Первообразная функция. Неопределенный интеграл.

1. Понятие первообразной функции. Основная теорема интегрального исчисления.
2. Неопределенный интеграл. «Неберущиеся» интегралы.
3. Свойства неопределенного интеграла.
4. Таблица интегралов элементарных функций. Формулы интегрирования.
5. Методы вычисления неопределенных интегралов.

Интеграл в древности

- Интегрирование прослеживается ещё в древнем Египте, *примерно* в 1800 до н. э., Московский математический папирус демонстрирует знание формулы объёма усечённой пирамиды. Первым известным методом для расчёта интегралов является метод исчерпывания Евдокса (*примерно* 370 до н. э.), который пытался найти площади и объёмы, разрывая их на бесконечное множество частей, для которых площадь или объём уже известны. Этот метод был подхвачен и развит Архимедом, и использовался для расчёта площадей парабол и приближенного расчёта площади круга. Аналогичные методы были разработаны независимо в Китае в 3-м веке н.э Лю Хуэйем, который использовал их для нахождения площади круга. Этот метод был впоследствии использован Дзю Чонгши для нахождения объёма шара.

- Нахождение функции по ее производной является одной из важнейших задач математического анализа. Подобные задачи возникают в приложениях при исследовании процессов, в которых известна скорость изменения некоторой величины и требуется найти закон изменения самой этой величины.

Пример 1: Найти $Q(t)$ - количество продукции, произведенное предприятием к моменту времени t, если

а) $Q'(t) = x$ - скорость роста производства (производительность)

б) $Q'(t) = (x + 2)/(x^2+5x)$.

Понятие первообразной функции.

Определение: Функция F(x) называется первообразной функцией функции f(x) на промежутке X, если в любой точке этого промежутка верно равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Это равенство можно записать так:

$$dF(x) = f(x)dx \qquad \forall x \in X,$$

поэтому функцию y=F(x) также называют первообразной для выражения f(x)dx на X.

Пример 2.

Функция $y = \ln x$ является первообразной для функции $y = \dfrac{1}{x}$ на промежутке (0, +∞), так как $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \quad x \in (0; +\infty)$.

Для этой же функции $y = \dfrac{1}{x}$ на промежутке (-∞, 0) первообразной является функция $y = \ln(-x)$, поскольку

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{x}, \quad x \in (-\infty; 0)$$

Отметим, что первообразными для функции $y = \dfrac{1}{x}$ на промежутке (0, +∞), будут также функции $y = \ln x + 5$, $y = \ln x - 2$ и, вообще, любая функция вида $y = \ln x + C$, где C - произвольное число или, как принято говорить, произвольная постоянная.

Основная теорема интегрального исчисления.

Теорема (основная теорема интегрального исчисления).

Если $F1(x)$ и $F2(x)$ – любые первообразные для $f(x)$ на X, то $F1(x) – F2(x) = const$ на промежутке X.

Доказательство:

Введем обозначение: $F(x) = F1(x) – F2(x)$. Требуется доказать, что $F(x) = const$ на X. Этот факт будет доказан позже, и тогда эта теорема будет доказана.

Следствие. Если $F(x)$ – какая-то первообразная для $f(x)$ на X, то любую другую первообразную $Ф(x)$ можно представить в виде: $Ф(x) = F(x)+C$, где C – некоторая постоянная.

Неопределенный интеграл.

Определение: Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением: F(x) + C.

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

f(x) называется подынтегральной функцией.

f(x)dx называется подынтегральным выражением.

Отметим, что подынтегральное выражение является дифференциалом любой первообразной функции f(x):

$dF(x) = F'(x) = f(x)dx.$ (1)

Результат примера 2 можно записать в виде

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C, x \in (0; +\infty);$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C, x \in (-\infty; 0);$$

Поставим вопрос: какие функции имеют первообразную?

Любая непрерывная на промежутке X функция f(x) имеет первообразную на этом промежутке. При вычислении производной любой элементарной функции в результате всегда получаем элементарную функцию. Следовательно, любая элементарная функция имеет первообразную на каждом промежутке, на котором эта функция определена.

Если одна из первообразных функции y=f(x) является элементарной, то и все ее первообразные являются элементарными функциями. В этом случае говорят, что неопределенный интеграл выражается через элементарные функции или берется в конечном виде.

В ряде случаев оказывается, что первообразная элементарной функции y=f(x) не выражается через элементарные функции. Неопределенный интеграл от такой функции называют неберущимся в классе элементарных функций (кратко – неберущимся).

Примеры:

$\int e^{-x^2}dx$ – *интеграл Пуассона*, $\int \sin x^2 dx$ – *интеграл Френеля*, $\int \frac{\sin x}{x}dx$ – *интегральный синус*

Свойства неопределенного интеграла:

1. Производная от неопределенного интеграла равна подинтегральной функции
$$(\int f(x)dx) = (F(x) + C)' = f(x)$$
2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подинтегральному выражению
$$d(\int f(x)dx)= f(x)dx.$$
3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:
$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Свойства неопределенного интеграла:

4. Линейное свойство неопределенного интеграла:
$\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$, где f, g некоторые функции.
Пусть F(x) – первообразная для f(x), а G(x) – первообразная для g(x). Тогда $F'(x) = f(x)$, $G(x) = g(x)$, и также $\int f(x)dx = F(x) + C_1$, $\int g(x)dx = G(x) + C_2$.
Складывая и вычитая два последние равенства, получим:
$$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = (F(x) \pm G(x)) + (C_1 + C_2) \qquad (1)$$
С другой стороны, $[F(x) \pm G(x)]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$/
$$\text{Поэтому } \int[f(x) \pm g(x)]dx = [F(x) \pm G(x)] + C. \qquad (2)$$
Правые части в этих равенствах равны с точностью до определенной постоянной, следовательно, равны и левые части.

5. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:
$$\int C*f(x)dx = C*\int f(x)dx.$$

Произвольная постоянная

При практическом вычислении неопределенных интегралов часто приходится использовать свойство линейности, что приводит к необходимости складывать произвольные постоянные или умножать их на некоторое (фиксированное) число.

Если C_1 и C_2 – постоянные, которые могут принимать любое значение из R, а O R – фиксированное число, а≠0, то $C_1 + C_2 = C$, $aC = C$.

На практике при нахождении первообразных произвольную постоянную на промежуточных этапах не записывают, а добавляют лишь в конце вычислений.

Пример 3: $\int(x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2dx - 2\int \sin x dx + \int dx =$

$=$

$$\frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C.$$

Произвольная постоянная

При фиксировании какого-либо значения произвольной постоянной C из совокупности первообразных выбирается некоторая одна. За счет выбора C можно выбрать первообразную, которая удовлетворяет тем или иным условиям. Часто используют начальные условия: при $x = x_0$ O R первообразная должна принимать заданное значение y_0.

Пример 4. Зависимость производительности от времени задается .

Как зависит от времени количество производимой продукции Q(t), если известно, что к моменту времени t0 = 1 было выпущено продукции в объеме Q0=50.

Так как q(t)=Q'(t), то Q(t) – первообразная функции q(t). В нашем случае t>0 b Q(t) = 3t + 2 lnItI + C.

Так как Q(1)=3 + 2 lnI1I+ C = 50, то C=47. Получаем функцию Q(t)=3t+2lnItI+47, характеризующую зависимость объема выпускаемой продукции от времени.

Нахождение значения неопределенного интеграла

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

Таблица интегралов элементарных функций

$$\int 0 \cdot dx = C$$

$$\int 1 \cdot dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1, x > 0$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, x \neq 0$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \left(1 + tg^2 x\right) dx = tgx + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + ctg^2 x) dx = -ctgx + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C = -arcctgx + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C(|x| \neq 1)$$

Некоторые формулы интегрирования

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C, |x| \neq a$$

$$\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln \left| a^2 \pm x^2 \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, |x| < |a|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

Элементарные методы интегрирования

- 1. Использование таблицы интегралов.

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int 2^{3x-1} dx = \int (2^3)^x \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}\int 8^x dx = \frac{1}{2}\frac{8^x}{\ln 8} + C = \frac{2^{3x}}{6\ln 2} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, |x| < |a|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}} + C.$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 25} = \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 16} = \frac{1}{16}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{16} arctg\left(\frac{x-3}{4}\right) + C.$$

16

Элементарные методы интегрирования

- 2. Использование линейности неопределенного интеграла.

$$f(x) = h(x) + g(x) \Rightarrow \int f(x)dx = \int h(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1, x > 0$$

$$\int (ax^2 + bx + c)dx = a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, |x| < |a|$$

$$\int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx = \int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{2+x^2}} dx =$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+2}\right| + \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

Элементарные методы интегрирования

- 3. Введение нового аргумента (подведение под знак д

$$\int\frac{dx}{5x+3}=\int\frac{d(5x+3)\cdot\frac{1}{5}}{5x+3}=\frac{1}{5}\int\frac{d(5x+3)}{5x+3}=\frac{1}{5}\ln|5x+3|+C.$$

$$\int\frac{dx}{x+a}=$$

$$\int\frac{dx}{-5x+3}=\int\frac{d(-5x+3)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)}{-5x+3}=-\frac{1}{5}\int\frac{d(-5x+3)}{-5x+3}=-\frac{1}{5}\ln|-5x+3|+C.$$

$$\int xe^{-x^2}dx=$$

$$\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}=\ln|\sin x|+C.$$

$$\int\sin x\cos x\,dx=$$

$$\int\cos 3x\,dx=\int\cos 3x\,d(3x)\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\sin 3x+C.$$

$$\int\frac{2x+5}{x^2+5x+6}dx=\int\frac{d(x^2+5x+6)}{x^2+5x+6}=\ln|x^2+5x+6|+C.$$

$$\int\frac{\varphi'(t)dt}{\varphi(t)}=$$

Элементарные методы интегрирования

- 3. Метод подстановки (замены переменных):

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

- Теорема: Если требуется найти интеграл , но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x =и dx = получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

- Доказательство: Продифференцируем предлагаемое равенство:

$$d\int f(x)dx = d(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt)$$

- По рассмотренному выше свойству 2 неопределенного интеграла:

$$f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

что с учетом введенных обозначений и является исходным предположением. Теорема доказана.

Примеры

$$\int \sqrt{\sin x}\cos x dx = \begin{bmatrix} t = \sin x, \\ dt = \cos x dx. \end{bmatrix} = \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$$

$$\int (2x+1)^{20} dx = \begin{bmatrix} 2x+1 = t; \\ dt = 2dx \end{bmatrix} = \int t^{20} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{21} t^{21} \cdot \frac{1}{2} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C.$$

$$\int x(x^2+1)^{3/2} dx = \begin{bmatrix} t = x^2 + 1; \\ dt = 2xdx \rightarrow dx = \dfrac{dt}{2x}. \end{bmatrix} = \int t^{3/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C =$$

$$= \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C.$$

Примеры

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}=\left[\sqrt{x}=t,\quad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2t}\right]=\int\frac{2tdt}{(t^2+1)t}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2arctgt+C=2arctg\sqrt{x}+C.$$

$$\int e^{\cos^2 x}\sin 2xdx=\left[\begin{array}{l} t=e^{\cos^2 x};\\ dt=-e^{\cos^2 x}\cdot 2\cos x\sin x=-\sin 2x\cdot e^{\cos^2 x}dx\end{array}\right]=-\int dt=-t+C=-e^{\cos^2 x}+C.$$

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\left[\begin{array}{l} x=\sin t,\ \sqrt{1-x^2}=|\cos t|\\ t=\arcsin x\\ dx=\cos tdt\end{array}\right]=\int|\cos t|\cos tdt=\pm\int\cos^2 xdt=\pm\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\pm\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=$$

$$=\pm\frac{1}{2}\arcsin x\pm\frac{1}{4}\sin(2\arcsin x)+C=\pm\frac{1}{2}\arcsin x\pm\frac{1}{4}2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x)+C=\pm\frac{1}{2}\arcsin x\pm\frac{1}{2}x\cos(\arcsin x)+C=$$

$$=\pm\frac{1}{2}\arcsin x\pm\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C.$$

$\cos(\arcsin x)=\pm\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}=\pm\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x^2}$, так как $-\frac{\pi}{2}\le \arcsin x\le\frac{\pi}{2}$, следовательно $\cos t > 0$.

Элементарные методы интегрирования.

4. Метод интегрирования по частям:

Способ основан на известной формуле производной произведения:

(uv)' = u'v +v'u

Где u и v – некоторые функции от x.

В дифференциальной форме: d*(uv) = udv+vdu*

Проинтегрировав, получаем: *∫d(uv) = ∫udv+∫vdu*, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла: *uv=∫udv+∫vdu*

или

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Интегрирование по частям

	Pn(x) – многочлен n-ой степени	Замена	Замечание
1.	$\int P_n(x)\cos ax dx$ $\int P_n(x)\sin ax dx$	u= $P_n(x)$, dv = cosaxdx, u=$P_n(x)$, dv = sinaxdx,	Интегрирование по частям используется n раз
2.	$\int P_n(x) e^{ax} dx$	u=$P_n(x)$, dv = e^{ax} dx	Интегрирование по частям используется n раз
3.	$\int P_n(x)\ln x dx$	u=lnx, dv =$P_n(x)$dx	
4.	$\int \arcsin x dx$; $\int \arccos x dx$; $\int \mathrm{arc\,tg} x dx$; $\int \mathrm{arc\,ctg} x dx$	u=arcsinx, dv =dx, u=arccosx, dv =dx, u=arctgx, dv =dx, u=arcctgx, dv =dx.	

Примеры

$$\int x\ln x\,dx=\left\{\begin{matrix} u=\ln x; & dv=x\,dx; \\ du=\frac{1}{x}dx; & v=\frac{x^2}{2}; \end{matrix}\right\}=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C=\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C.$$

$$\int\frac{\ln x}{x^3}dx=\left\{\begin{matrix} u=\ln x; & dv=\frac{1}{x^3}dx; \\ du=\frac{1}{x}dx; & v=-\frac{1}{2x^2}; \end{matrix}\right\}=-\frac{\ln x}{2x^2}-\int-\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x}dx=-\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3}=-\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]+C=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C.$$

$$\int x^2e^{5x}dx=\left\{\begin{matrix} u=x^2; & dv=e^{5x}dx; \\ du=2x\,dx; & v=\frac{e^{5x}}{5}; \end{matrix}\right\}=\frac{1}{5}e^{5x}x^2-\int\frac{1}{5}e^{5x}2x\,dx=\frac{x^2e^{5x}}{5}-\frac{2}{5}\int xe^{5x}dx=\left\{\begin{matrix} u=x; & dv=e^{5x}dx; \\ du=dx; & v=\frac{1}{5}e^{5x}; \end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{x^2e^{5x}}{5}-\frac{2}{5}\left[\frac{xe^{5x}}{5}-\int\frac{1}{5}e^{5x}dx\right]=\frac{x^2e^{5x}}{5}-\frac{2xe^{5x}}{25}+\frac{2}{25}\int e^{5x}dx=\frac{x^2e^{5x}}{5}-\frac{2xe^{5x}}{25}+\frac{2e^{5x}}{125}=\frac{e^{5x}}{5}\left(x^2-\frac{2x}{5}+\frac{2}{25}\right).$$

Пример кругового интеграла

$$\int e^{2x}\cos x\,dx=\begin{Bmatrix} u=e^{2x}; & du=2e^{2x}dx; \\ dv=\cos x\,dx, & v=\sin x \end{Bmatrix}=e^{2x}\sin x-\int \sin x\cdot 2e^{2x}dx=$$

$$=\begin{Bmatrix} u=e^{2x}; & du=2e^{2x}dx, \\ dv=\sin x\,dx, & v=-\cos x; \end{Bmatrix}=e^{2x}\sin x-2\left[-e^{2x}\cos x-\int -\cos x\cdot 2e^{2x}dx\right]=e^{2x}\sin x+$$

$$+2e^{2x}\cos x-4\int \cos x e^{2x}dx$$

В результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x}\cos x\,dx=e^{2x}(\sin x+2\cos x)$$

$$\int e^{2x}\cos x\,dx=\frac{e^{2x}}{5}(\sin x+2\cos x)+C.$$

Определенный интеграл

1) *Формула Ньютона-Лейбница*

2) Свойства определенного интеграла

3) Площадь криволинейной трапеции

4) Объем тел вращения

Формула Ньютона-Лейбница

- Разность значений первообразной для функции f в точках b и a называют *определенным интегралом* этой функции от a до b.
  Определенный интеграл функции f от a до b обозначают так:

$$\int_a^b f(x)dx$$

и читают: "Определенный интеграл от a до бэ эф от икс дэ икс". Числа a и b называют *пределами интегрирования* (a - нижним, b - верхним), знак ò - знаком интеграла. Если a<b, то отрезок [a;b] называют *отрезком интегрирования* и вместо "интеграл от a до b" говорят "интеграл по отрезку [a;b]". Функцию f называют *подынтегральной функцией*, а выражение f(x)dx - *подынтегральным выражением*.
Итак, по определению имеем:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

где F - одна из первообразных функции f. Эту формулу называют *формулой Ньютона-Лейбница*. Разность F(b)-F(a) для краткости обозначают так: $F(x)|_a^b$.
Значит,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\,\Big|_a^b$$

- 1. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

- 2. Для любого з а справедливо равенство:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Свойства определенного интеграла

- 3. Для любо с верно равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Свойства определенного интеграла

- 4. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов слагаемых

$$\int_a^b [\varphi(x) + \psi(x)]dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx$$

- 5. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int_a^b A\varphi(x)dx = A\int_a^b \varphi(x)dx$$

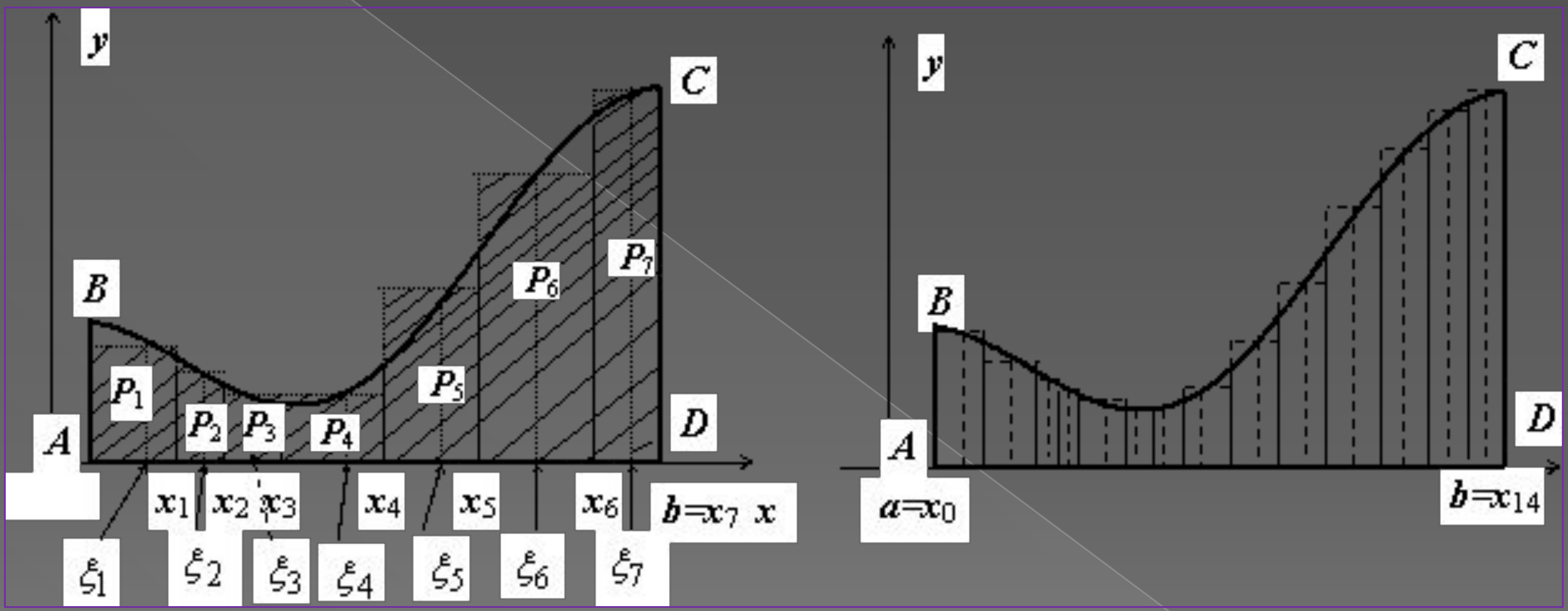
Площадь криволинейной трапеции

- *Теорема Ньютона-Лейбница*. Пусть функция f не отрицательна, непрерывна на отрезке [a;b] и имеет на нем конечное число экстремумов. Обозначим через *S*(x) площадь криволинейной трапеции, расположенной над отрезком [a;x], где a£x£b, и ограниченной сверху графиком функции f. Тогда *S*(x) является первообразной для f(x), т.е. на отрезке [a;b] выполняется равенство *S*'(x)=f(x). Значит, площадь криволинейной трапеции находится по формуле:

$$S(x)=\int_a^b f(x)dx$$

- Для существования первообразной у функции f достаточно, чтобы эта функция была непрерывна на отрезке [a;b]. *Теорема*. Любая функция f, непрерывная на отрезке [a;b] и имеющая на нем конечное количество экстремумов, имеет на этом отрезке первообразную.

Площадь криволинейной трапеции



Теорема. Любая функция f, непрерывная на отрезке [a;b] и имеющая на нем конечное количество экстремумов, имеет на этом отрезке первообразную.

Объем тел вращения

Теорема. Если функция f непрерывна и неотрицательна на отрезке [a;b], то объем V тела, полученного при вращении соответствующей криволинейной трапеции вокруг оси абс… …ются формулой:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Пример. Найдем объем шара радиуса R. Решение. Шар получается при вращении вокруг оси абс… …руга. Уравнение полуокружности имеет вид:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Объем тел вращения

- Поэтому

$$V=\pi\int_a^b\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R}=\frac{4}{3}\pi R^3$$

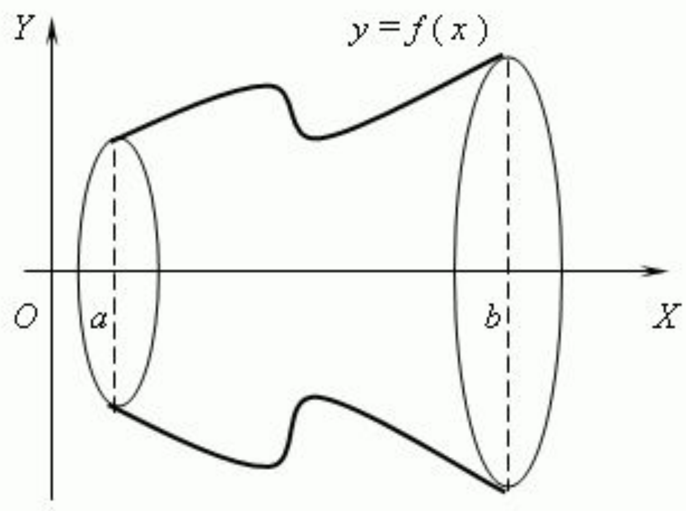


Рис. 10