Параметрический тест Гольдфельда-Квондта

- Тест Гольдфельда-Квондта проверяет гипотезу

$H_0 : u_i$ – остатки гомоскедастичны

против гипотезы

$H_1 : u_i$ – гетероскедастичны (с возрастающей дисперсией)

- 1-й шаг

  Ранжируем наблюдения в

  порядке возрастания значений

  независимой переменной x_j.

- 2-й шаг

  Выбираем *C* центральных наблюдений переменной и исключаем их из выборки. Число *C* обычно принимают равным от одной четвертой до одной трети общего числа наблюдений. Остаток наблюдений делится на две подвыборки, первая из которых состоит из наименьших значений переменной, вторая – из наибольших.

- 3-й шаг

Строим две эконометрические модели на основе каждой из подвыборок, содержащих по $(n-C)/2$ наблюдений

- 4-й шаг

Рассчитываем суммы квадратов отклонений

$$S_1 = \sum u_1^2$$

$$S_2 = \sum u_2^2$$

- 5-й шаг

Рассчитываем значение критерия

$$F^* = \frac{S_2}{S_1}$$

(соответствует *F*-распределению с числом степеней свободы

$$\nu_1 = \nu_2 = [(n - C)/2] - k$$

и уровнем значимости α)

Если $F^* \le F_{табл.}$, то гипотеза $H_0 : u_i$ о гомоскедастичности величин u_i принимается

Проранжируем выборку по возрастанию численности проживающих

Наблюдение	Доход кафе, грн.	Число конкурентов, ед.	Численность проживающих, чел.	Доход семьи, грн.
10	108052	2	37852	14987
24	98388	4	39334	14988
15	103324	2	39462	16194
6	91259	5	48484	15039
26	101260	3	49200	16839
8	160931	2	50244	26435
22	109622	3	52933	18760
4	122015	2	55249	20967
19	121886	3	57386	16702
32	117146	3	60457	20307
13	105564	3	61951	19001
1	107919	3	65044	13240
33	163538	2	65065	20111
11	144788	3	66921	30902
5	152827	3	73775	19576
30	105067	7	83416	22833
25	140791	3	95120	18505
14	102568	5	100441	20058
2	118866	5	101376	22554
9	98496	6	104300	24024
27	139517	4	113566	28915
21	152937	3	114520	26502
3	98579	7	124989	16916
7	123550	8	138809	21857
16	127030	5	139900	21384
18	125343	6	149894	15289
12	164571	4	166332	31573
17	166755	6	171740	18800
31	136872	6	183953	14409
20	134594	6	185105	19093
28	115236	9	194125	19033
23	149884	5	203500	33242
29	136749	7	233844	19200

Выберем число $C = 9$

Исключим девять центральных наблюдений, оставив две выборки по $\frac{33-9}{2} = 12$ наблюдений

Наблюдение	Доход кафе, грн.	Число конкурентов, ед.	Численность проживающих, чел.	Доход семьи, грн.
10	108052	2	37852	14987
24	98388	4	39334	14988
15	103324	2	39462	16194
6	91259	5	48484	15039
26	101260	3	49200	16839
8	160931	2	50244	26435
22	109622	3	52933	18760
4	122015	2	55249	20967
19	121886	3	57386	16702
32	117146	3	60457	20307
13	105564	3	61951	19001
1	107919	3	65044	13240
21	152937	3	114520	26502
3	98579	7	124989	16916
7	123550	8	138809	21857
16	127030	5	139900	21384
18	125343	6	149894	15289
12	164571	4	166332	31573
17	166755	6	171740	18800
31	136872	6	183953	14409
20	134594	6	185105	19093
28	115236	9	194125	19033
23	149884	5	203500	33242
29	136749	7	233844	19200

Строим уравнения регрессии, находим отклонения,

рассчитываем их суммы квадратов

Доход кафе (наблюдаемые значения)	**Доход кафе (предсказанные значения)**	**Отклонения**	**Квадраты отклонений**
108052	105064,6	2987,3	8924273,6
98388	94935,8	3452,1	11917376,2
103324	109581,2	-6257,2	39153532,7
91259	91309,5	-50,5	2557,9
101260	108147,1	-6887,1	47433223,1
160931	147472,3	13458,6	181134387,5
109622	115510,9	-5888,9	34679340,8
122015	128852,6	-6837,6	46753995,6
121886	108887,7	12998,2	168954772,4
117146	122117,5	-4971,5	24716257,5
105564	117715,0	-12151,0	147648076,4
107919	97771,1	10147,8	102978879,8
		Сумма квадратов отклонений	$S_1 = \sum u_1^2$ **814296674**

Доход кафе (наблюдаемые значения)	Доход кафе (предсказанные значения)	Отклонения	Квадраты отклонений
152937	151368,32	1568,67	2460747,3
98579	115153,09	-16574,09	274700739,3
123550	112708,73	10841,26	117533112,5
127030	137871,75	-10841,75	117543716,6
125343	128580,40	-3237,40	10480801,9
164571	158019,57	6551,42	42921227,6
166755	135659,44	31095,55	966933679,6
136872	136198,22	673,77	453971,5
134594	138992,18	-4398,18	19344034,5
115236	115944,41	-708,41	501854,7
149884	159361,39	-9477,39	89820964,8
136749	142242,44	-5493,44	30177979,6
		Сумма квадратов отклонений	$S_2 = \sum u_2^2$ **1672872830**

$$F^* = \frac{S_2}{S_1} = \frac{1672872830}{814296674} = 2{,}05$$

$$\nu_1 = \nu_2 = \left[\left(n - C\right)/2\right] - k = \left[\left(33 - 9\right)/2\right] - 4 = 8$$

$$\alpha = 0{,}05$$

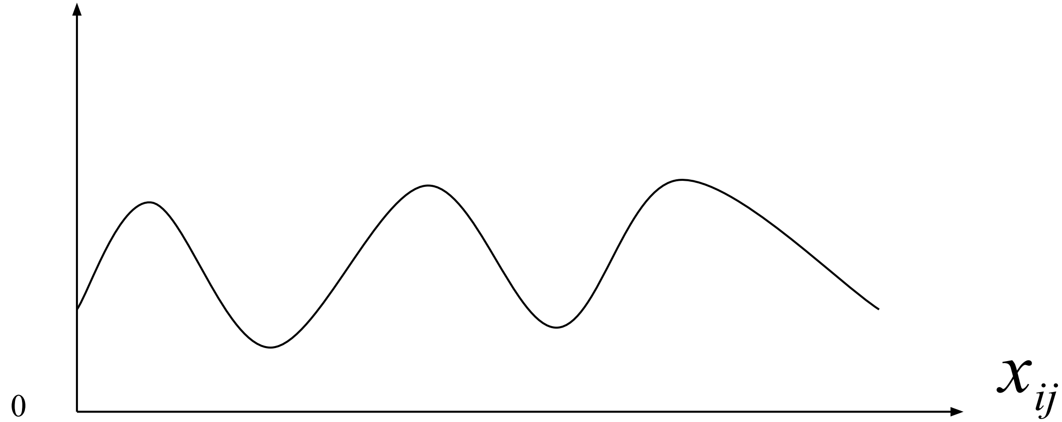
$$\left(F_{табл.} = 3{,}44\right)$$

Вывод: имеет место гомоскедастичность отклонений модели

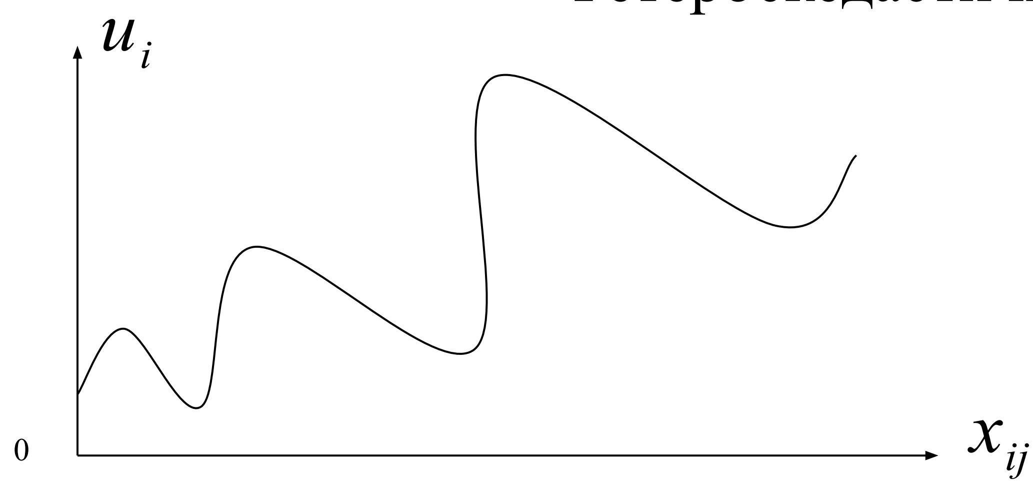
Непараметрический тест Гольдфельда-Квондта

- В основе теста лежит оценка числа вершин величины остатков, получаемых после упорядочения наблюдений переменной x_j . Оценка осуществляется визуально путем анализа графика изменения остатков u_i при изменении значений переменной x_j.

Гомоскедастичность



Гетероскедастичность



Тест Глейсера

- 1-й шаг

  Рассчитываются параметры уравнения регрессии и находятся величины отклонений u_i

- 2-й шаг

Строятся уравнения регрессии, увязывающие модули остатков и фактор пропорциональности

$$|u| = \alpha_0 + \alpha_1 x + \varepsilon \qquad |u| = \alpha_0 + \alpha_1 x^{-1} + \varepsilon$$

$$|u| = \alpha_0 + \alpha_1 x^{\frac{1}{2}} + \varepsilon \qquad |u| = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 x} + \varepsilon$$

$$|u| = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 x^2} + \varepsilon$$

Выбирается та модель, которая наиболее точно описывает связь между рассматриваемыми величинами

Если оба параметра α_0 и α_1 являются значимыми (т.е. $\alpha_0 \neq 0$ и $\alpha_1 \neq 0$), то имеет место смешанная гетероскедастичность. Если $\alpha_0 = 0$, а $\alpha_1 \neq 0$, то – чистая

Тест Бреуша-Пэйгана

- Осуществляет попытку определить гетероскедастичность путем оценки общей значимости вторичного уравнения регрессии, построенного на основе квадратов отклонений зависимой переменной и сразу нескольких факторов пропорциональности

- <u>1-й шаг</u>

  Находим отклонения на основе построенного уравнения регрессии

2-й шаг

Строим вторичное уравнение регрессии.

Зависимая переменная – квадраты отклонений. Независимые переменные – те из основной модели, которые влияют на вариацию отклонений

$$u^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_j + \varepsilon$$

p – число факторов, определяющих вариацию отклонений

- 3-й шаг

Проверяем статистическую значимость уравнения, формулируя гипотезы

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0,$$

$$H_1: \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0, \dots, \alpha_p \neq 0.$$

Рассчитываем статистику

$$L = \frac{SSR}{2\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^2}{n}\right]^2}$$

Для больших по размеру выборок L имеет χ^2-распределение с числом степеней свободы, равным p и уровнем значимости α.

Если

$$L > \chi^2_{табл.}\ ,$$

то нулевая гипотеза отвергается и уравнение считается значимым.

Т.о. делается вывод о наличии гетероскедастичности

Тест Уайта

- В качестве независимых переменных (факторов пропорциональности) выступают все исходные независимые переменные, их квадраты и попарные произведения

- <u>1-й шаг</u>

  Находим отклонения наблюдаемых значений зависимой переменной от расчетных

- 2-й шаг

Строим вторичное уравнение регрессии

$$u^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m +$$
$$+ \beta_1 x_1^2 + \cdots + \beta_m x_m^2 +$$
$$+ \gamma_1 x_1 x_2 + \cdots + \gamma_m x_{m-1} x_m + \varepsilon$$

- <u>3-й шаг</u>

Проверяем общую значимость уравнения с помощью критерия χ^2

Рассчитываем статистику nR^2 , где R^2 – нескорректированный коэффициент детерминации, которая имеет χ^2-распределение с числом степеней свободы, равным числу угловых коэффициентов модели, и уровнем значимости α

Если

$$nR^2 > \chi^2_{табл.},$$

то гипотеза об отсутствии гетероскедастичности остатков отвергается

Обобщенный метод наименьших квадратов (метод Эйткена)

Пусть модель описывается уравнением

$$Y = XA + u$$

и имеет дисперсию остатков, которая описывается выражением

$$Var(u) = \sigma_u^2 Z$$

Фактор пропорциональности Z представлен в виде симметричной, положительно определенной матрицы

$$Z = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 & \square & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 & \square & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_3} & \square & 0 \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & \square & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Диагональные элементы определяют пропорции изменения дисперсий в зависимости от наблюдения объясняющей переменной x

Если $Z = x_j$ и

$$Var(u) = \sigma_u^2 x_j,$$

то

$$\lambda_i = \frac{1}{x_{ij}}$$

Если $Z = x_j^2$ и

$$Var(u) = \sigma_u^2 x_j^2,$$

то

$$\lambda_i = \frac{1}{x_{ij}^2}$$

$$Z = P^{/} P$$

$$P = P^{/} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Матрица P - невырожденная

Используя соотношение $Z = P' P$ и вытекающие из него

$$P^{-1} Z \left(P^{-1}\right)' = E$$

и

$$\left(P^{-1}\right)' P^{-1} = Z^{-1},$$

преобразуем исходное уравнение регрессии

$$P^{-1}Y = P^{-1}X\overset{\sqcup}{A} + P^{-1}u$$

$$Y^{*} = P^{-1}Y$$

$$X^{*} = P^{-1}X$$

$$u^{*} = P^{-1}u$$

$$Y^{*} = X^{*}\overset{\sqcup}{A} + u^{*}$$

Используя выражение $P^{-1}Z\left(P^{-1}\right)^{/} = E$, можно показать, что

$$Var\left(u^{*}\right) = \sigma_{u^{*}}^{2} E$$

Вектор оценок модели рассчитывается так:

$$\hat{A} = \left[\left(X^{*} \right)' X^{*} \right]^{-1} \left(X^{*} \right)' Y^{*} = \left(X' Z^{-1} X \right)^{-1} X' Z^{-1} Y$$

Дисперсионно-ковариационная матрица

$$Var\left(\hat{A} \right) = \hat{\sigma}_{u}^{2} \left[\left(X^{*} \right)' X^{*} \right]^{-1} = \sigma_{u}^{2} \left(X' Z^{-1} X \right)^{-1}$$

Несмещенная оценка дисперсии остатков

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\left(Y^* - X^*\hat{A}\right)'\left(Y^* - X^*\hat{A}\right)}{n-k} = \frac{\left(Y - X\hat{A}\right)' Z^{-1}\left(Y - X\hat{A}\right)}{n-k} =$$

$$= \frac{u' Z^{-1} u}{n-k}.$$

Разложим общую сумму квадратов на сумму квадратов регрессии и остатков

$$Y'Z^{-1}Y = \hat{A}'X'Z^{-1}Y + u'Z^{-1}u$$

Рассчитаем общую дисперсию

$$\sigma^2_{общ.} = \frac{Y'Z^{-1}Y}{n-1},$$

дисперсию, объясняемую регрессией

$$\sigma^2_{рег.} = \frac{\hat{A}'X'Z^{-1}Y}{k-1}$$

и дисперсию остатков

$$\sigma^2_{ош.} = \frac{u^{/} Z^{-1} u}{n-k}$$

Если имеет место система соотношений

$$Var(u) = V$$

$$Y = X\overset{\sqcup}{A} + u$$

$$M(u) = 0$$

где $V = \sigma_u^2 Z$ – известная симметричная положительно определенная матрица, то вектор $\hat{A}$ рассчитывается как

$$\hat{A} = \left(X'V^{-1}X\right)^{-1} X'V^{-1}Y,$$

а дисперсионно-ковариационная матрица определяется из выражения

$$Var\left(\hat{A}\right) = \hat{\sigma}_u^2 \left(X'V^{-1}X\right)^{-1}$$

Имеются данные о затратах на питание и общих затратах

Наблюдение	Затраты на питание	Общие затраты
1	3,3	14
2	3,2	15
3	3	15
4	3,2	17
5	3,1	17
6	3,3	17
7	3,4	18
8	3,5	19
9	3,2	20
10	4,1	21
11	3,5	22
12	3,8	39
13	4	55
14	3,7	72
15	4,9	80
16	4,1	85
17	4,95	90

$S = 5$

Наблюдение	Затраты на питание	Общие затраты	Наблюдение	Затраты на питание	Общие затраты
1	3,3	14			
2	3,2	15			
3	3	15	12	3,8	39
4	3,2	17	13	4	55
5	3,1	17	14	3,7	72
6	3,3	17	15	4,9	80
			16	4,1	85
			17	4,95	90

Расчеты для первой подвыборки

Регрессионная статистика	
Множественный R	**0,021**
R-квадрат	**0,00046**
Нормированный R-квадрат	**-0,249**
Стандартная ошибка	**0,131**
Наблюдения	**6**

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	**1**	**0,00003**	**0,00003**	**0,0018**	**0,9678**
Остаток	**4**	**0,0683**	**0,0171**		
Итого	**5**	**0,0683**			

	Коэф-ты	*Стандартная ошибка*	*t-стат.*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
Y-пересеч.	**3,213**	**0,698**	**4,602**	**0,01**	**1,275**	**5,152**
Перем. X 1	**-0,00189**	**0,044**	**-0,0429**	**0,968**	**-0,124**	**0,12**

ВЫВОД ОСТАТКА

Наблюдение	*Предсказанное Y*	*Остатки*	*Квадраты остатков*
1	**3,187**	**0,113**	**0,013**
2	**3,185**	**0,015**	**0,0002**
3	**3,185**	**-0,185**	**0,0342**
4	**3,181**	**0,0189**	**0,00036**
5	**3,181**	**-0,081**	**0,0066**
6	**3,181**	**0,1189**	**0,0141**
		$S_1 =$	**0,0683**

Расчеты для второй подвыборки

Регрессионная статистика	
Множественный R	**0,65**
R-квадрат	**0,42**
Нормированный R-квадрат	**0,278**
Стандартная ошибка	**0,466**
Наблюдения	**6**

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	**1**	**0,635**	**0,635**	**2,926**	**0,162**
Остаток	**4**	**0,8675**	**0,217**		
Итого	**5**	**1,502**			

	Коэф-ты	*Стандартная ошибка*	*t-стат.*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
Y-пересеч.	**2,964**	**0,771**	**3,847**	**0,018**	**0,825**	**5,104**
Перем. X 1	**0,0182**	**0,011**	**1,711**	**0,162**	**-0,011**	**0,0478**

ВЫВОД ОСТАТКА

Наблюдение	*Предсказанное Y*	*Остатки*	*Квадраты остатков*
1	**3,674**	**0,1257**	**0,0158**
2	**3,966**	**0,0344**	**0,0012**
3	**4,275**	**-0,5750**	**0,3307**
4	**4,421**	**0,4793**	**0,2298**
5	**4,512**	**-0,4117**	**0,1695**
6	**4,603**	**0,3473**	**0,1206**
		$S_2 =$	**0,8675**

$$F^* = \frac{S_2}{S_1} = \frac{0,867509357}{0,068301887} = 12,7011$$

$$F_{табл.} = 6,39$$

Имеет место гетероскедастичность

Применим метод 1МНК

Регрессионная статистика	
Множественный R	**0,843**
R-квадрат	**0,711**
Нормированный R-квадрат	**0,691**
Стандартная ошибка	**0,325**
Наблюдения	**17**

Дисперсионный анализ					
	df	***SS***	***MS***	***F***	***Значимость F***
Регрессия	**1**	**3,899**	**3,899**	**36,82**	**0,00002**
Остаток	**4**	**1,588**	**0,1059**		
Итого	**5**	**5,4876**			

	Коэф-ты	*Стандартная ошибка*	*t-стат.*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
Y-пересеч.	**3,026**	**0,131**	**23,06**	**3,9702E-13**	**2,746**	**3,3054**
Перем. X 1	**0,0176**	**0,0029**	**6,068**	**0,00002**	**0,0114**	**0,0237**

ВЫВОД ОСТАТКА

Наблюдение	Предсказанное Y	Остатки
1	3,27	0,028
2	3,28	-0,089
3	3,28	-0,289
4	3,32	-0,12
5	3,32	-0,22
6	3,32	-0,024
7	3,34	0,058
8	3,35	0,14
9	3,37	-0,176
10	3,39	0,705
11	3,41	0,088
12	3,71	0,089
13	3,99	0,008
14	4,28	-0,58
15	4,42	0,47
16	4,51	-0,41
17	4,60	0,34

0,07	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0,07	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0,07	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0,06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0,06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0,06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0,06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0,05	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0,05	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,05	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,05	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,03	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,02	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,01	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,01	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,01	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,01

Найдем произведение $X^{/} Z^{-1}$

$$X^{/} Z^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}0714 & 0{,}0667 & 0{,}0667 & 0{,}0588 & 0{,}0588 & 0{,}0588 & 0{,}0556 & 0{,}0526 & 0{,}05 & 0{,}0476 & 0{,}0455 & 0{,}0256 & 0{,}0182 & 0{,}0139 & 0{,}0125 & 0{,}0118 & 0{,}0111 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Рассчитаем произведение $X^{/} Z^{-1} X$

$$X^{/} Z^{-1} X = \begin{pmatrix} 0{,}72558 & 17 \\ 17 & 616 \end{pmatrix}$$

Обратим полученное выражение

$$\left(X^{/} Z^{-1} X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3{,}89978 & -0{,}1076 \\ -0{,}1076 & 0{,}00459 \end{pmatrix}$$

Найдем произведение $X^{/} Z^{-1} Y$

$$X^{/} Z^{-1} Y = \begin{pmatrix} 2{,}48722 \\ 62{,}25 \end{pmatrix}$$

Рассчитаем вектор оценок $\hat{A}$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3{,}00002 \\ 0{,}01826 \end{pmatrix}$$

Уравнение регрессии $\hat{Y} = 3{,}00002 + 0{,}01826X$

По сравнению с полученным ранее уравнением

$$\hat{Y} = 3{,}0257735 + 0{,}0175513X$$

оценки нового уравнения считаются более эффективными