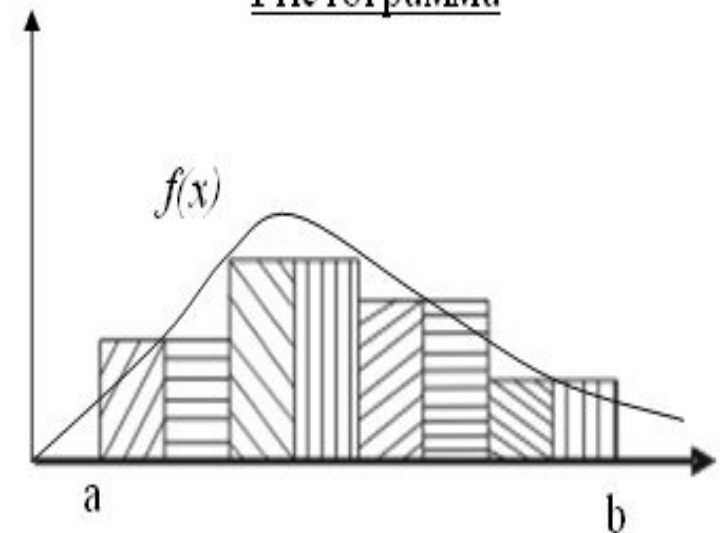
Пример. Построение полигона и гистограммы для данного вариационного ряда:

x_i	1,5	3,5	5,5	7,5
p_i^*	0,1	0,2	0,4	0,3

Полигон



Гистограмма



Правило «трех сигм»

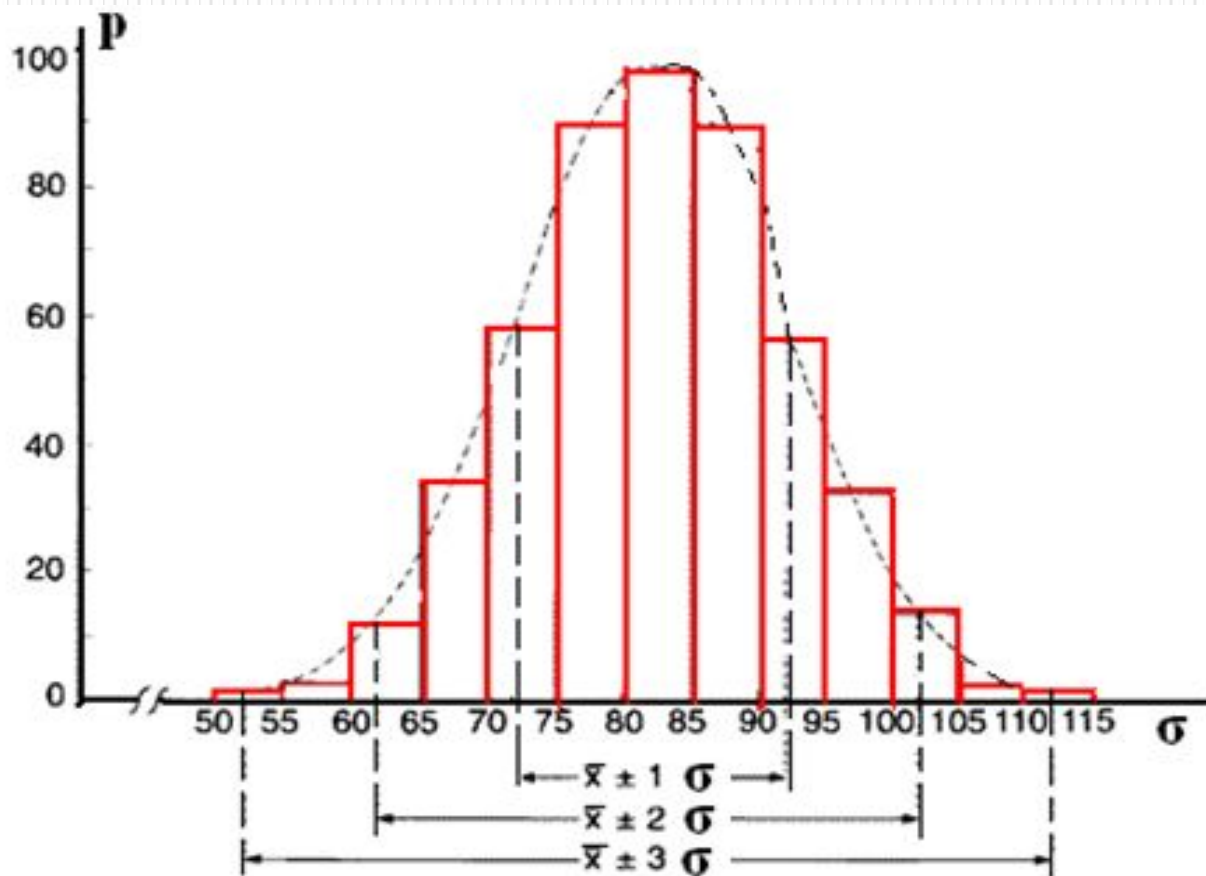


Рис. Правило «трех сигм» (σ – стандартное отклонение).

- 68.3 % всех вариант отклоняются от своей средней не более чем на σ
- 95.4% вариант находятся в пределах $X \pm 2\sigma$
- 99.7% вариант находятся в пределах $X \pm 3\sigma$

- Отклонение параметра от его средней арифметической в пределах σ расценивается как **норма**.

- **Субнормальным** считается отклонение в пределах $\pm 2\sigma$.

- **Патологическим** - сверх этого предела, т.е. $> \pm 2\sigma$

КОНЕЦ