

1. Понятие первообразной функции. Основная теорема интегрального исчисления.
2. Неопределенный интеграл. «Неберущиеся» интегралы.
3. Свойства неопределенного интеграла.
4. Таблица интегралов элементарных функций. Формулы интегрирования.
5. Методы вычисления неопределенных интегралов.

Интеграл в древности

- Интегрирование прослеживается ещё в древнем Египте, примерно в 1800 до н. э., [Московский математический папирус](#) демонстрирует знание формулы объёма усечённой пирамиды. Первым известным методом для расчёта интегралов является [метод исчерпывания Евдокса](#) (примерно 370 до н. э.), который пытался найти площади и объёмы, разрывая их на бесконечное множество частей, для которых площадь или объём уже известны. Этот метод был подхвачен и развит [Архимедом](#), и использовался для расчёта площадей парабол и приближенного расчёта площади круга. Аналогичные методы были разработаны независимо в Китае в 3-м веке н.э. [Лю Хуэйем](#), который использовал их для нахождения площади круга. Этот метод был впоследствии использован [Дзю Чонгши](#) для нахождения объёма шара.

- Нахождение функции по ее производной является одной из важнейших задач математического анализа. Подобные задачи возникают в приложениях при исследовании процессов, в которых известна скорость изменения некоторой величины и требуется найти закон изменения самой этой величины.

Пример 1: Найти $Q(t)$ - количество продукции, произведенное предприятием к моменту времени t , если

а) $Q'(t) = x$ - скорость роста производства
(производительность)

б) $Q'(t) = (x + 2)/(x^2 + 5x)$.

Понятие первообразной функции.

Определение: Функция $F(x)$ называется первообразной функцией функции $f(x)$ на промежутке X , если в любой точке этого промежутка верно равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Это равенство можно записать так:

$$dF(x) = f(x)dx \quad x \in X,$$

поэтому функцию $y=F(x)$ также называют первообразной для выражения $f(x)dx$ на X .

Пример 2.

Функция $y = \ln x$ является первообразной для функции $y = \frac{1}{x}$ на промежутке $(0, +\infty)$, так как $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x \in (0; +\infty)$.

Для этой же функции $y = \frac{1}{x}$ на промежутке $(-\infty, 0)$ первообразной является функция $y = \ln(-x)$, поскольку

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{x}, \quad x \in (-\infty; 0)$$

Отметим, что первообразными для функции $y = \frac{1}{x}$ на промежутке $(0, +\infty)$, будут также функции $y = \ln x + 5$, $y = \ln x - 2$ и, вообще, любая функция вида $y = \ln x + C$, где C - произвольное число или, как принято говорить, произвольная постоянная.

Основная теорема интегрального исчисления.

Теорема (основная теорема интегрального исчисления).

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – любые первообразные для $f(x)$ на X , то $F_1(x) - F_2(x) = \text{const}$ на промежутке X .

Доказательство:

Введем обозначение: $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Требуется доказать, что $F(x) = \text{const}$ на X . Этот факт будет доказан позже, и тогда эта теорема будет доказана.

Следствие. Если $F(x)$ – какая-то первообразная для $f(x)$ на X , то любую другую первообразную $\Phi(x)$ можно представить в виде: $\Phi(x) = F(x) + C$, где C – некоторая постоянная.

Неопределенный интеграл.

Определение: Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением: $F(x) + C$.

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

$f(x)$ называется подынтегральной функцией.

$f(x)dx$ называется подынтегральным выражением.

Отметим, что подынтегральное выражение является дифференциалом любой первообразной функции $f(x)$:

$$dF(x) = F'(x) = f(x)dx. \quad (1)$$

Результат примера 2 можно записать в виде

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C, x \in (0; +\infty);$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C, x \in (-\infty; 0);$$

Поставим вопрос: какие функции имеют первообразную?

Любая непрерывная на промежутке X функция $f(x)$ имеет первообразную на этом промежутке. При вычислении производной любой элементарной функции в результате всегда получаем элементарную функцию. Следовательно, любая элементарная функция имеет первообразную на каждом промежутке, на котором эта функция определена.

Если одна из первообразных функции $y=f(x)$ является элементарной, то и все ее первообразные являются элементарными функциями. В этом случае говорят, что неопределенный интеграл выражается через элементарные функции или берется в конечном виде.

В ряде случаев оказывается, что первообразная элементарной функции $y=f(x)$ не выражается через элементарные функции.

Неопределенный интеграл от такой функции называют неберущимся в классе элементарных функций (кратко – неберущимся).

Примеры:

$\int e^{-x^2} dx$ – интеграл Пуассона, $\int \sin x^2 dx$ – интеграл Френеля, $\int \frac{\sin x}{x} dx$ – интегральный синус

Свойства неопределенного интеграла:

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции

$$(\int f(x) dx) = (F(x) + C)' = f(x)$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$d(\int f(x) dx) = f(x) dx.$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Свойства неопределенного интеграла:

4. Линейное свойство неопределенного интеграла:

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx, \text{ где } f, g \text{ некоторые функции.}$$

Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ – первообразная для $g(x)$. Тогда $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$, и также $\int f(x) dx = F(x) + C_1$,
 $\int g(x) dx = G(x) + C_2$.

Складывая и вычитая два последние равенства, получим:

$$\int f(x) dx \pm \int g(x) dx = (F(x) \pm G(x)) + (C_1 + C_2) \quad (1)$$

С другой стороны, $[F(x) \pm G(x)]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$

$$\text{Поэтому } \int [f(x) \pm g(x)] dx = [F(x) \pm G(x)] + C. \quad (2)$$

Правые части в этих равенствах равны с точностью до определенной постоянной, следовательно, равны и левые части.

5. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx.$$

Произвольная постоянная

При практическом вычислении неопределенных интегралов часто приходится использовать свойство линейности, что приводит к необходимости складывать произвольные постоянные или умножать их на некоторое (фиксированное) число.

Если C_1 и C_2 – постоянные, которые могут принимать любое значение из \mathbb{R} , а $a \in \mathbb{R}$ – фиксированное число, $a \neq 0$, то $C_1 + C_2 = C$, $aC = C$.

На практике при нахождении первообразных произвольную постоянную на промежуточных этапах не записывают, а добавляют лишь в конце вычислений.

$$\text{Пример 3: } \int (x^2 - 2\sin x + 1) dx = \int x^2 dx - 2 \int \sin x dx + \int dx =$$

$$= \frac{1}{3} x^3 + 2 \cos x + x + C.$$

Произвольная постоянная

При фиксировании какого-либо значения произвольной постоянной C из совокупности первообразных выбирается некоторая одна. За счет выбора C можно выбрать первообразную, которая удовлетворяет тем или иным условиям. Часто используют начальные условия: при $x = x_0 \in \mathbb{R}$ первообразная должна принимать заданное значение y_0 .

Пример 4. Зависимость производительности от времени задается .
Как зависит от времени количество производимой продукции $Q(t)$, если известно, что к моменту времени $t_0 = 1$ было выпущено продукции в объеме $Q_0 = 50$.

Так как $q(t) = Q'(t)$, то $Q(t)$ – первообразная функции $q(t)$. В нашем случае $t > 0$ и $Q(t) = 3t + 2 \ln|t| + C$.

Так как $Q(1) = 3 + 2 \ln|1| + C = 50$, то $C = 47$. Получаем функцию $Q(t) = 3t + 2 \ln|t| + 47$, характеризующую зависимость объема выпускаемой продукции от времени.

Нахождение значения неопределенного интеграла

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

Таблица интегралов элементарных функций

$$\int 0 \cdot dx = C$$

$$\int 1 \cdot dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1, x > 0$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, x \neq 0$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x) dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C (|x| \neq 1)$$

Некоторые формулы интегрирования

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, |x| \neq a$$

$$\int \frac{x dx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln |a^2 \pm x^2| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, |x| < a$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

Элементарные методы интегрирования

1. Использование таблицы интегралов.

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int 2^{3x-1} dx = \int (2^3)^x \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \int 8^x dx = \frac{1}{2} \frac{8^x}{\ln 8} + C = \frac{2^{3x}}{6 \ln 2} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, |x| < |a|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{2\sqrt{2}} + C.$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 25} &= \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 16} = \frac{1}{16} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-3}{4}\right) + C. \end{aligned}$$

Элементарные методы интегрирования

- 2. Использование линейности неопределенного интеграла.

$$f(x) = h(x) + g(x) \Rightarrow \int f(x) dx = \int h(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1, x > 0$$

$$\int (ax^2 + bx + c) dx = a \frac{x^3}{3} + b \frac{x^2}{2} + cx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$\int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx = \int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2} \sqrt{2+x^2}} dx =$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, |x| < |a|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 2} \right| + \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

Элементарные методы интегрирования

- 3. Введение нового аргумента
(подведение под знак

Δ

$$\int \frac{dx}{5x+3} = \int \frac{d(5x+3) \cdot \frac{1}{5}}{5x+3} = \frac{1}{5} \int \frac{d(5x+3)}{5x+3} = \frac{1}{5} \ln |5x+3| + C.$$

$$\int \frac{dx}{-5x+3} = \int \frac{d(-5x+3) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)}{-5x+3} = -\frac{1}{5} \int \frac{d(-5x+3)}{-5x+3} = -\frac{1}{5} \ln |-5x+3| + C.$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln |\sin x| + C.$$

$$\int \cos 3x dx = \int \cos 3x d(3x) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \sin 3x + C.$$

$$\int \frac{2x+5}{x^2+5x+6} dx = \int \frac{d(x^2+5x+6)}{x^2+5x+6} = \ln |x^2+5x+6| + C.$$

$$\int \frac{dx}{x+a} =$$

$$\int x e^{-x^2} dx =$$

$$\int \sin x \cos x dx =$$

$$\int \frac{\varphi'(t) dt}{\varphi(t)} = \ln |\varphi(t)| + C$$

Элементарные методы интегрирования

- 3. Метод подстановки (замены переменных):

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

- Теорема: Если требуется найти интеграл , но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены $x = \varphi(t)$ и $dx = \varphi'(t)dt$ получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

- Доказательство: Продифференцируем предлагаемое равенство:

$$d\int f(x)dx = d(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt)$$

- По рассмотренному выше свойству 2 неопределенного интеграла:

$$f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

что с учетом введенных обозначений и является исходным предположением. Теорема доказана.

Примеры

$$\int \sqrt{\sin x} \cos x dx = \left[\begin{array}{l} t = \sin x, \\ dt = \cos x dx. \end{array} \right] = \int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

$$\int (2x+1)^{20} dx = \left[\begin{array}{l} 2x+1 = t, \\ dt = 2 dx \end{array} \right] = \int t^{20} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{21} t^{21} \cdot \frac{1}{2} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C.$$

$$\int x(x^2+1)^{3/2} dx = \left[\begin{array}{l} t = x^2 + 1; \\ dt = 2x dx \rightarrow dx = \frac{dt}{2x} \end{array} \right] = \int t^{3/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C =$$
$$= \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C.$$

Примеры

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \left[\sqrt{x} = t, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t} \right] = \int \frac{2tdt}{(t^2+1)t} = 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C.$$

$$\int e^{\cos^2 x} \sin 2x dx = \left[t = e^{\cos^2 x}; \right. \\ \left. dt = -e^{\cos^2 x} \cdot 2 \cos x \sin x = -\sin 2x \cdot e^{\cos^2 x} dx \right] = -\int dt = -t + C = -e^{\cos^2 x} + C.$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \left[\begin{array}{l} x = \sin t, \sqrt{1-x^2} = |\cos t| \\ t = \arcsin x \\ dx = \cos t dt \end{array} \right] = \int |\cos t| \cos t dt = \pm \int \cos^2 x dt = \pm \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \pm \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \\ = \pm \frac{1}{2} \arcsin x \pm \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin x) + C = \pm \frac{1}{2} \arcsin x \pm \frac{1}{4} 2 \sin(\arcsin x) \cos(\arcsin x) + C = \pm \frac{1}{2} \arcsin x \pm \frac{1}{2} x \cos(\arcsin x) + C = \\ = \pm \frac{1}{2} \arcsin x \pm \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$\cos(\arcsin x) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \pm \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{так как } -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{следовательно } \cos t > 0.$$

Элементарные методы интегрирования.

4. Метод интегрирования по частям:

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

Где u и v – некоторые функции от x .

В дифференциальной форме: $d(uv) = u dv + v du$

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int u dv + \int v du$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла: $uv = \int u dv + \int v du$

или

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Интегрирование по частям

	$P_n(x)$ – многочлен n -ой степени	Замена	Замечание
1.	$\int P_n(x) \cos ax dx$ $\int P_n(x) \sin ax dx$	$u = P_n(x), dv = \cos ax dx,$ $u = P_n(x), dv = \sin ax dx,$	Интегрирование по частям используется в раз
2.	$\int P_n(x) e^{ax} dx$	$u = P_n(x), dv = e^{ax} dx$	Интегрирование по частям используется в раз
3.	$\int P_n(x) \ln x dx$	$u = \ln x, dv = P_n(x) dx$	
4.	$\int \arcsin x dx;$ $\int \arccos x dx;$ $\int \operatorname{arctg} x dx;$ $\int \operatorname{arccotg} x dx$	$u = \arcsin x, dv = dx,$ $u = \arccos x, dv = dx,$ $u = \operatorname{arctg} x, dv = dx,$ $u = \operatorname{arccotg} x, dv = dx.$	

Примеры

$$\int x \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x; \quad dv = x dx; \\ du = \frac{1}{x} dx; \quad v = \frac{x^2}{2}; \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + C.$$

$$\int \frac{\ln x}{x^3} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x; \quad dv = \frac{1}{x^3} dx; \\ du = \frac{1}{x} dx; \quad v = -\frac{1}{2x^2}; \end{array} \right\} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} x^{-2} \right] + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

$$\int x^2 e^{5x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2; \quad dv = e^{5x} dx; \\ du = 2x dx; \quad v = \frac{e^{5x}}{5}; \end{array} \right\} = \frac{1}{5} e^{5x} x^2 - \int \frac{1}{5} e^{5x} 2x dx = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \int x e^{5x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x; \quad dv = e^{5x} dx; \\ du = dx; \quad v = \frac{1}{5} e^{5x}; \end{array} \right\} =$$
$$= \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \left[\frac{x e^{5x}}{5} - \int \frac{1}{5} e^{5x} dx \right] = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2x e^{5x}}{25} + \frac{2}{25} \int e^{5x} dx = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2x e^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} = \frac{e^{5x}}{5} \left(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{2}{25} \right).$$

Пример кругового интеграла

$$\int e^{2x} \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx, \\ dv = \cos x dx, \quad v = \sin x \end{array} \right\} = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x} dx =$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx, \\ dv = \sin x dx, \quad v = -\cos x, \end{array} \right\} = e^{2x} \sin x - 2 \left[-e^{2x} \cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x} dx \right] = e^{2x} \sin x +$$
$$+ 2e^{2x} \cos x - 4 \int \cos x e^{2x} dx$$

В результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5 \int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} (\sin x + 2 \cos x)$$

$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) + C.$$

Определенный интеграл

- 1) *Формула Ньютона-Лейбница*
- 2) *Свойства определенного интеграла*
- 3) *Площадь криволинейной трапеции*
- 4) *Объем тел вращения*

○ Формула Ньютона-Лейбница

- Разность значений первообразной для функции f в точках b и a называют *определенным интегралом* этой функции от a до b .
Определенный интеграл функции f от a до b обозначают так:

$$\int_a^b f(x)dx$$

и читают: "Определенный интеграл от a до b эф от x дэ x ". Числа a и b называют *пределами интегрирования* (a - нижним, b - верхним), знак \int - знаком интеграла. Если $a < b$, то отрезок $[a; b]$ называют *отрезком интегрирования* и вместо "интеграл от a до b " говорят "интеграл по отрезку $[a; b]$ ". Функцию f называют *подынтегральной функцией*, а выражение $f(x)dx$ - *подынтегральным выражением*.

Итак, по определению имеем:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

где F - одна из первообразных функции f . Эту формулу называют *формулой Ньютона-Лейбница*. Разность $F(b) - F(a)$ для краткости обозначают так: $F(x)|_a^b$.
Значит,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b$$

- 1. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

- 2. Для любого значения a справедливо равенство:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Свойства определенного интеграла

- 3. Для любых a, c, b верно равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Свойства определенного интеграла

- 4. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов слагаемых

$$\int_a^b [\varphi(x) + \psi(x)] dx = \int_a^b \varphi(x) dx + \int_a^b \psi(x) dx$$

- 5. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int_a^b A \varphi(x) dx = A \int_a^b \varphi(x) dx$$

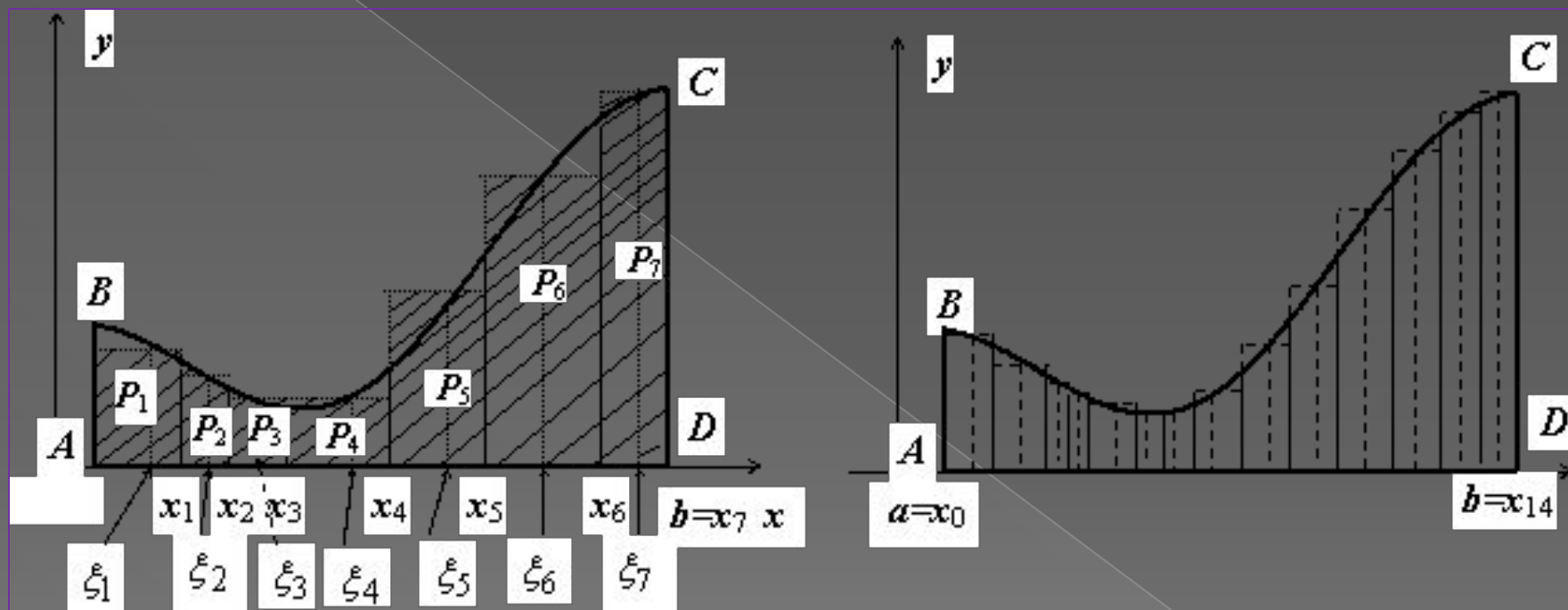
Площадь криволинейной трапеции

Теорема Ньютона-Лейбница. Пусть функция f не отрицательна, непрерывна на отрезке $[a;b]$ и имеет на нем конечное число экстремумов. Обозначим через $S(x)$ площадь криволинейной трапеции, расположенной над отрезком $[a;x]$, где $a \leq x \leq b$, и ограниченной сверху графиком функции f . Тогда $S(x)$ является первообразной для $f(x)$, т.е. на отрезке $[a;b]$ выполняется равенство $S'(x) = f(x)$. Значит, площадь криволинейной трапеции находится по формуле:

$$S(x) = \int_a^b f(x) dx$$

Для существования первообразной у функции f достаточно, чтобы эта функция была непрерывна на отрезке $[a;b]$.
Теорема. Любая функция f , непрерывная на отрезке $[a;b]$ и имеющая на нем конечное количество экстремумов, имеет на этом отрезке первообразную.

Площадь криволинейной трапеции



Теорема. Любая функция f , непрерывная на отрезке $[a;b]$ и имеющая на нем конечное количество экстремумов, имеет на этом отрезке первообразную.

Объем тел вращения

Теорема. Если функция f непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a;b]$, то объем V тела, полученного при вращении соответствующей криволинейной трапеции вокруг оси абсцисс, вычисляется формулой:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Пример. Найдем объем шара радиуса R .
Решение. Шар получается при вращении вокруг оси абсцисс дуги окружности. Уравнение полуокружности имеет вид:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Объем тел вращения

● Поэтому

$$V = \pi \int_a^b (R^2 - x^2) dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \frac{4}{3} \pi R^3$$

