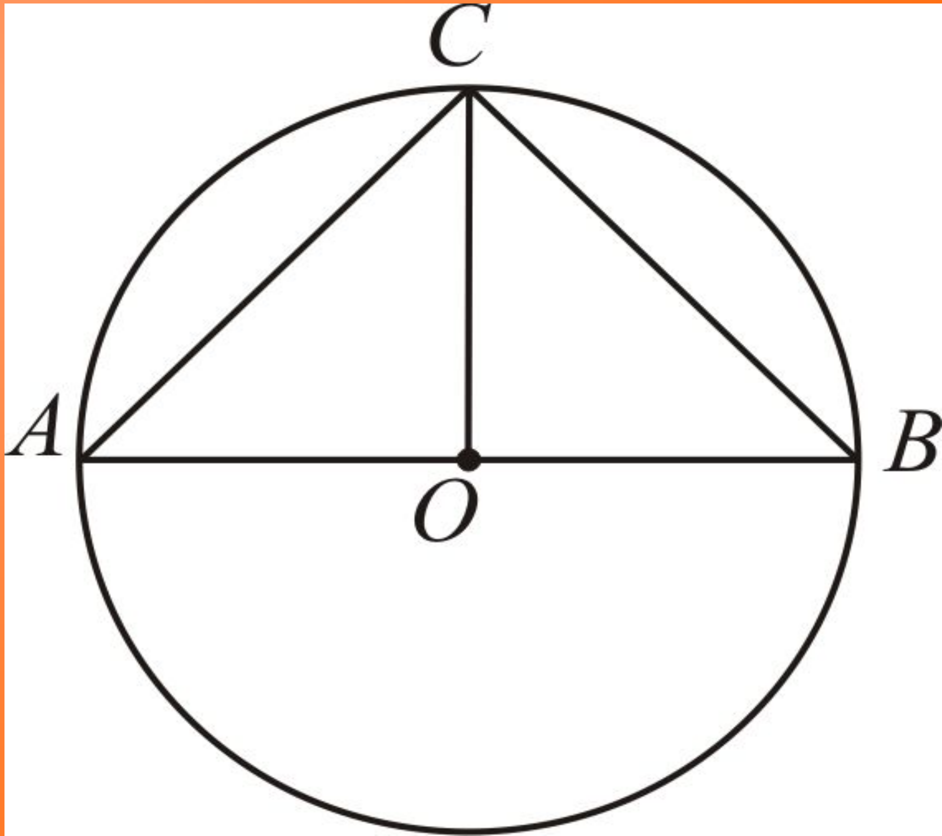
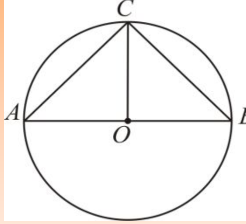
Параллельность прямых и плоскостей



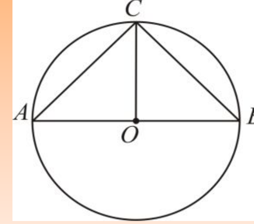
Автор Календарева Н.Е.

План



1. Аксиома параллельности
2. Пятый постулат Евклида
3. Признаки параллельности прямых на плоскости
4. Пересечение сторон угла ||-ми прямыми
5. Параллельные прямые в пространстве
6. Скрещивающиеся прямые
7. Параллельность прямой и плоскости
8. Параллельность плоскостей
9. Свойства параллельных плоскостей

Аксиома параллельности прямых



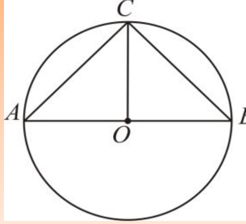
Определение. Две прямые на плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Аксиома

Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.

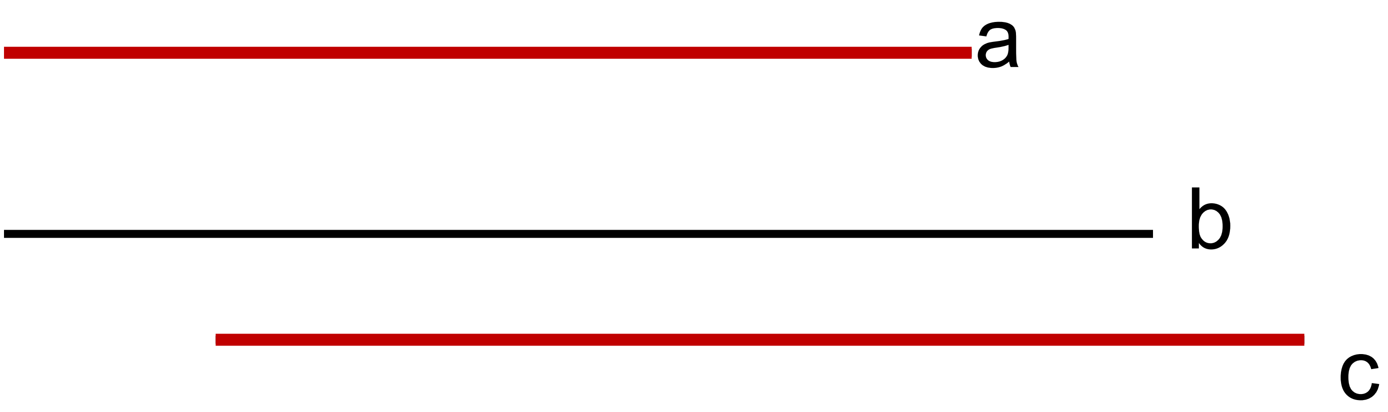
Выучите ее.

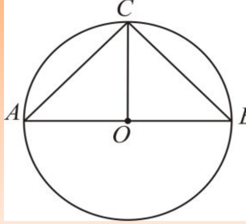
Теорема



Две прямые, параллельные третьей, параллельны друг другу.

Если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

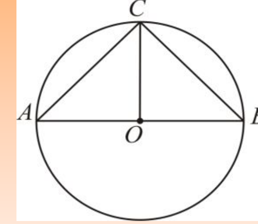




Сопоставляя предыдущее утверждение и аксиому параллельных, приходят к важному выводу:

На плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести параллельную ей прямую, и только одну.

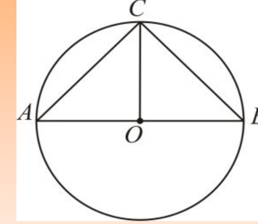
Пятый постулат



Аксиома параллельности в книге Евклида «Начала» эквивалентна так называемому пятому постулату.

Если две прямые пересекаются третьей так, что по какую-либо сторону от нее сумма внутренних углов меньше двух прямых углов, то по эту же сторону исходные прямые пересекаются.

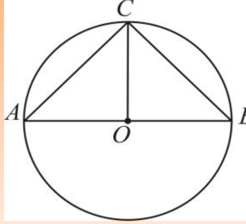
Геометрия Лобачевского



Пятый постулат Евклида в отличие от других аксиом Евклида менее очевиден, и в течение 2000 лет многие математики безуспешно пытались вывести его из других аксиом Евклида.

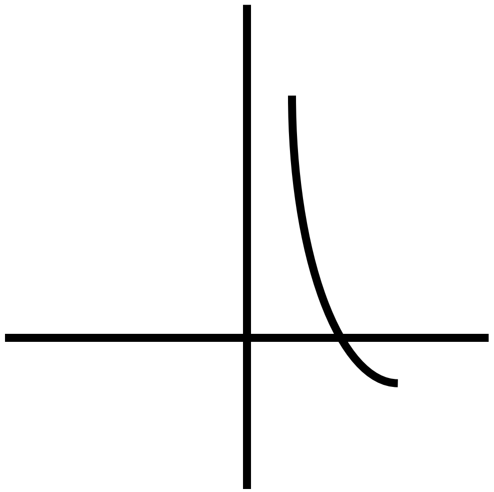
А также пытались доказать единственность параллельной.

В 1826 г. Николай Иванович Лобачевский в Казанском университете представил доклад о новой геометрии, которую он назвал *воображаемой геометрией*.

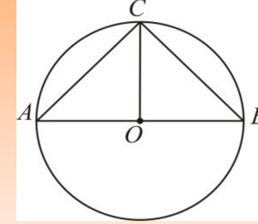


Система аксиом геометрии Лобачевского получается из системы аксиом геометрии Евклида простой заменой пятого постулата аксиомой Лобачевского:

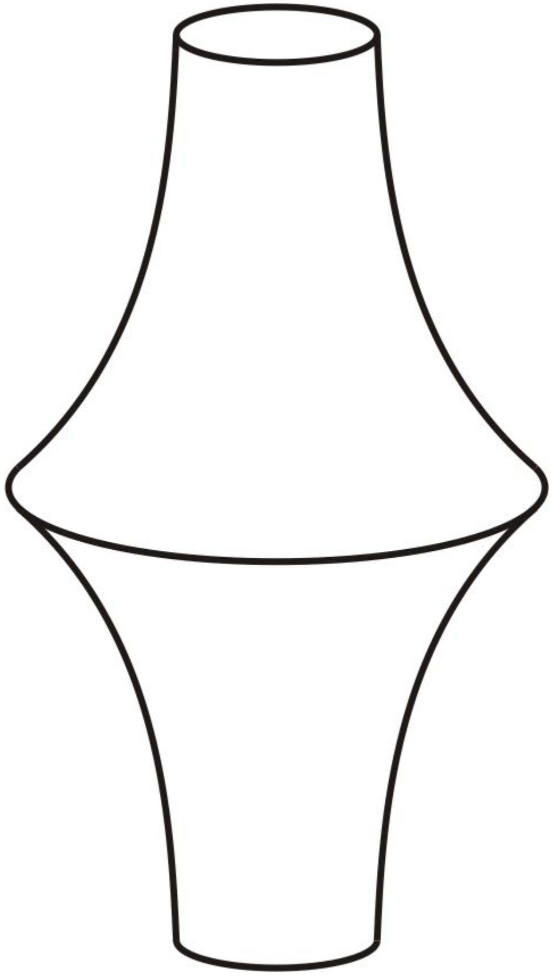
Перпендикуляр и наклонная, проведенные в плоскости к одной прямой, могут не пересекаться.



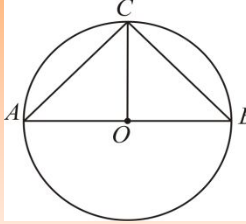
Псевдосфера

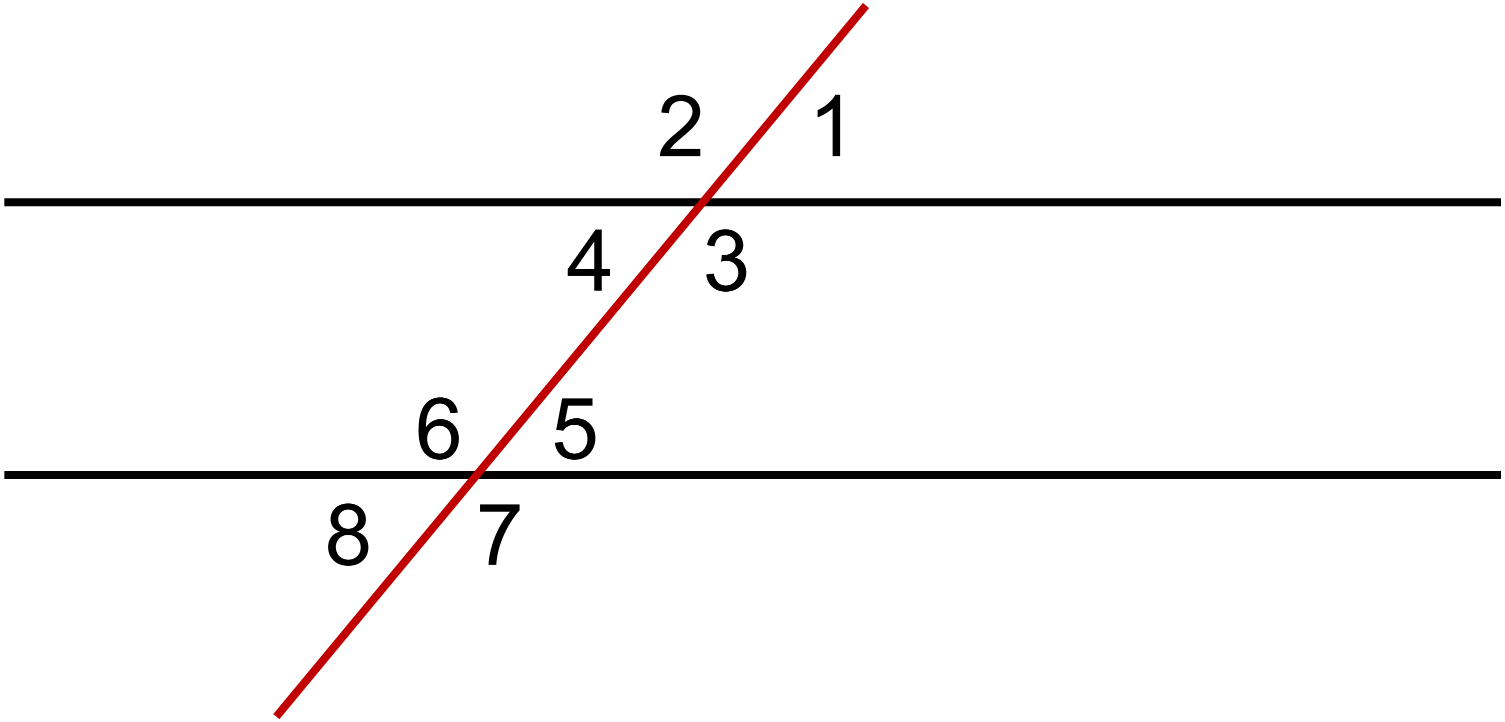


В евклидовом пространстве имеется поверхность, на которой кратчайшие линии ведут себя как прямые на плоскости Лобачевского.
(итал. математик Бельтрами, 1868 г.)



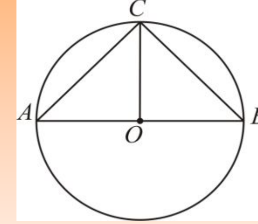
Пересечение параллельных прямых третьей



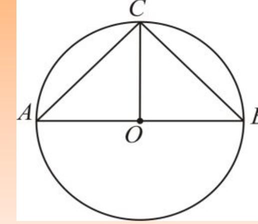


Какие углы вы знаете?

Углы при параллельных и секущей



1. Соответственные: $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 8$.
2. Внутренние накрест лежащие углы $\angle 4 = \angle 5$, $\angle 3 = \angle 6$.
3. Внешние накрест лежащие углы $\angle 1 = \angle 8$, $\angle 2 = \angle 7$.



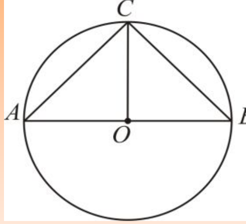
4. Внутренние односторонние углы в сумме составляют 180°:

$\angle 3 + \angle 5 = 180°$, $\angle 4 + \angle 6 = 180°$.

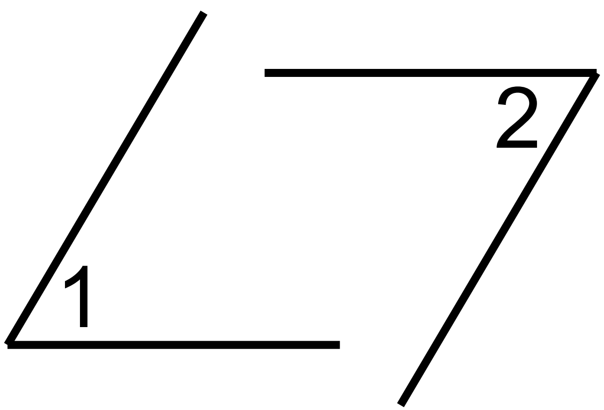
5. Внешние односторонние углы в сумме составляют 180°:

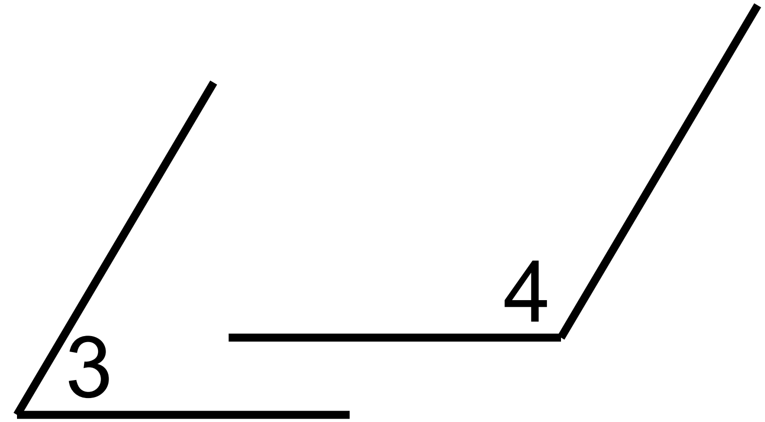
$\angle 1 + \angle 7 = 180°$, $\angle 2 + \angle 8 = 180°$.

Теорема об углах с соответственно параллельными сторонами



Углы с соответственно параллельными сторонами либо равны друг другу (если они оба острые или оба тупые), либо в сумме дают 180°.



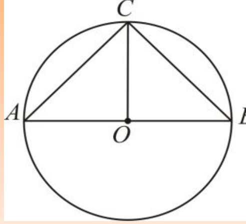


$\angle 1 = \angle 2$

$\angle 3 + \angle 4 =$

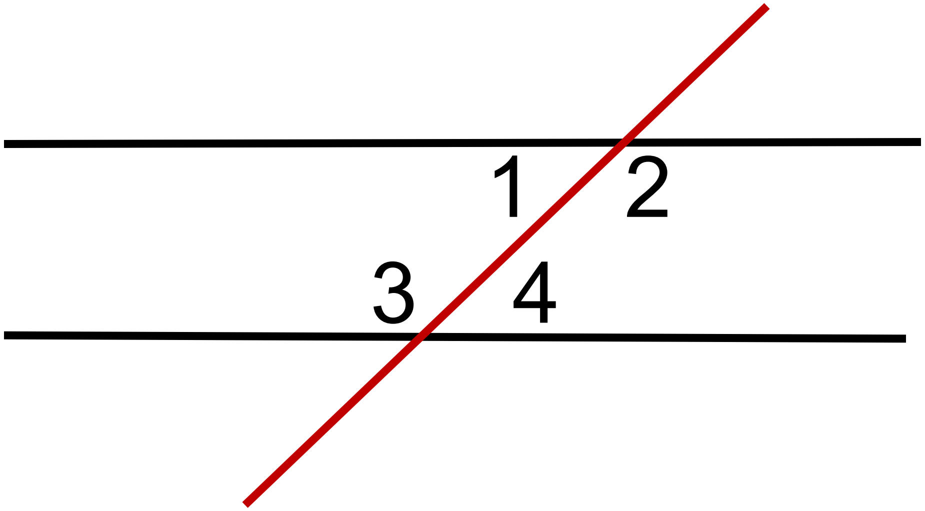
180°

Признаки параллельности прямых

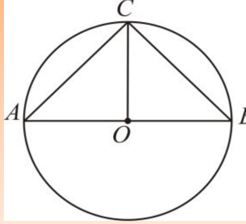


Две прямые на плоскости параллельны в том и только том случае, если при пересечении их секущей

1) внутренние накрест лежащие углы равны;
2) сумма внутренних односторонних углов равна 180°.

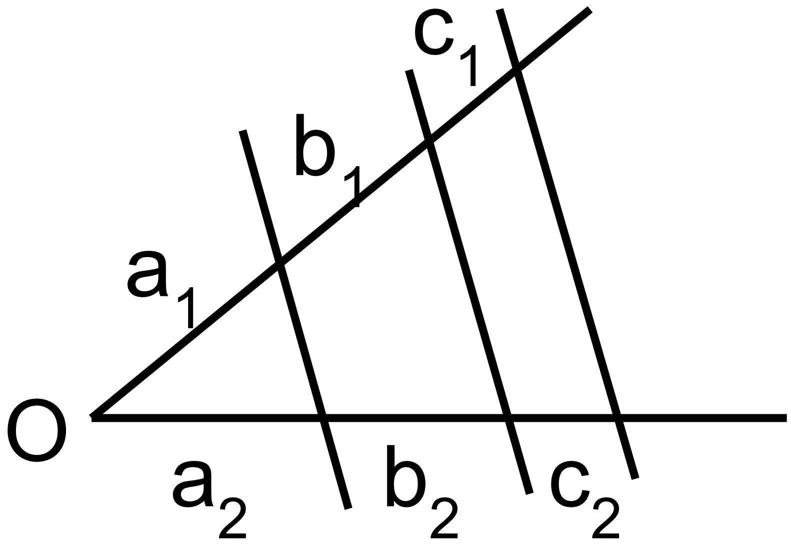


Теорема о пересечении сторон угла параллельными прямыми

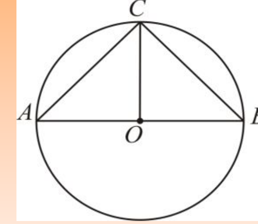


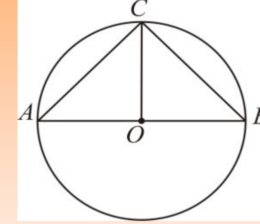
При пересечении сторон угла параллельными прямыми на сторонах угла отсекаются пропорциональные отрезки.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1 + b_1}{a_2 + b_2}$$

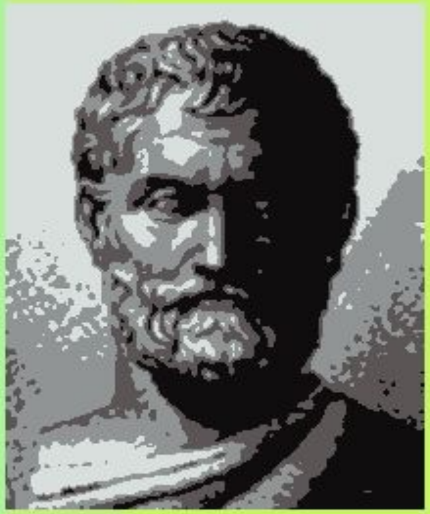


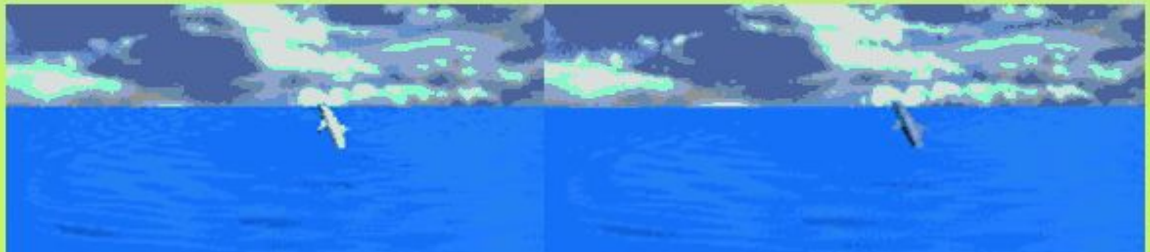
Теорема Фалеса

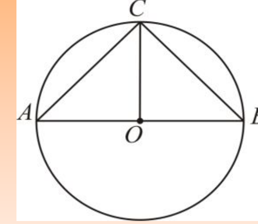




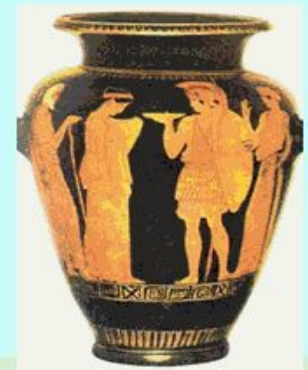
- *Великий учёный Фалес Милетский основал одну из прекраснейших наук-геометрию. Известно, что Фалес Милетский имел титул одного из семи мудрецов Греции, что он был поистине первым философом, первым математиком, астрономом и вообще первым по всем наукам в Греции. Короче: он был то же для Греции, что Ломоносов для России.*

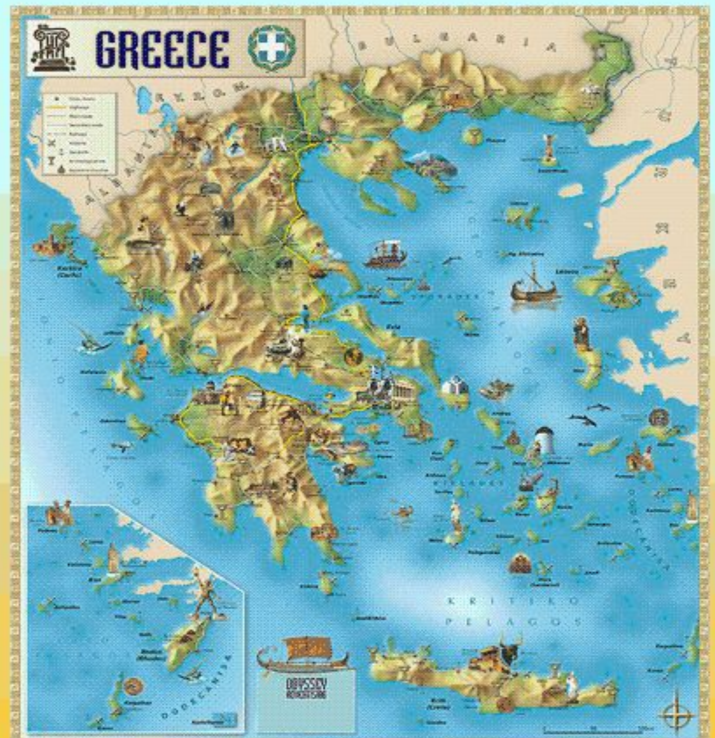


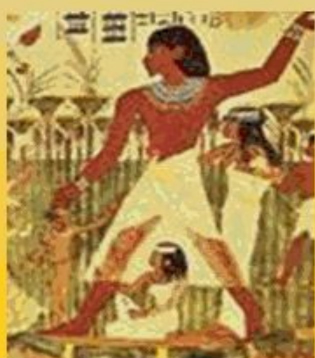


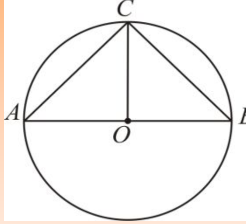


- *Карьеру он начинал как купец и ещё в молодости попал в Египет. В Египте Фалес застрял на много лет, изучая науки в Фивах и Мемфисе. Считается, что геометрию и астрономию в Грецию привёз он.*

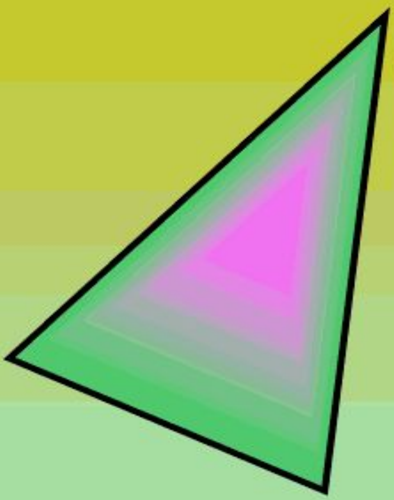


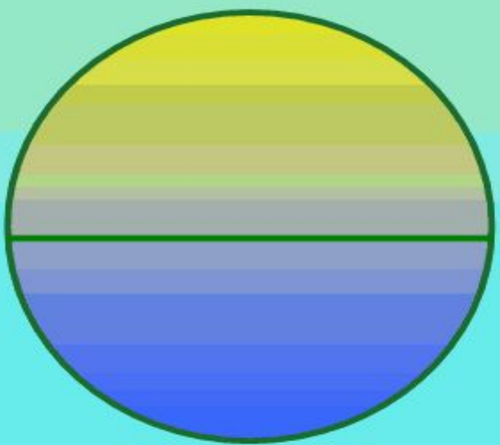


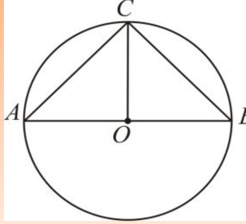




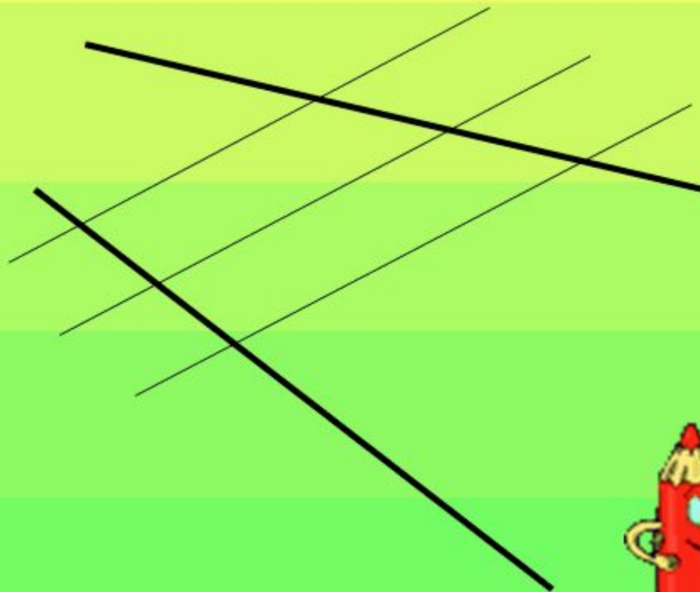
- *Фалес- математик. Он измерил по тени высоту пирамиды; установил, что окружность диаметром делится пополам, что углы при основании равнобедренного треугольника равны. Ему же принадлежит теорема, что вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности- прямой.*

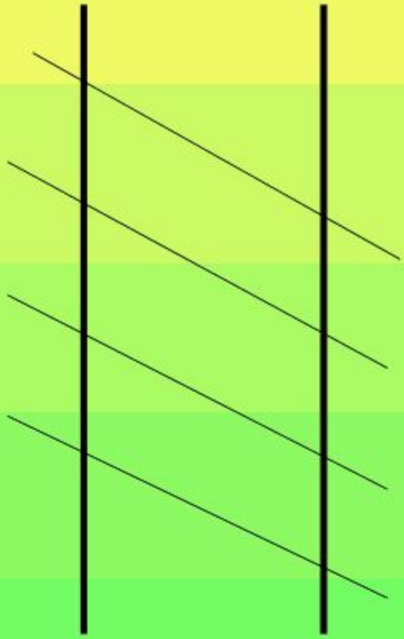




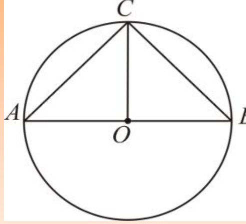


<u>Замечание</u>. Из условия теоремы Фалеса вместо сторон угла можно взять любые две прямые, при этом заключение теоремы будет то же.



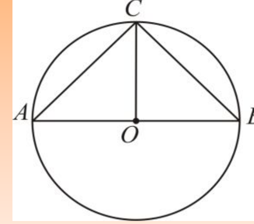


Краткая формулировка теоремы Фалеса

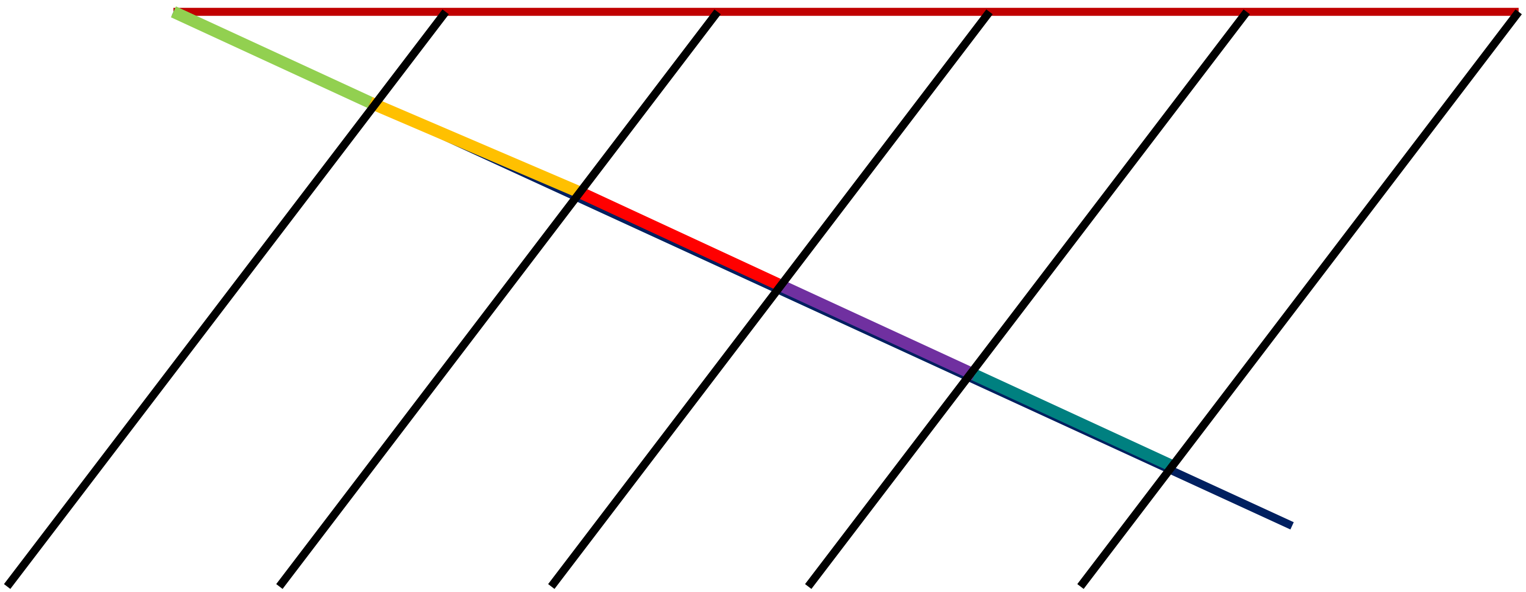


Параллельные прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки

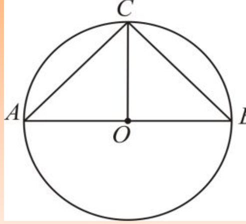
Практическая задача



Как разделить данный отрезок на 5 равных частей, используя циркуль и линейку без делений?



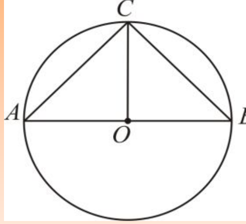
Аналогичная задача



Как разделить с помощью циркуля и линейки данный отрезок в отношении

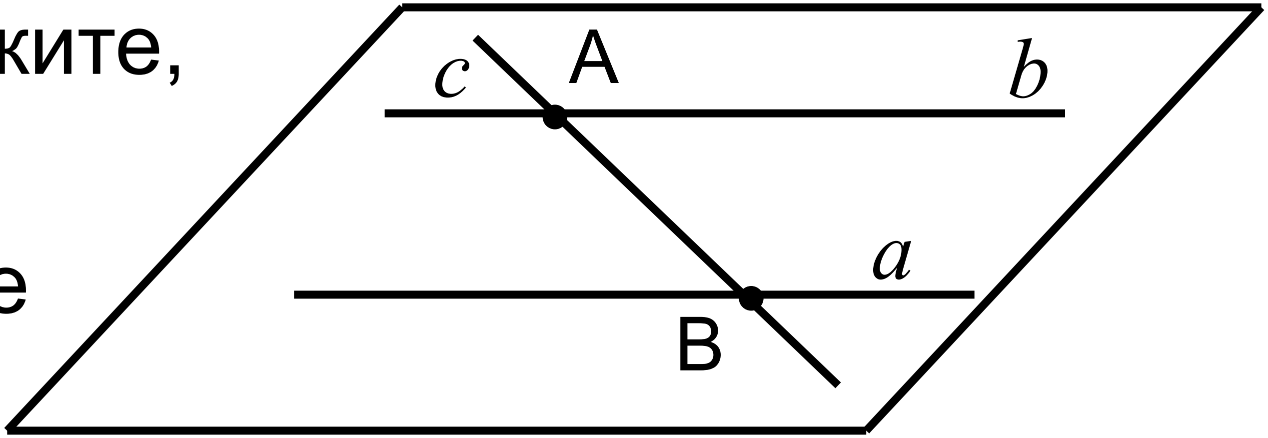
1 : 2   (или 3 : 4)?

Параллельные прямые в пространстве

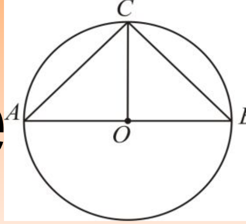


Две прямые в пр-ве наз. *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

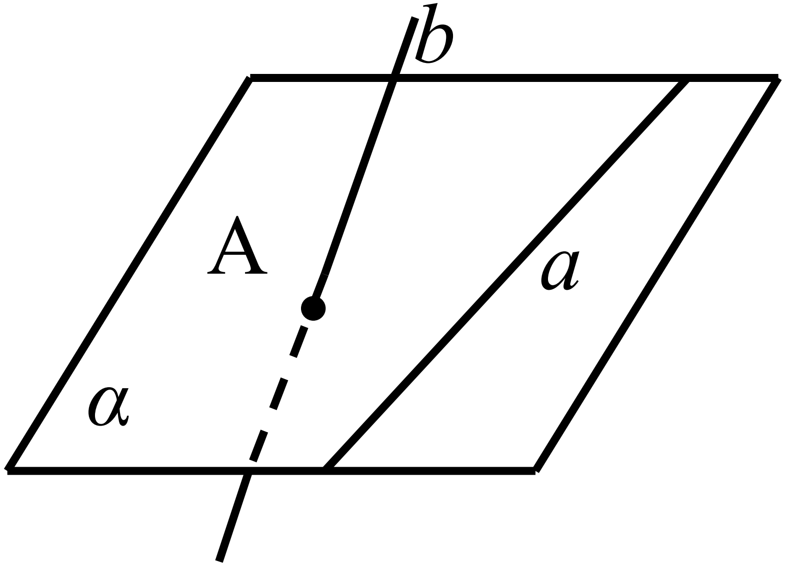
Задача. Докажите, все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости.



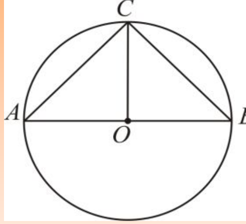
Скрещивающиеся прямые



Прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости, называются *скрещивающимися*.



Теорема 1



Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.

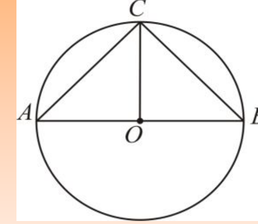
(Погорелов, стр. 239, § 16)

Дано:

a – данная прямая;

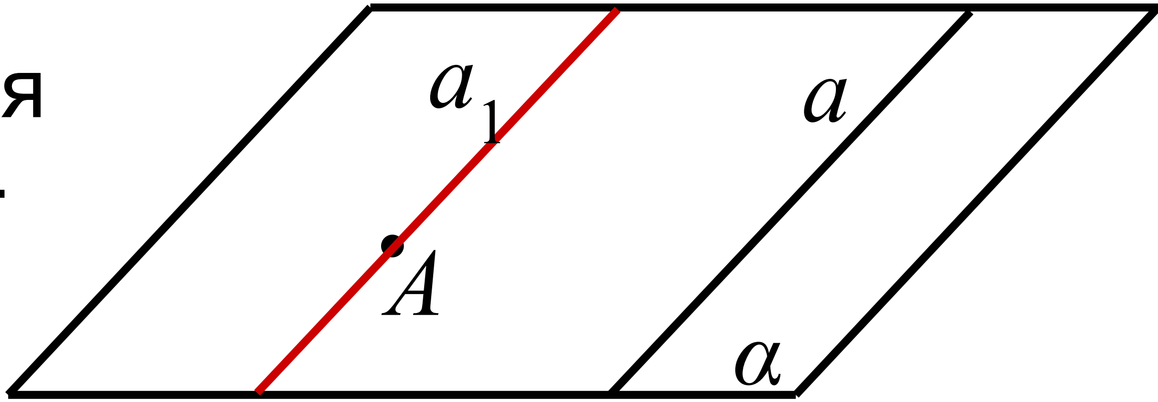
A – данная точка, не лежащая на данной прямой.

Доказательство



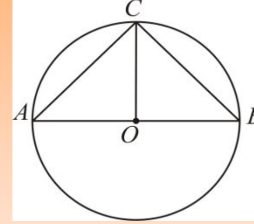
Докажем единственность прямой a_1.

Допустим, что существует другая прямая a_2, проходящая через т. A и параллельная прямой a. Через прямые a и a_2 можно провести плоскость α_2.



Плоскость α_2 проходит через прямую a и т. A; сл-но, она совпадает с α. Теперь по аксиоме параллельных прямые a_1 и a_2 совпадают.

Признак параллельности прямых



Теорема. Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.

Дано: прямая *b* || прямой *a*;

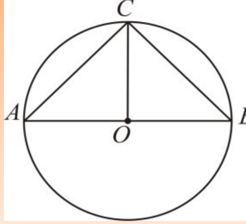
c || *a*.

Доказать: прямая *b* || *c*.

Это свойство называется *транзитивностью*.

***b* || *a*, *a* || *c* => *b* || *c*.**

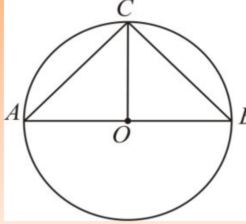
Доказательство признака



При доказательстве рассмотрим два случая, когда эти три прямые лежат в одной плоскости и не лежат.

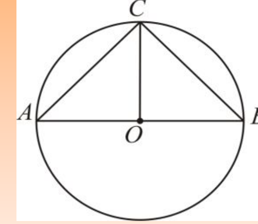
Рассмотрим случай, когда все три прямые *a*, *b*, и *c* лежат в одной плоскости.

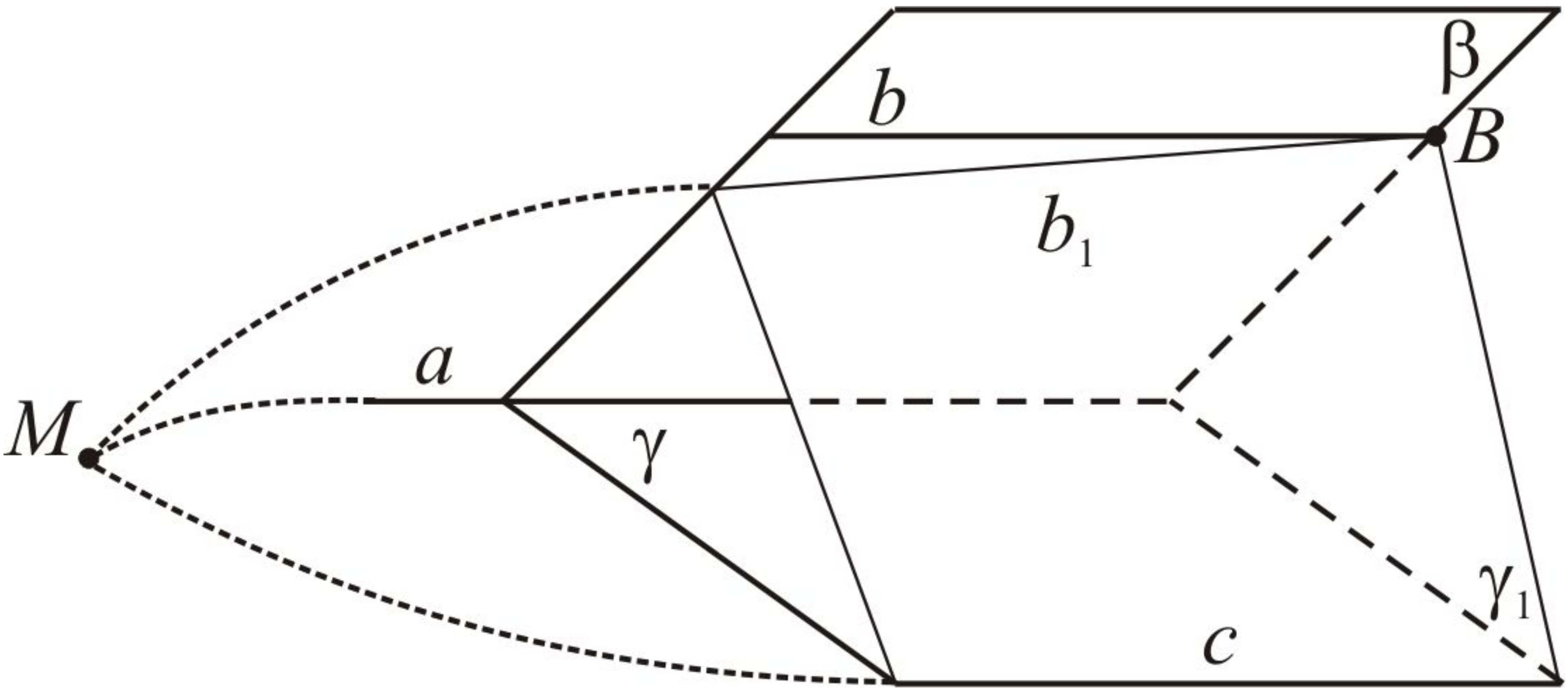
Предположим, что *b* и *c* не параллельны, тогда они пересекаются в некоторой точке. Значит, через эту точку проходят две прямые (*b* и *c*), параллельные прямой *a*.



Но это невозможно, так как через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной (по аксиоме параллельных прямых). Противоречие доказывает этот случай.

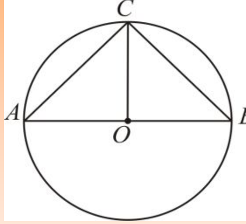
Теперь рассмотрим случай, когда эти три прямые не лежат в одной плоскости.





Прямая b_1 не пересекает плоскость γ .

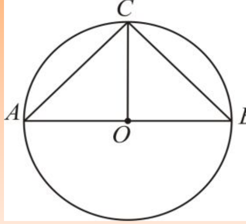
Задача

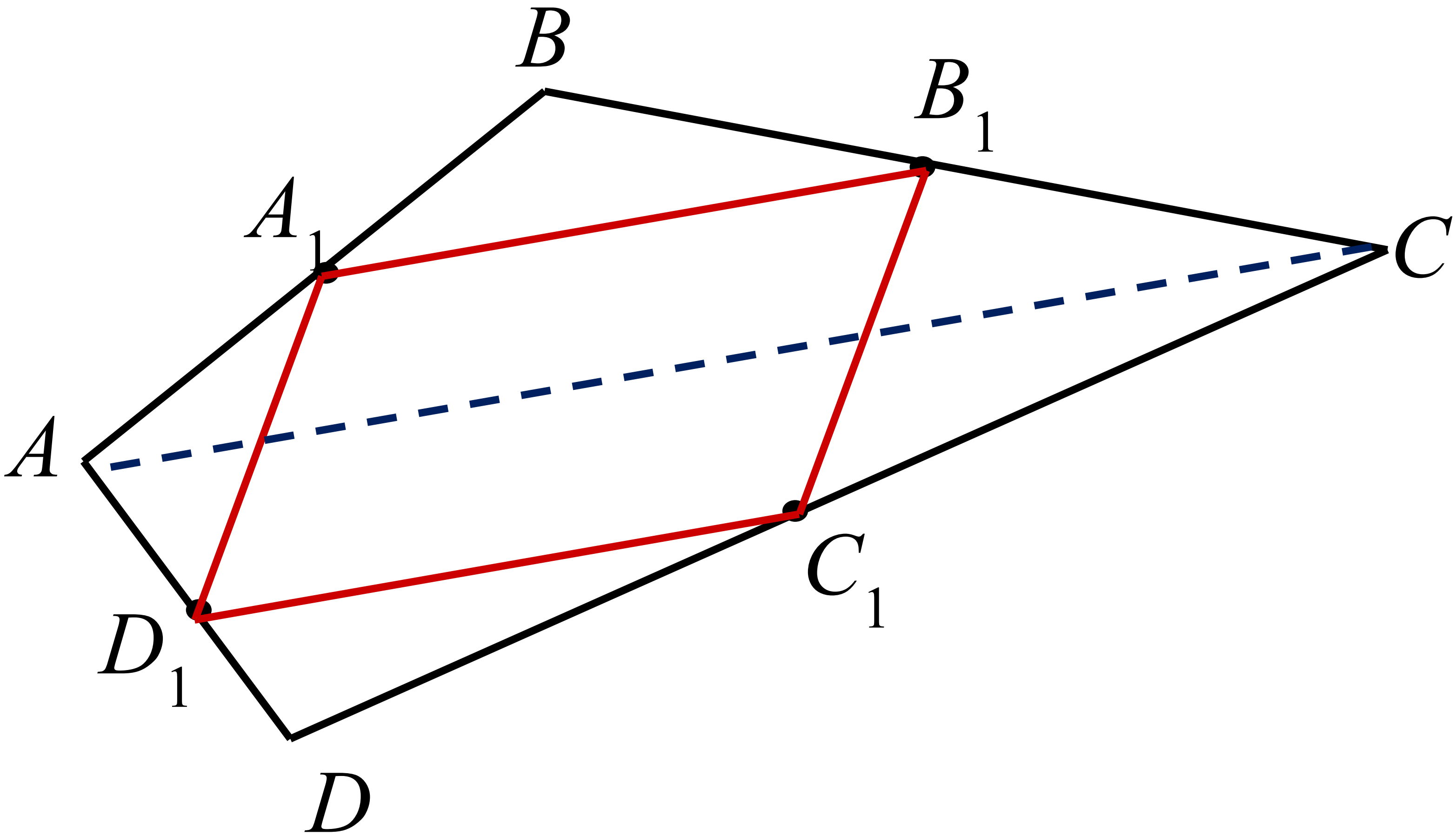


Доказите, что середины сторон пространственного четырехугольника *ABCD* являются вершинами параллелограмма. (Вершины пространственного четырехугольника не лежат в одной плоскости).

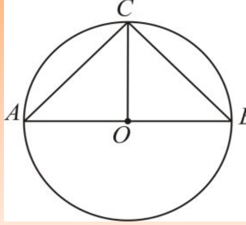
Обозначим середины сторон *ABCD* через A_1, B_1, C_1, D_1.

Решение



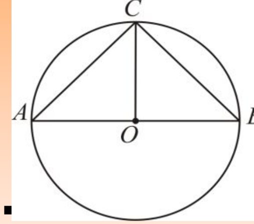


Признак параллельности прямой и плоскости



Определение. Прямая и плоскость называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Теорема. Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

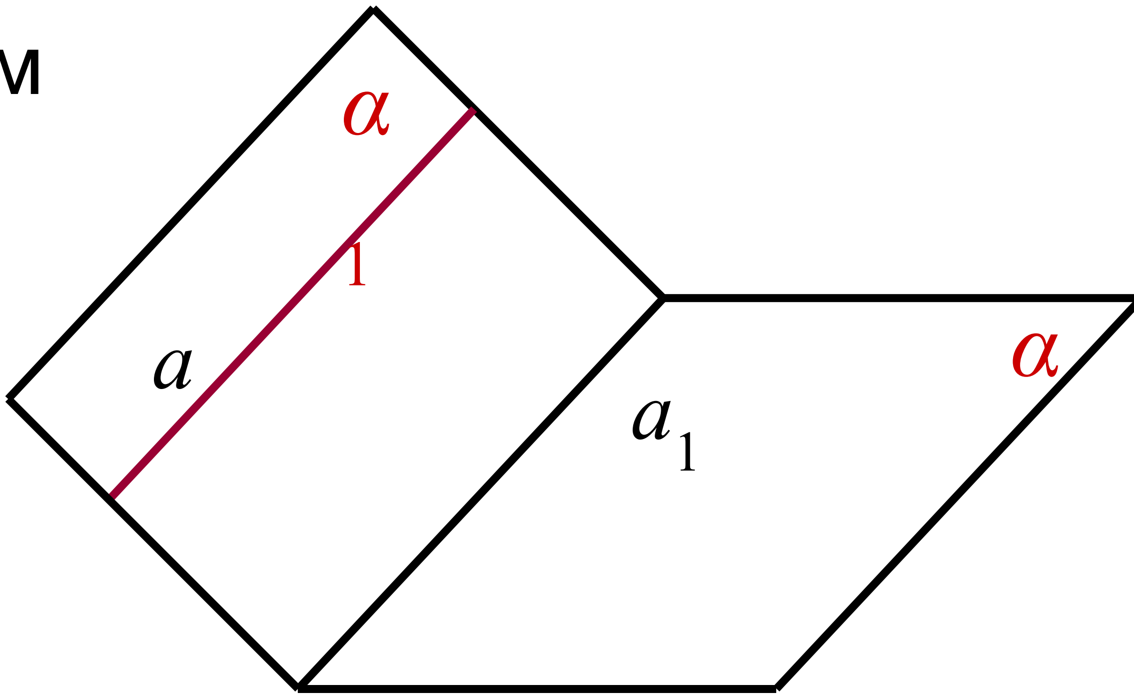


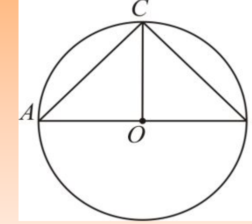
Дано: плоскость α; прямая $a \notin$ пл-ти α;

прямая $a_1 \in$ пл-ти α и $a_1 \mid\mid a$.

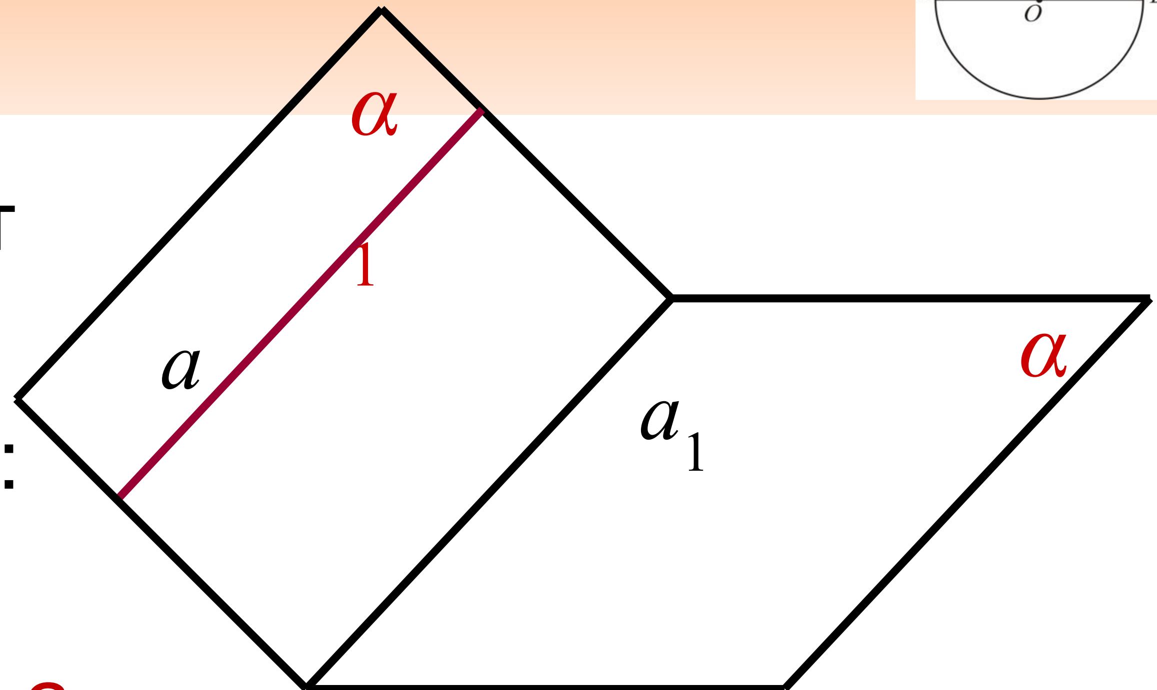
Доказать: прямая $a \mid\mid$ пл-ти α.

Док-во. Проведем пл-ть α_1 через прямые a и a_1. Плоскости α и α_1 пересекаются по прямой a_1.



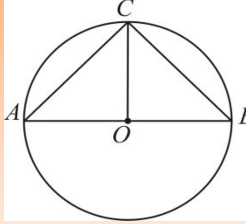


Прямая a_1 лежит одновременно в двух плоскостях: α и α_1 .

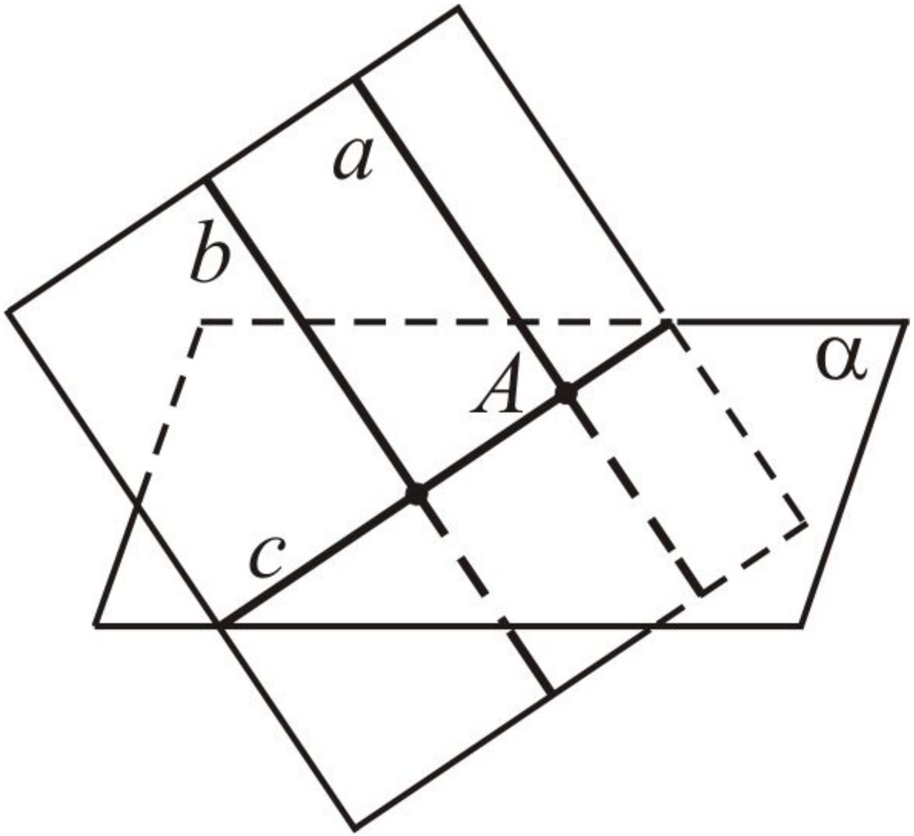


Если бы прямая a пересекала пл-ть α, то точка пересечения принадлежала бы прямой a_1. Но это невозможно, т.к. прямые a и a_1 параллельны.

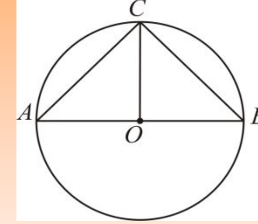
Задача



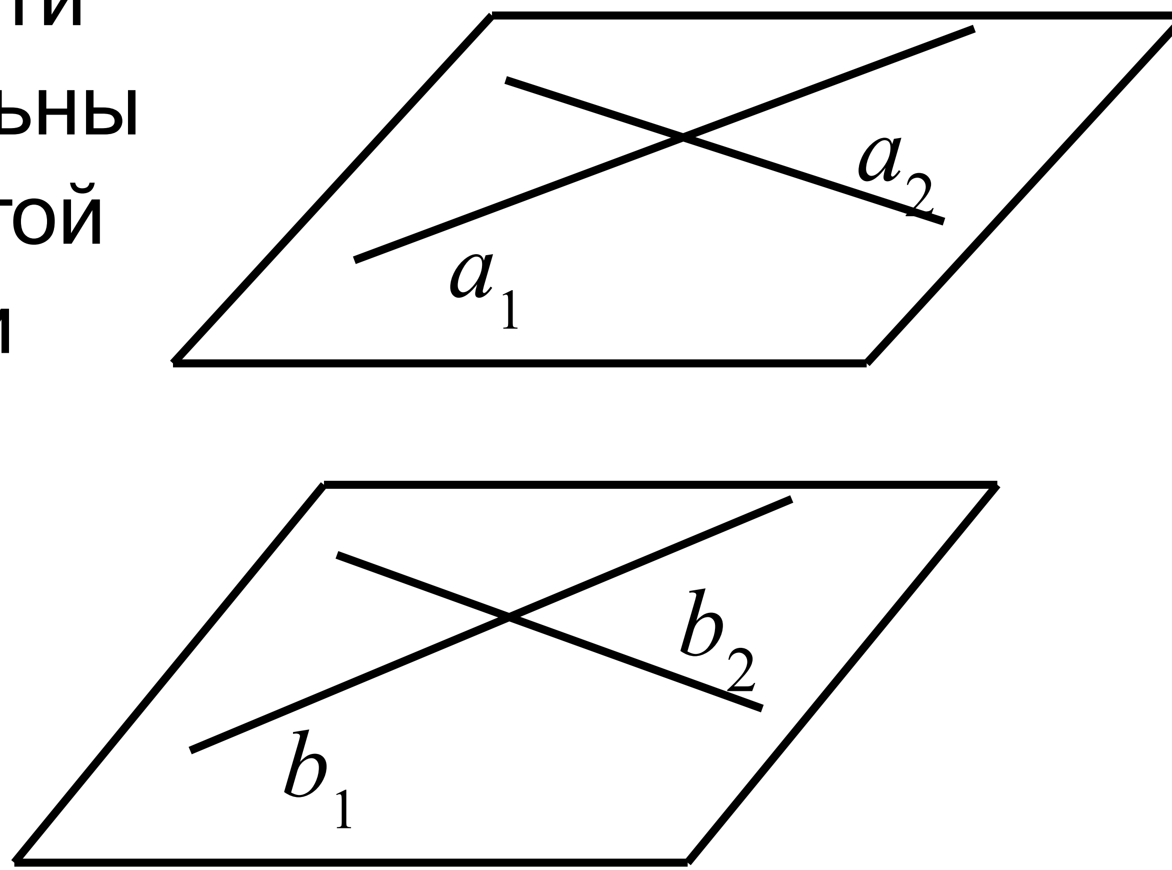
Докажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.



Признак параллельности плоскостей



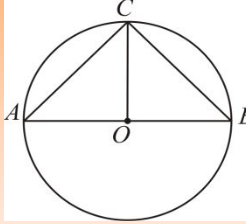
Теорема. Если две пересекающиеся прямые одной пл-ти соот-но параллельны двум прямым другой пл-ти, то эти пл-ти параллельны.



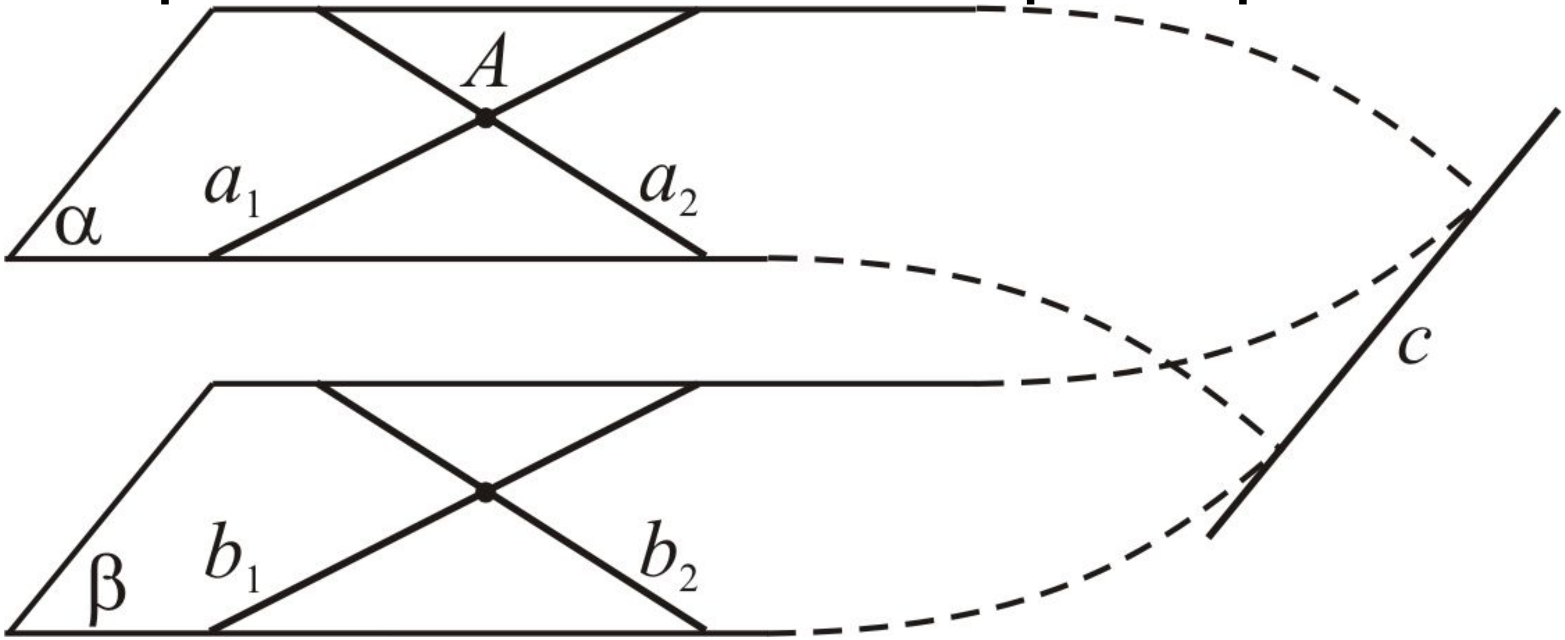
Дано: $a_1 \,||\, b_1$;

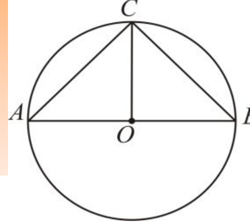
$a_2 \,||\, b_2$.

Доказать: пл-ть α | | β

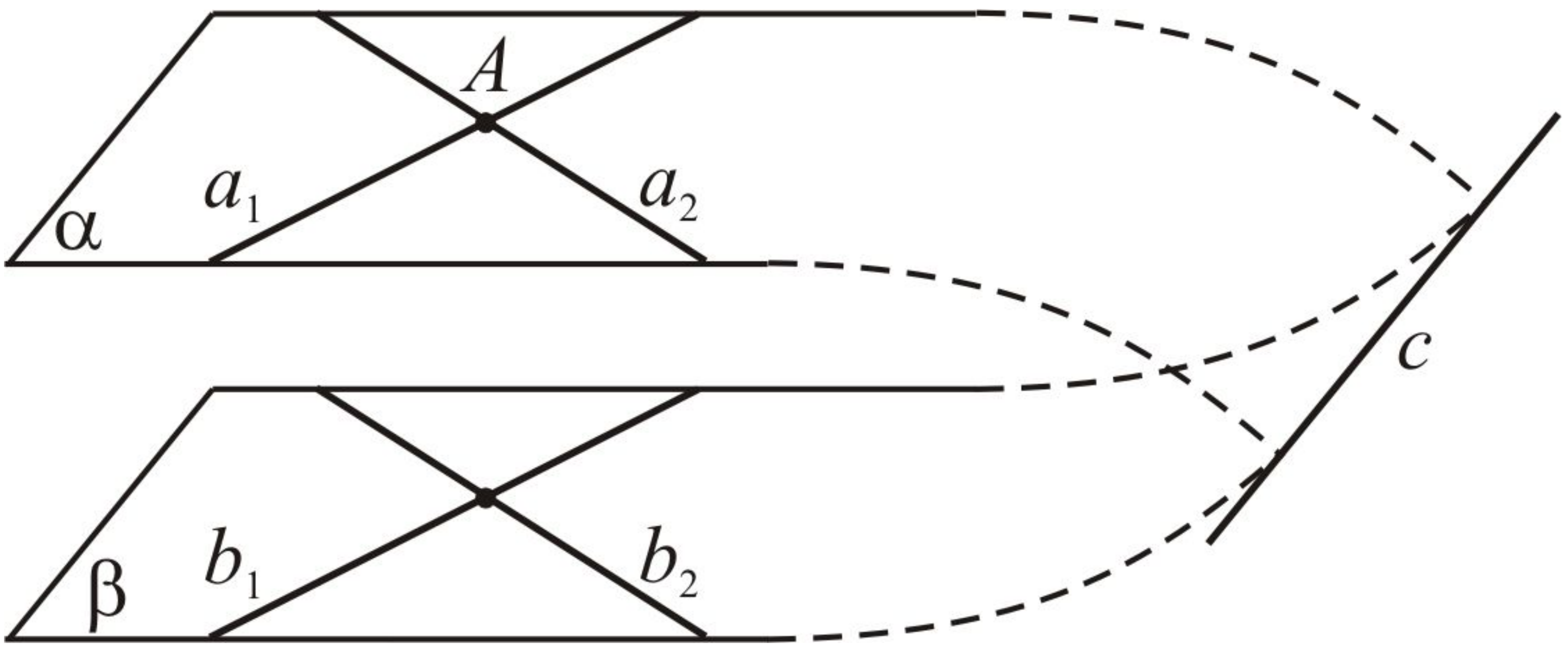


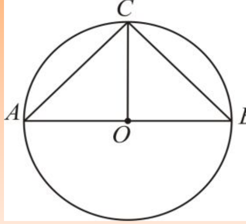
Пусть α и β – данные плоскости, и точка А – точка пересечения прямых a_1 и a_2. От противного. Предположим, что плоскости α и β не параллельны, т.е. пересекаются по некоторой прямой c.





По признаку ||-ти прямой и плоскости прямая $a_1 \parallel \beta$ и прямая $a_2 \parallel \beta$. Поэтому прямые a_1 и a_2 не пересекают прямую c (она лежит в пл. β).



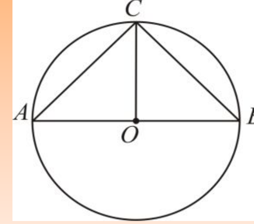


Таким образом, в плоскости *α* через точку *A* проходят две прямые a_1 и a_2, которые || прямой *с*. Но это невозможно по аксиоме параллельных прямых:

через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной, параллельной данной.

Сл-но, наше предположение неверно, и плоскости *α* и *β* параллельны.

Теорема о пересечении двух параллельных плоскостей третьей



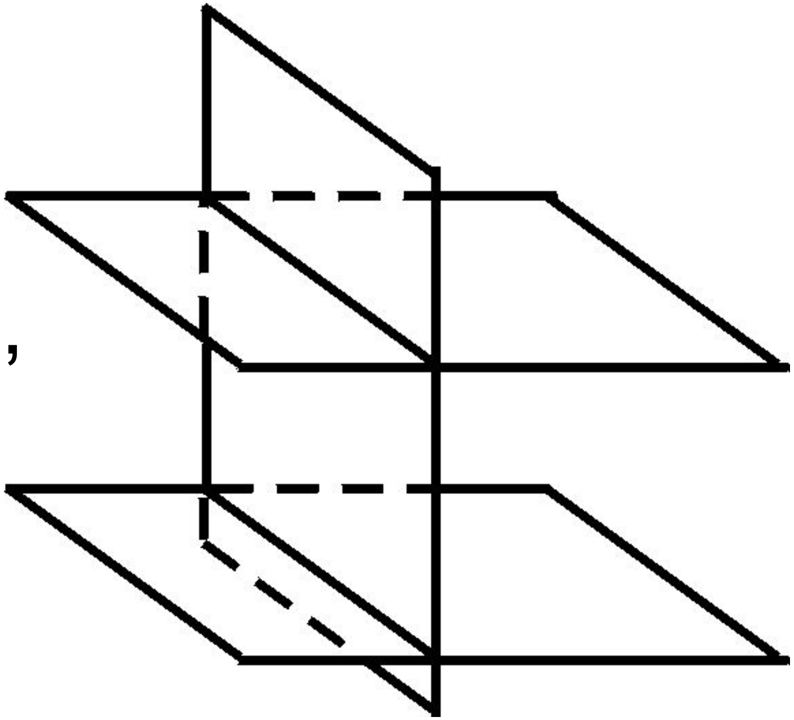
Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то прямые пересечения параллельны.

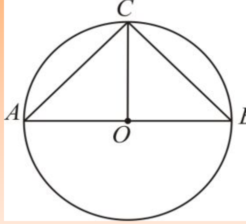
Док-во

Так как эти прямые

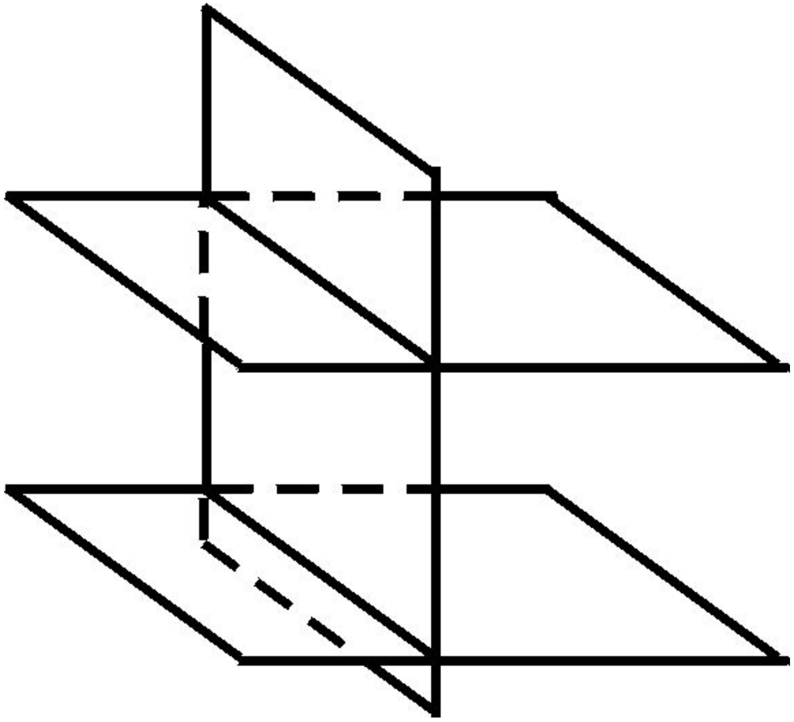
лежат в одной плоскости,

то они либо ||, либо $\times$.

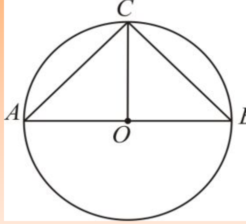




Если прямые пересекаются, то точка пересечения лежит в каждой из параллельных плоскостей, что невозможно.



Теорема о равенстве отрезков парал. прямых



Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны.

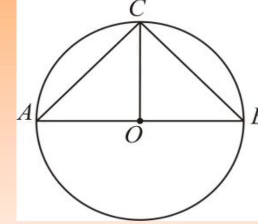
Доказательство

Пусть α и β – параллельные плоскости,

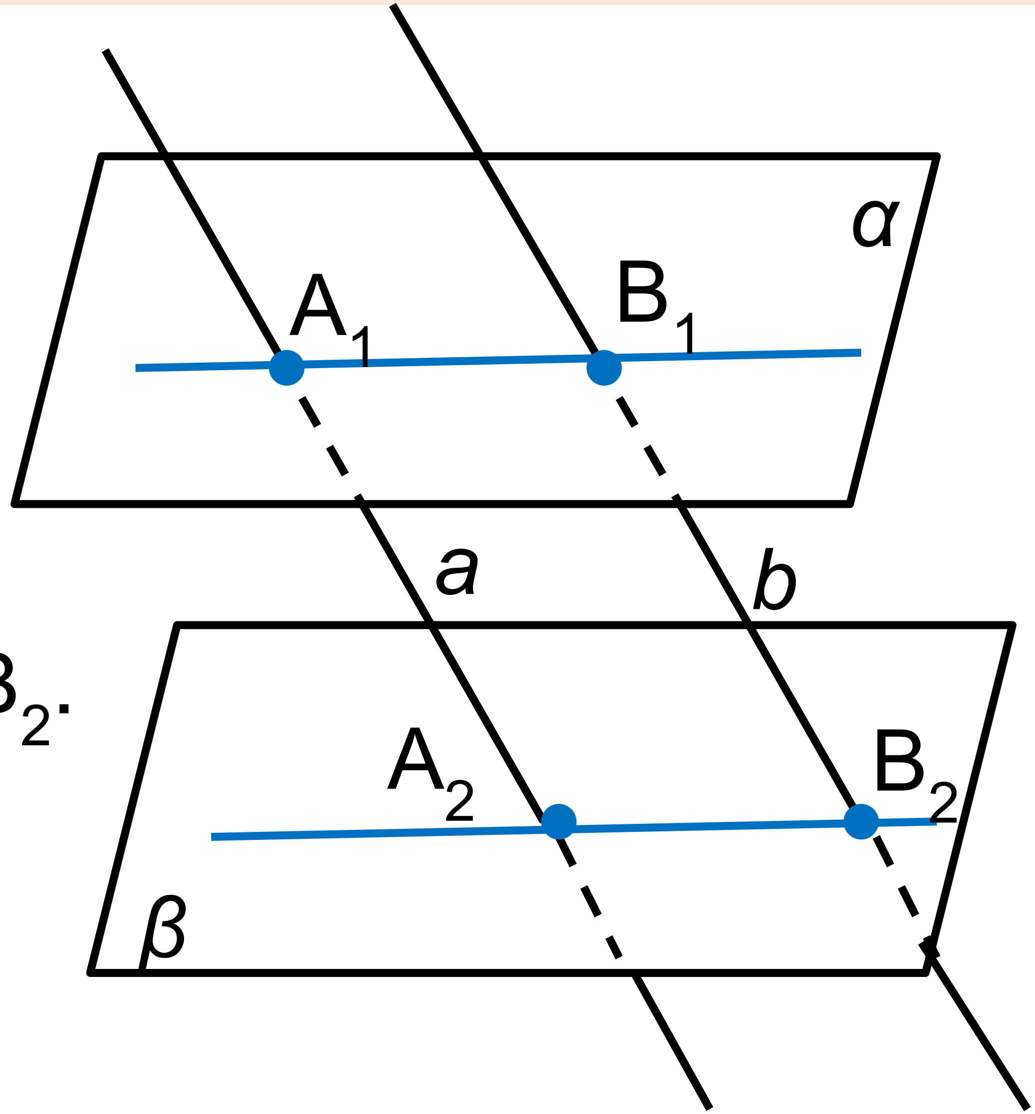
a и b – пересекающие их параллельные прямые; точки A_1, A_2, B_1, B_2 – точки пересечения прямых с плоскостями.

Надо доказать, что $A_1A_2 = B_1B_2$.

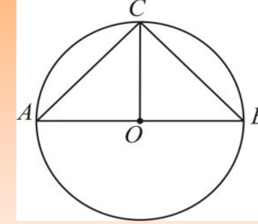
Теорема



Проведем через прямые a и b плоскость. Она пересекает плоскости α и β по параллельным прямым A_1B_1 и A_2B_2. Четырехугольник $A_1A_2B_2B_1$ – параллелограмм.



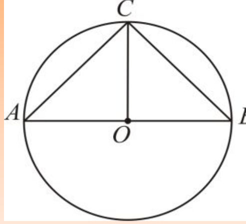
Литература



Геометрия, 7 – 11. Под ред. Погорелова

Домашнее задание

1. Выучите определения и формулировки приведенных теорем наизусть
2. Подготовьтесь к диктанту по этим формулировкам


C
A
O