Оценка работ учащихся

1. *Разложите на множители:* x^2y+1-x^2-y.

Пример 1.

№19. $x^2y+1-x^2-y=x^2y-x^2+1-y=x^2(y-1)-1(y-1)=(x^2-1)(y-1)$

Пример 2.

19. $x^2y+1-x^2-y=x^2(y-1)+1-y=$

$=(y-1)(x^2+1)$

1. Решение не содержит ошибок, но разложение на множители не доведено до конца.
2. За решение выставляется 0 баллов; допущена ошибка в знаках при группировке слагаемых .

1. *Разложите на множители:* x^2y+1-x^2-y.

Ответ: $(y-1)(x-1)(x+1)$.

Решение. $x^2y+1-x^2-y=x^2(y-1)-(y-1)=(y-1)(x^2-1)=(y-1)(x-1)(x+1)$.

2. *Сократите дробь* $\dfrac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x}$.

<u>Пример 1.</u>

19) $\dfrac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x}=\dfrac{\cancel{5}(x-1)\cancel{(x+0,4)}}{\cancel{5}x\cancel{(x+0,4)}}=\dfrac{x-1}{x}$

$5x^2-3x-2=0;$

$D=9+40=49;$

$x=\dfrac{3\pm7}{10};\quad x_1=1;\ x_2=-0,4;$

Все шаги выполнены верно, получен правильный ответ.

2. *Сократите дробь* $\dfrac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x}$.

Пример 2.

1)

$$\frac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x}=\frac{5(x-1)(x+0,4)}{5x^2+2x}=\frac{(x-1)(5x+2)}{x(5x+2)}=$$

$$=\frac{x-1}{x}$$

О.Д.З.

$5x+2\neq 0$

$x\neq -\frac{2}{5}$

2. *Сократите дробь* $\dfrac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x}$.

Ответ: $\dfrac{x-1}{x}$.

Решение. Корни квадратного трехчлена $5x^2-3x-2$: $x_1=1, x_2=-\dfrac{2}{5}$. Имеем

$$\frac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x}=\frac{(x-1)(5x+2)}{x(5x+2)}=\frac{x-1}{x}.$$

Сокращение дроби выполнено верно. Но так как при указании ОДЗ допущена ошибка (хотя нахождение области определения дроби в данном случае не требуется), количество баллов за решение снижается.

1. *Решите неравенство* $(\sqrt{3}-1,5)(3-2x)>0$.

<u>Пример 1.</u>

20. $(\sqrt{3}-1,5)(3-2x)>0$

$\sqrt{3}-1,5>0$

$3-2x>0$

$-2x>-3$

$x<-\frac{3}{2}$

$x<-1,5$

Ответ: $x\in(-\infty;-1,5)$

Допущена ошибка на последнем шаге решения. Оценка снижается.

1. *Решите неравенство* $(\sqrt{3}-1,5)(3-2x)>0$.

Пример 2

20. $(\sqrt{3}-1,5)(3-2x)>0$

$\sqrt{3}\approx 1,7, \quad \sqrt{3}>1,5$

$3-2x>0$

$-2x>-3$

$x>1,5$ Ответ: $(1,5;+\infty)$

Допущена ошибка принципиального характера в алгоритме решения неравенства. За решение выставляется 0 баллов.

1. *Решите неравенство* $(\sqrt{3} - 1,5)(3 - 2x) > 0$.

Ответ: $(-\infty; 1,5)$. Другая возможная форма ответа: $x < 1,5$.

Решение. 1) Определим знак разности $\sqrt{3} - 1,5$. Так как $1,5 = \sqrt{2,25}$ и $\sqrt{3} > \sqrt{2,25}$, то $\sqrt{3} - 1,5 > 0$.

2) Получаем неравенство $3 - 2x > 0$. Отсюда $x < 1,5$.

4. *Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии* – 8,6; – 8,4; …

21) Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии $-8,6; -8,4; \ldots$

$a_1 = -8,6, \; d = 0,4$

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$a_n = -8,6 + 0,4(n-1)$

$-8,6 + 0,4(n-1) < 0$

$0,4n - 9 < 0$

$n < \frac{9}{0,4} = 22,5$

$n < 22,5, \; n = 22$

$a_{22} = -8,6 + 0,4 \cdot 21 = -8,6 + 8,4 = -0,2$

$S_{22} = \frac{-8,6 + (-0,2)}{\cancel{2}_1} \cdot \cancel{22}^{11} = -8,8 \cdot 11 =$

$= -96,8$

Ответ: $-96,8$

Ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка (при нахождении разности арифметической прогрессии), с ее учетом решение доведено до конца.

4. *Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии* $-8{,}6; -8{,}4; \ldots$

Ответ: $-189{,}2$.

Решение. 1. Найдем разность прогрессии: $d = -8{,}4 + 8{,}6 = 0{,}2$.

2. Найдем число отрицательных членов прогрессии.

Составим формулу n-го члена: $a_n = -8{,}6 + 0{,}2(n-1) = 0{,}2n - 8{,}8$.

Решим неравенство $0{,}2n - 8{,}8 < 0$; получим $n < 44$. Значит, $n = 43$.

3. $S_{43} = \dfrac{(2\cdot(-8{,}6) + 0{,}2\cdot 42)\cdot 43}{2} = -189{,}2$.

2. *Из пункта А в пункт В, расположенный ниже по течению реки, отправился плот. Одновременно навстречу ему из пункта В вышел катер. Встретив плот, катер сразу повернул и поплыл назад. Какую часть пути от А до В пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт В, если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки?*

№21

Пусть x км/ч — скорость плота
Тогда $4x$ км/ч — скорость катера в стоячей воде.
$4x + x = 5x$ — скорость катера по течению, $4x - x = 3x$ — против течения.
Плывут навстречу друг другу, скорость сближения $x + 3x = 4x$.
$\frac{s}{4x}$ ч — время до встречи
$\frac{s}{4x} \cdot 3x = \frac{3s}{4}$ км — катер проплыл до встречи.
$\frac{3s}{4} : 5x = \frac{3s}{20x}$ ч — время на обратный путь (катер)
Всего время: $\frac{s}{4x} + \frac{3s}{20x} = \frac{8s}{20x} = \frac{2s}{4x}$ ч.

За это время плот проплыл
$\frac{2s}{4x} \cdot x = \frac{2s}{4} = \frac{s}{2}$ км. Ответ: половину пути

Ход решения верный, введены нужные обозначения, приведены пояснения, но допущена вычислительная ошибка, с ее учетом решение доведено до конца.

2. *Из пункта А в пункт В, расположенный ниже по течению реки, отправился плот. Одновременно навстречу ему из пункта В вышел катер. Встретив плот, катер сразу повернул и поплыл назад. Какую часть пути от А до В пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт В, если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки?*

<u>Ответ</u>: плот пройдет $\frac{2}{5}$ всего пути.

<u>Решение</u>. Пусть скорость течения реки (и плота) x км/ч. Тогда скорость катера против течения равна $4x - x = 3x$ км/ч, а по течению $4x + x = 5x$ км/ч. Следовательно, скорость катера против течения в 3 раза больше скорости плота, а по течению – в 5 раз больше скорости плота. Если плот до встречи проплыл S км, то катер – в 3 раза больше, т. е. $3S$ км. После встречи катер пройдет $3S$ км, а плот – в 5 раз меньше, т. е. $\frac{3S}{5}$ км. Всего плот пройдет $S + \frac{3S}{5} = \frac{8S}{5}$. Отношение пройденного плотом пути ко всему пути равно

$$\frac{\frac{8S}{5}}{4S} = \frac{2}{5}.$$

3. *Найдите все значения a, при которых неравенство* $x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1 \le 0$ *не имеет решений.*

Пример 2.

$x^2+(2a+4)x+8a+1\le 0$

$D=(2a+4)^2-4(8a+1)\cdot 1=$

$=4a^2+16a+16-32a-4=4a^2-16a+12$

$4a^2-16a+12<0$

$D=256-\underbrace{4\cdot 4\cdot 12}_{192}=64=8^2$

$a_{1,2}=\frac{16\pm 8}{16}$

$a_1=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$

$a_2=\frac{24}{16}=\frac{3}{2}$

Ответ: при $a=\frac{3}{4}$ и $a=\frac{3}{2}$ нр-с не имеет реш-й

За решение выставляется 0 баллов. Учащийся не владеет приемом решения квадратного неравенства, допускает ошибки в применении формулы корней квадратного уравнения.

3. *Найдите все значения a, при которых неравенство* $x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1 \le 0$ *не имеет решений.*

Пример 1.

$x^2+(2a+4)x+8a+1 \le 0.$ найти все значения a при которых решений нет.

т.е. при каких a график параболы не будет пересекать $y=0$.

$D<0$; $D=(2a+4)^2-4(8a+1)=$

$=4a^2+16a+16-32a-4=$

$=4a^2-16a+12<0.$

$a^2-4a+3<0$

$(a-1)(a-3)<0.$

~~$a \in (-3;-1)$~~ $a \in (1;3)$

Ответ: при $a \in (1;3)$

Все шаги решения выполнены верно (хотя есть погрешность в терминологии), получен правильный ответ.

3. *Найдите все значения а, при которых неравенство* $x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1 \le 0$ *не имеет решений.*

Ответ: $1 < a < 3$; другая возможная форма ответа: $a \in (1; 3)$.

Решение. График функции $y = x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1$ – парабола, ветви которой направлены вверх. Значит, данное неравенство не имеет решений в том и только том случае, если эта парабола целиком расположена в верхней полуплоскости. Отсюда следует, что дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1$ должен быть отрицателен.

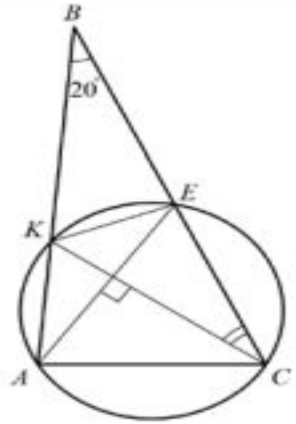
Имеем $D_1 = (a + 2)^2 - (8a + 1) = a^2 - 4a + 3 < 0$.

Решив квадратное неравенство, получаем $1 < a < 3$.

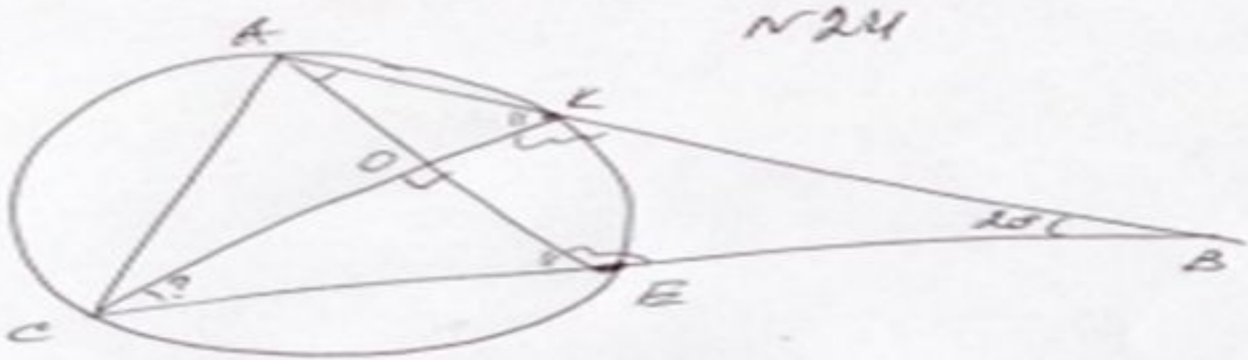
Замечание. Учащийся может воспользоваться формулой дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

Задание

1. *Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает его стороны ... и BC в точках K и E соответственно. Отрезк... AE и CK перпендикулярны. Найдите* $\angle KCB$, е... $\angle ABC = 20^\circ$.



№24



$\angle AKC = \angle AEC \Rightarrow \angle CKB = \angle AEB$

$\angle AEB = \frac{1}{2}(360^\circ - 90^\circ - 20^\circ) = 125^\circ$

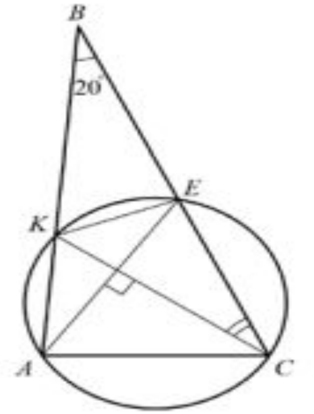
$\angle AEB = \angle OCE + \angle COE \Rightarrow \angle OCE = 125^\circ - 90^\circ = 35^\circ$

Ответ: 35°

За выполнение задания количество баллов снижается, т.к. отсутствуют пояснения и ссылки на использованные теоремы.

<u>Задание</u>

1. *Окружность проходит через вершины А и С треугольника ABC и пересекает его стороны … и BC в точках К и Е соответственно. Отрезк… AE и СК перпендикулярны. Найдите* $\angle KCB$ *, е…* $\angle ABC = 20^\circ$.



№24

$\angle AEC = \angle AKC$ (общая хорда AC)

$\Downarrow$

$\angle BEA = \angle BKC$ (как смежные)

$\Downarrow$

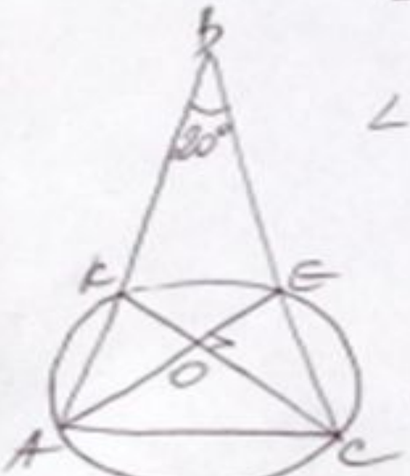
$$\angle BEA = \frac{360^\circ - (90^\circ + 20^\circ)}{2} = \frac{250^\circ}{2} = 125^\circ$$

$\Downarrow$

$\angle AEC = 180^\circ - 125^\circ = 65^\circ$

$\angle KCB = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$

(из прямоугольного треуг-ка OEC)

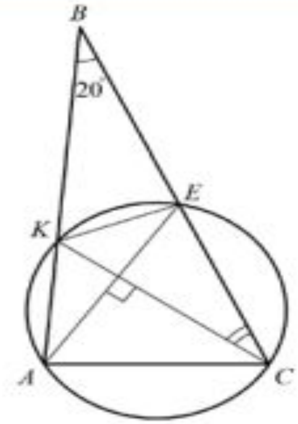


Допущена вычислительная ошибка, которая не носит принципиального характера; задание доведено до конца.

<u>Задание</u>

1. ***Окружность проходит через вершины А и С треугольника АВС и пересекает его стороны . и ВС в точках К и Е соответственно. Отрезк АЕ и СК перпендикулярны. Найдите $\angle KCB$, е***

$\angle ABC = 20^\circ$.

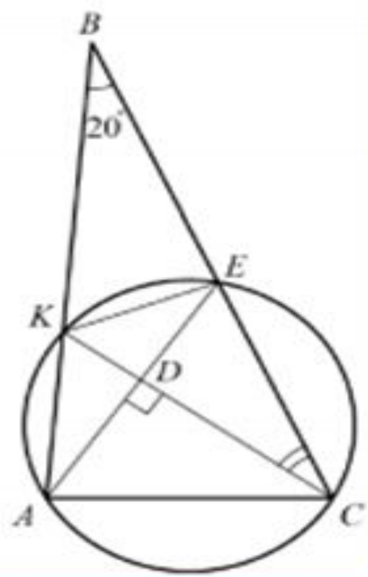


<u>Решение.</u>

$\angle AKC = \angle AEC$, т.к. опираются на одну дугу окружности; следовательно, $\angle BKC = \angle BEA$, как смежные с ними. Из четырехугольника

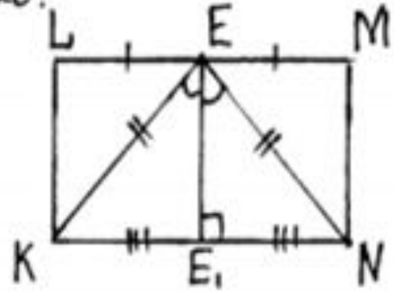
$BKDE$: $\angle BKC = \frac{1}{2}(360^\circ - 90^\circ - 20^\circ) = 125^\circ$. Из

ΔBKC $\angle KCB = 180^\circ - 125^\circ - 20^\circ = 35^\circ$.



2. *В параллелограмме KLMN точка E — середина стороны LM. Известно, что EK = EN. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.*

№20.



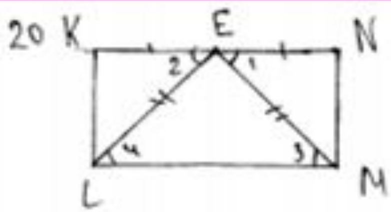
Дано: KLMN - параллелограмм; $LE = EM$, $EK = EN$.

Доказать: KLMN - прямоугольник.

Доказательство: проведем высоту EE_1 к стороне KN;
$\triangle KEN$ - равнобедренный, т.к. $EK = EN \Rightarrow EE_1$ - высота, биссектриса и медиана $\Rightarrow KE_1 = E_1N$, EE_1 - общая сторона и $\angle KE_1E = \angle EE_1N$, т.к. $180° - 90 = 90°$ $\Rightarrow \triangle KEE_1 = \triangle EE_1N$ по 1 признаку; рассмотрим $\triangle KLE$ и $\triangle KEE_1$: $\angle LEK = \angle EKE_1$ т.к. противолежащие по свойству параллельных прямых, KE - общий, и $\angle KEE_1 = \angle LKE \Rightarrow \triangle KLE = \triangle KEE_1$ по 2 признаку, аналогично с $\triangle EE_1N$ и $\triangle EMN \Rightarrow \triangle E_1EN = \triangle EMN \Rightarrow \angle L = \angle E_1 = \angle M = \angle E_1 = 90° \Rightarrow \angle L = \angle M = \angle N = \angle K = 90° \Rightarrow$ KLMN - прямоугольник.

За задание выставляется 0 балл, т.к. отсутствует доказательство равенства углов KEE 1 и LKE , что является существенным моментом предложенного доказательства. Комментарий. Учащийся был введен в заблуждение своим рисунком: если бы он изобразил параллелограмм, а не прямоугольник, этого бы не случилось.

2. *В параллелограмме KLMN точка E — середина стороны LM. Известно, что EK = EN. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.*



Дано: KLMN - параллелограмм.

KE = EN, EL = EM

Д! KLMN - прямоугольник

Рассмотрим $\triangle LKE$ и $\triangle MNE$, они равны по двум сторонам и углу между ними: 1) EL = EM (по усл.); 2) KE = EN (по усл.) 3) $\angle KEL = \angle NEM$, т.к. $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$ (накр. лежащие $\angle$ при парал. прямых), а $\angle 3 = \angle 4$, т.к. $\triangle ELM$ - равнобедр. (видно по рисунку)

Теперь докажем, что $\angle L = \angle M$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \angle KLE = \angle NME \text{ (следует из равенства } \triangle) \\ 2)\ \angle ELM = \angle EML \ (\triangle ELM \text{ - равнобедр., } \angle 3 = \angle 4) \end{array}\right\} \Rightarrow \angle L = \angle M$$

Значит, $\angle K = \angle N$, $\angle L = \angle M$

Так как данный четырехугольник - параллелограмм, то его противоположные стороны равны, тогда $\angle K = \angle M$, $\angle L = \angle N \Rightarrow \angle K = \angle M = \angle L = \angle N = 90^\circ$ (сумма $\angle$ в четырехуг. равна 360°). А поскольку все углы в параллелограмме равны 90°, то этот параллелограмм является прямоугольником. Что и требовалось доказать!

Доказательство логично, хорошо структурировано, не содержит пробелов, утверждения аргументированы.

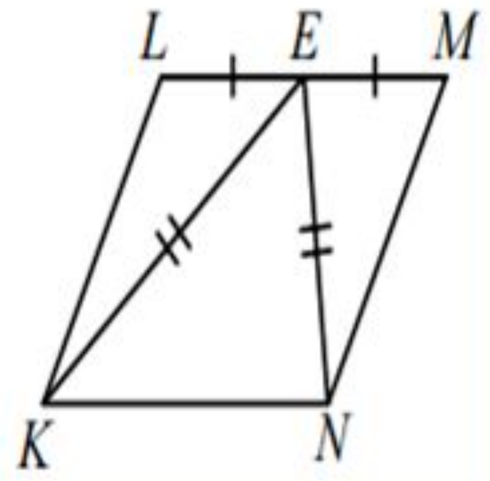
Комментарий. 1) Фразу в приведенном доказательстве «видно по рисунку» следует трактовать, как неуклюжее выражение очевидной мысли о том, что заданное в условии задачи условие равенства отрезков EL и EM отмечено на рисунке, в треугольнике ELM стороны EL и EM равны, следовательно, треугольник ELM является равнобедренным.

2) Фразу «его противоположные стороны равны» следует считать опиской, так как далее речь идет об углах параллелограмма.

2. *В параллелограмме KLMN точка E — середина стороны LM . Известно, что EK = EN . Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.*

2. *В параллелограмме KLMN точка E — середина стороны LM . Известно, что EK = EN . Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.*

Решение.



Доказательство.

Треугольники KLE и MEN равны по трём сторонам.

Значит, углы KLE и NME равны. Так как их сумма равна 180°, то углы равны 90°. Такой параллелограмм — прямоугольник.