«Первообразная и интеграл»

Определение первообразной.

- Функция F называется первообразной для функции f на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка

$$F'(x) = f(x)$$

Основное свойство первообразной

Задача интегрирования состоит в том, чтобы для заданной функции найти все ее первообразные. При решении этой задачи важную роль играет следующее утверждение:

Признак постоянства функции.

Если $F'(x) = 0$ на некотором промежутке I, то функция F — постоянная на этом промежутке.

Все первообразные функции f можно записать с помощью одной формулы, которую называют ***общим видом первообразных для функции*** f.

Справедлива следующая теорема (**основное свойство первообразных**):

Теорема. *Любая первообразная для функции f на промежутке I может быть записана в виде*

$$F(x)+C,$$

где $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$ на промежутке I,

C — произвольная постоянная.

Геометрический смысл первообразной

Основному свойству первообразной можно придать геометрический смысл:

графики любых двух первообразных для функции f получаются друг из друга параллельным переносом вдоль оси Oy (рис.).

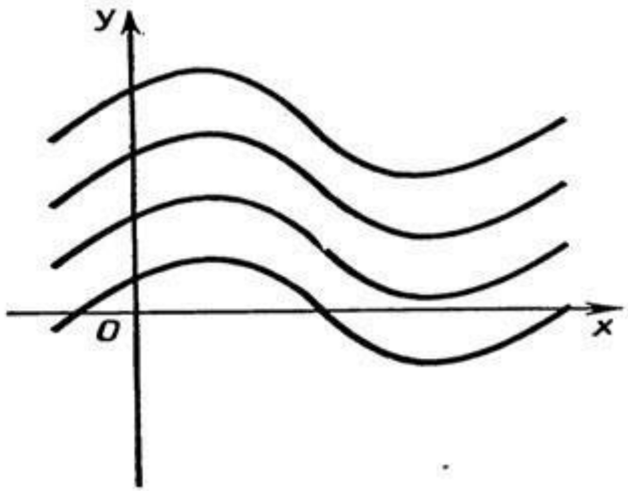

Таблица первообразных

Функция	Первообразные
a	$ax+C$
$x^p,\ p\neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1}+C$
$\frac{1}{x},\ x>0$	$\ln x+C$
$\frac{1}{x},\ x<0$	$\ln(-x)+C$
e^x	e^x+C

Функция	Первообразные
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$
$\sin x$	$-\cos x+C$
$\cos x$	$\sin x+C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x+C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x+C$

Правила вычисления первообразных

Правило 1 ***Если F есть первообразная для f, а G — первообразная для g, то F+G есть первообразная для f+g.***

$$(F+G)'=F'+G'=f+g$$

- Правило 2. ***Если F есть первообразная для f, а k — постоянная, то функция kF — первообразная для kf.***

$$(kF)'=kF'=kf.$$

- Правило 3. ***Если F (x) есть первообразная для f (x), а k и b — постоянные, причем k≠0, то*** $\frac{1}{k}F(kx+b)$ ***есть первообразная для f (kx+b).***

Криволинейная трапеция

Пусть на отрезке [a; b] оси Ox задана непрерывная функция f, не меняющая на нем знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком [a; b] и прямыми x = a и x = b (рис. 1), называют **криволинейной трапецией**.

Различные виды криволинейных трапеций

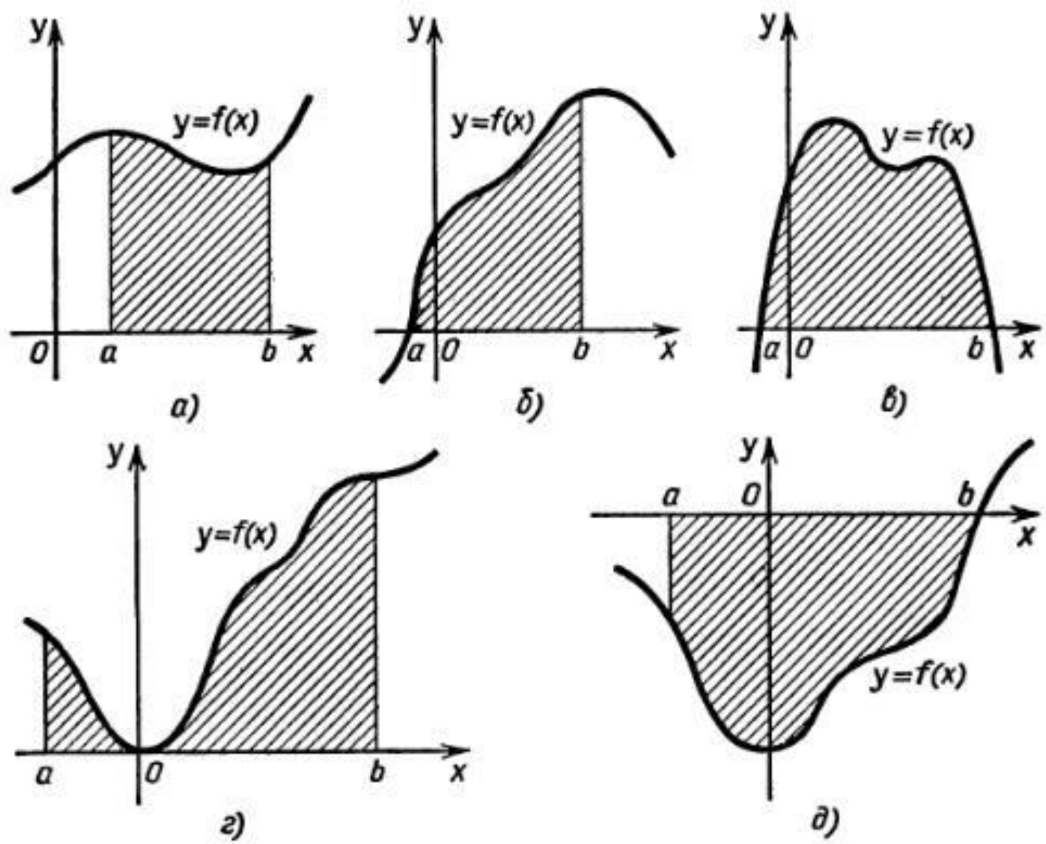

Рис. 1

Для вычисления площадей криволинейных трапеций применяют следующую теорему:

Теорема. *Если f — непрерывная и неотрицательная на отрезке [a; b] функция, а F — ее первообразная на этом отрезке, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции) равна приращению первообразной на отрезке [a; b] т. е.*

$$S=F(b)-F(a).$$

Интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.

- Рассмотрим другой подход к задаче вычисления площади криволинейной трапеции. Для простоты будем считать функцию f неотрицательной и непрерывной на отрезке $[a; b]$ тогда площадь S соответствующей криволинейной трапеции можно приближенно подсчитать следующим образом.

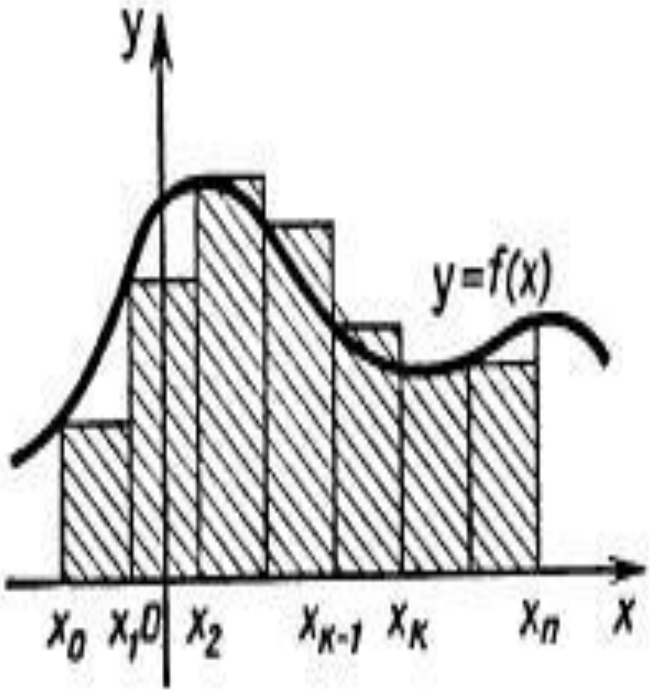

Рис. 1

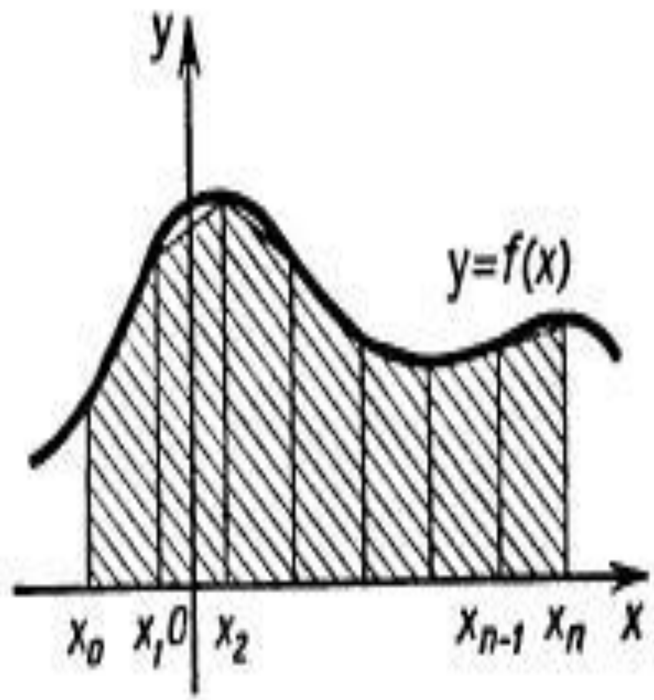

Рис. 2

- Разобьем отрезок [a; b] на n отрезков одинаковой длины точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ и пусть , где $k = 1, 2, \ldots, n - 1, n$. На каждом из отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ как на основании построим прямоугольник высотой $F(x_{k-1})$. Площадь этого прямоугольника равна:

$$f(x_{k-1})\Delta x = \frac{b-a}{n} f(x_{k-1})$$

- а сумма площадей всех таких прямоугольников (рис. 1) равна:

$$S_n = \frac{b-a}{n}\left(f\left(x_0\right) + f\left(x_1\right) + \ldots + f\left(x_{n-1}\right)\right)$$

- В силу непрерывности функции f объединение построенных прямоугольников при большом n, т. е. при малом Δx, «почти совпадает» с интересующей нас криволинейной трапецией.

- Поэтому возникает предположение, что $S_n \approx S$ при больших n. (Коротко говорят: «S_n стремится к S при n, стремящемся к бесконечности»— и пишут: $S_n \to S$ при $n \to \infty$.) Предположение это правильно. Более того, для любой непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции а (не обязательно неотрицательной) S_n при $n \to \infty$ стремится к некоторому числу.

- Это число называют (по пределению) **интегралом функции f от a до b** и обозначают $\int_a^b f(x)\,dx$, т. е. $S_n \to \int_a^b f(x)\,dx$ при $n \to \infty$ (1) (читается: «Интеграл от a до b эф от икс дэ икс»). Числа a и b называются **пределами интегрирования:** a — нижним пределом, b — верхним. Знак называют знаком интеграла.

Функция f называется **подынтегральной функцией**, а переменная x — **переменной интегрирования**.

- Итак, если $f(x) \geq 0$ на отрезке [a; b] то площадь S соответствующей криволинейной трапеции выражается формулой

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

- **Формула Ньютона — Лейбница** или **основная теорема анализа** даёт соотношение между двумя операциями: взятием определённого интеграла и вычислением первообразной.
- Если f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и F — её любая первообразная на этом отрезке, то имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$