Параллелограмм Вариньона решает задачи

Цель: изучить теорему Вариньона и научиться применять ее на практике с наименьшими временными затратами.

Задачи:

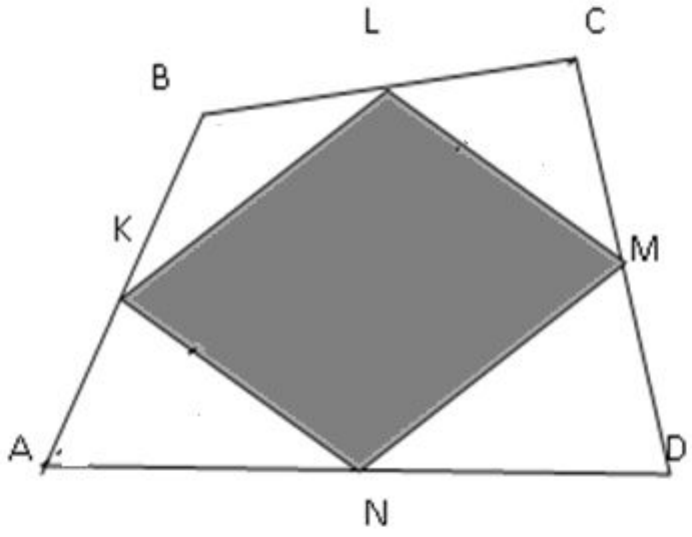
1. Изучить теоретический материал: понятия «параллелограмм Вариньона», бимедианы четырехугольника, разобрать доказательство теоремы Вариньона и следствия из нее.
2. Сравнить количество времени, необходимое для решения задач традиционным способом и, используя теорему Вариньона.
3. Показать решение олимпиадных заданий с помощью параллелограмма Вариньона.

Пьер Вариньон (1654 – 1722)

- Французский механик и математик.
- Написал учебник по элементарной геометрии (издан в 1731 году).
- Первым доказал, что середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Теорема Вариньона

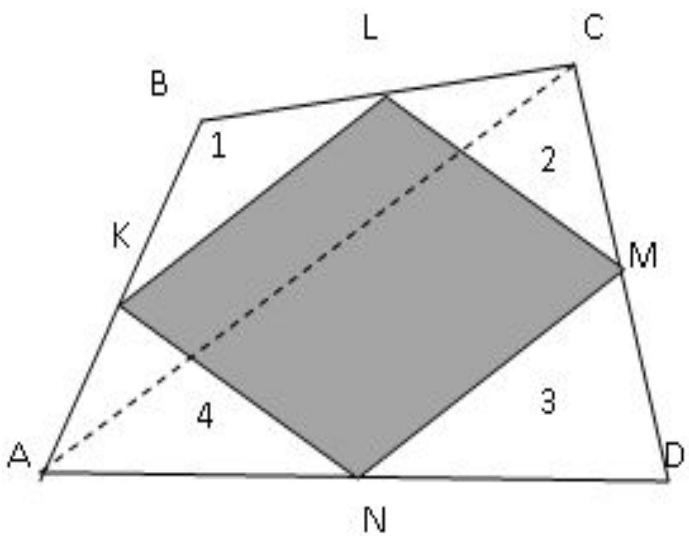
Четырехугольник, образованный путем последовательного соединения середин сторон выпуклого четырехугольника, является **параллелограммом**, и его площадь равна половине площади данного четырехугольника.



Дано:
ABCD – выпуклый четырехугольник,
AK=KB, BL=LC, CM= MD, AN=ND

Доказать:
1) KLMN – параллелограмм;
2) $S_{KLMN} = S_{ABCD} / 2$

Доказательство:



Рассмотрим треугольник ABC.
KL - средняя линия треугольника ABC
(по определению),
следовательно, $KL \parallel AC$.
MN – средняя линия треугольника ADC,
$MN \parallel AC$.
Так как $KL \parallel AC$ и $MN \parallel AC$, следовательно,
$KL \parallel NM$ и $KL=MN=AC/2$.
Таким образом, KLMN - параллелограмм. Этот параллелограмм называется параллелограммом Вариньона данного четырехугольника.

2. Средняя линия треугольника отсекает от него треугольник, площадь которого в четыре раза меньше площади исходного треугольника, т.е. $S_{KBL} = S_{ABC}/4$, $S_{MDN}=S_{ADC}/4$.

Следовательно, $S_1+S_3=S_{ABCD}/4$.

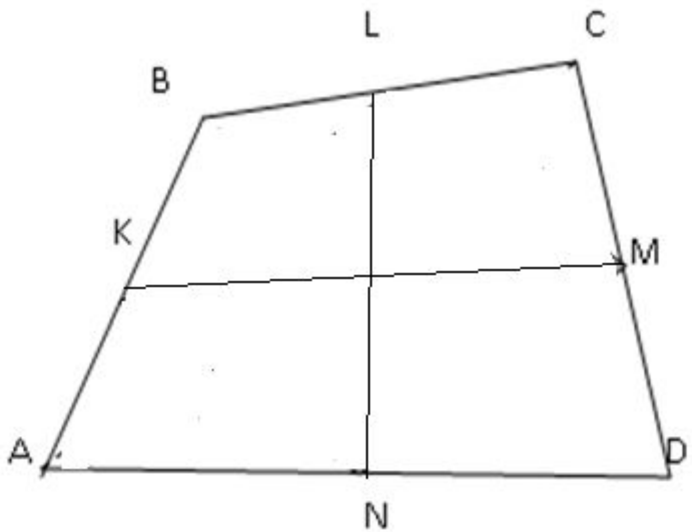
Аналогично, $S_2+S_4=S_{ABCD}/4$.

$S_1+S_3 + S_2+S_4 = S_{ABCD}/4 + S_{ABCD}/4 = S_{ABCD}/2$.

Т.е., $S_{KLMN} = S_{ABCD}/2$.

Что и требовалось доказать.

Бимедианы четырехугольника



– это отрезки, соединяющие

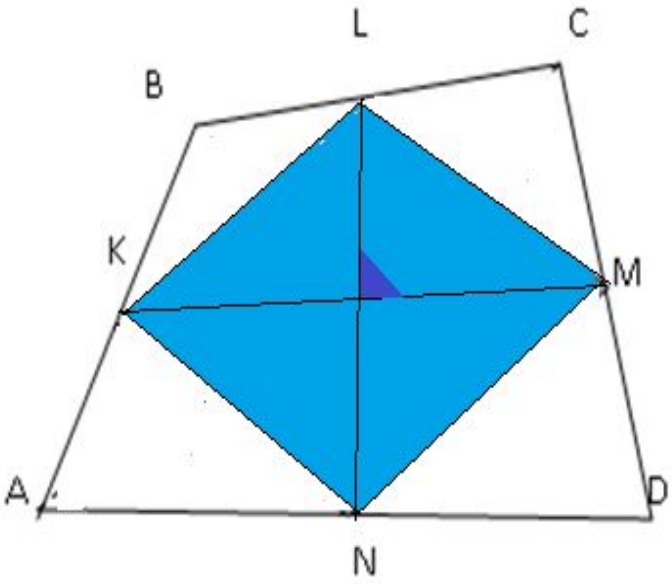
середины противоположных сторон

KM и **LN**

(***диагонали***

параллелограмма Вариньона)

Следствия из теоремы Вариньона



№1

Параллелограмм Вариньона является

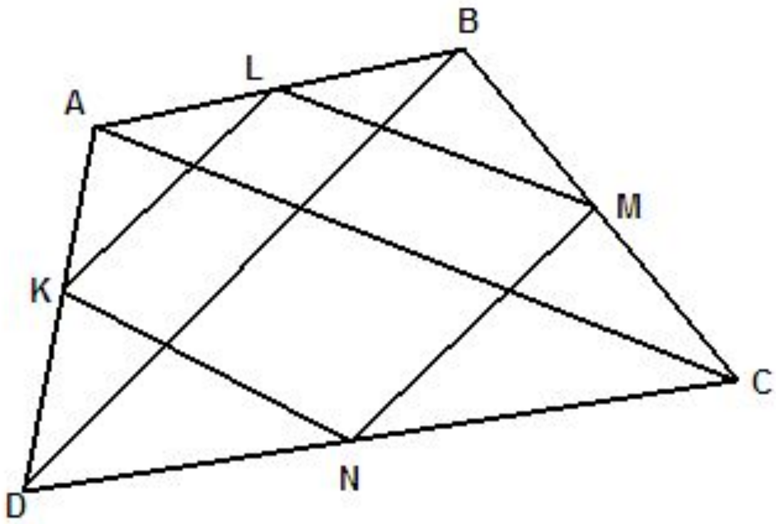
ромбом тогда и только тогда, когда

в исходном четырехугольнике:

1) **диагонали равны AC=BD;**

2) **бимедианы перпендикулярны**

KM $\perp$ LN



№2

Параллелограмм Вариньона является **прямоугольником** тогда и только тогда, когда в исходном четырехугольнике:

1) **диагонали перпендикулярны;**

$AC \perp BD$

2) **бимедианы равны**

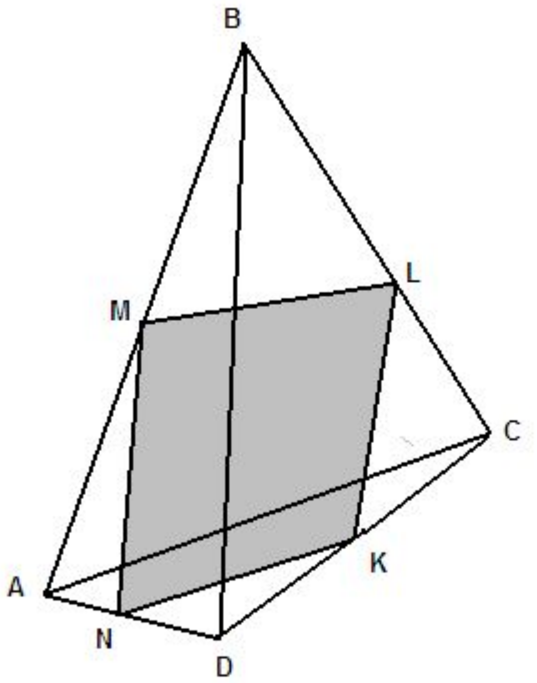
KM=LN

№3

Параллелограмм Вариньона является **квадратом** тогда и только тогда, когда в исходном четырехугольнике:

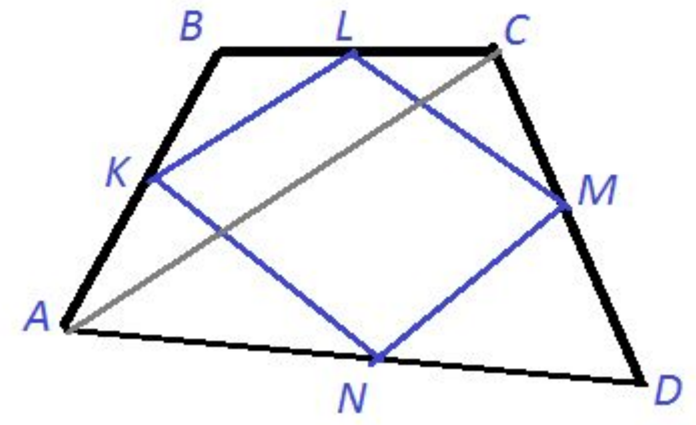
1) **диагонали равны AC=BD и перпендикулярны AC $\perp$ BD;**

2) **бимедианы равны MK=NL и перпендикулярны MK$\perp$NL**



Решение задач (из учебника №567)

- *Докажите, что середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма.*



Дано: *ABCD – четырехугольник*
AK=KB, BL=LC, CM=MD, AN=ND

Доказать: KLMN – параллелограмм

Новое доказательство:

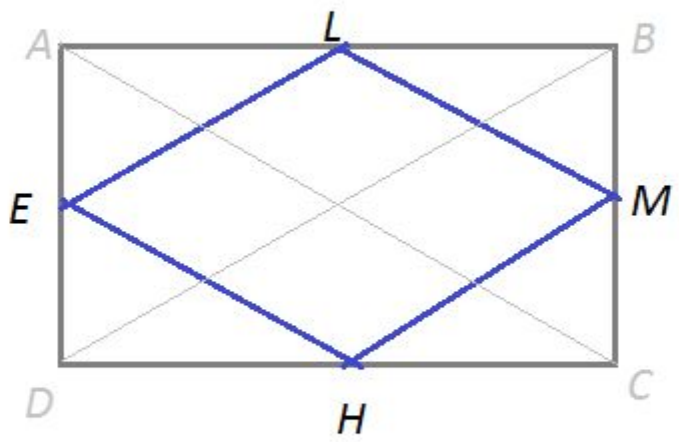
KLMN – параллелограмм Вариньона (по определению)

№568(а)

- *Докажите, что четырехугольник – ромб, если его вершинами являются середины сторон прямоугольника*

Дано: ABCD – прямоугольник,
DE=EA, AL=LB, BM=MC, DH=HC

Доказать: ELMH – ромб

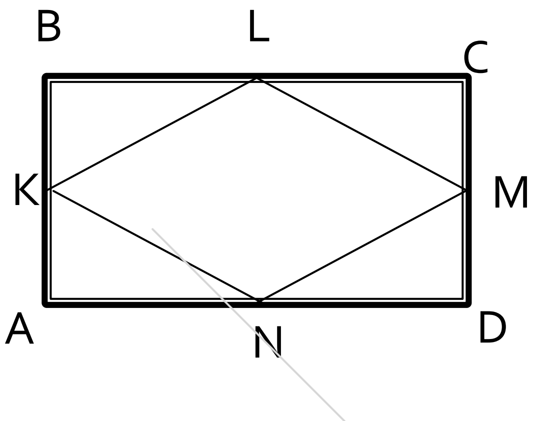


Новое доказательство:

ELMH – ромб
(по 1 следствию из теоремы Вариньона)

Олимпиадные задачи

Докажите, что если диагонали четырехугольника равны, то его площадь равна произведению средних линий.



Дано:
ABCD- четырехугольник
AC=BD
Доказать:
S_{ABCD} = KM * LN

Доказательство:
KLMN – параллелограмм Вариньона. Так как AC= BD, параллелограмм Вариньона является ромбом. S_{KLMN} =KM*LN /2 (площадь ромба равна половине произведения его диагоналей).

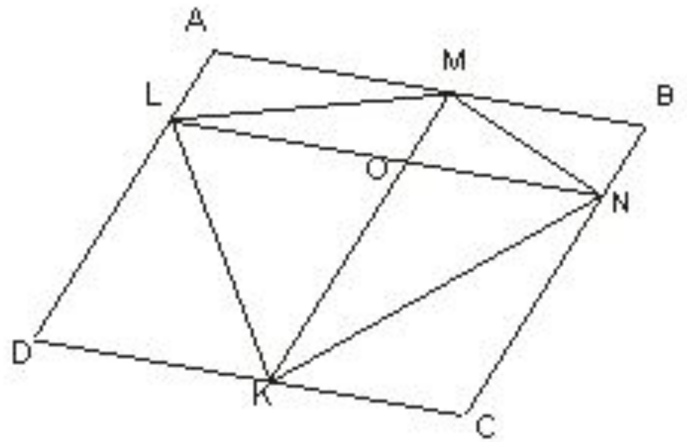
$$\mathbf{S_{ABCD} = 2\ S_{KLMN} = KM * LN}$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Задачи: №568(б), №566

А также задача:

Докажите, что площадь параллелограмма, образованного прямыми, проходящими через вершины выпуклого четырехугольника и параллельными его диагоналям, в два раза больше площади исходного четырехугольника



«Нет ничего нового под солнцем,

но есть кое-что старое, чего мы не знаем»

Лоренс Питер

Пьер Вариньон жил в 18 веке, но теорема Вариньона как нельзя актуальна именно в наши дни, когда чтобы всё успеть, необходимо гораздо больше, чем 24 часа в сутки.

Доказательство задачи на дом: слайд 13

Доказательство:

$S_{ABCD}=S_{LMNK}+S_{LKD}+S_{ALM}+S_{BMN}+S_{KCN}$

Так как *AMOL*, *MONB*, *CKON*, *DKOL* - параллелограммы,

То $S_{ALM}=S_{MOL}$, $S_{MBN}=S_{MON}$, $S_{NCK}=S_{KON}$.

Отсюда получаем, что ,

$S_{LKD} = S_{LOK.}$