

Функции. Графики функций и их свойства

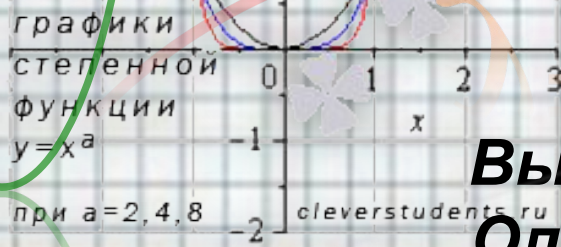


y ↑



$$y = kx + b$$

$$y = ax^2 + bx + c$$



Выполнил: Ковалев Никита
Олегович, студент группы
БМП-12-11



План работы:

Рассмотреть графики и свойства функций:

1. Линейная

2. Квадратичная

3. Степенная: а) с четным отрицательным показателем

б) с нечетным отрицательным показателем

в) с показателем, равным 0

г) с четным положительным показателем

д) с рациональным показателем

4. Показательная

5. Логарифмическая

6. Тригонометрические: а) $y = \sin(x)$ б) $y = \cos(x)$

в) $y = \operatorname{ctg}(x)$ г) $y = \operatorname{tg}(x)$

7. Обратные тригонометрические:

а) $y = \arcsin(x)$ б) $y = \arccos(x)$ в) $y = \operatorname{arcctg}(x)$ г) $y = \operatorname{arctg}(x)$

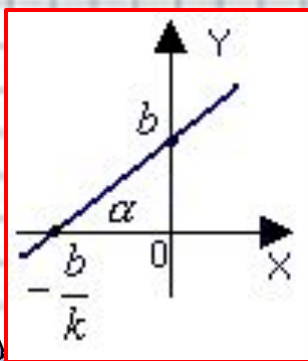


1. Линейная

$$y = kx + b$$

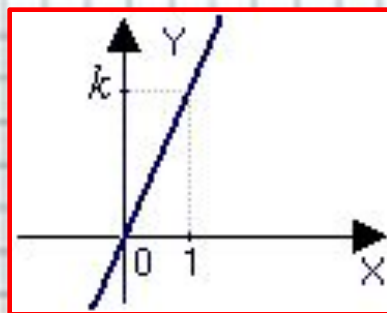
$y = kx + b$, где k, b - действительные числа

График линейной функции - прямая. k - угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha$, b - ордината точки пересечения с осью y

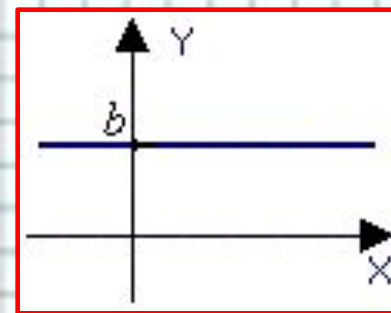


Частные случаи линейной функции:

прямая пропорциональность:



постоянная функция:



Свойства линейной

функции:

- 1) Область определения - множество \mathbb{R}
- 2) Область значений - множество \mathbb{R} , если k не равно 0, а если $k = 0$, то число b
- 3) При k не равно 0, функция ни парная ни нечетная; если $k = 0$, то функция четная; если $b = 0$, то функция нечетная
- 4) При $k > 0$ функция возрастает, при $k < 0$ функция убывает, при $k = 0$ постоянная
- 5) Функция не имеет экстремумов
- 6) График - прямая, не проходящая через начало координат
- 7) При $b = 0$ функция имеет вид $y = kx$. график - прямая, проходящая через начало координат

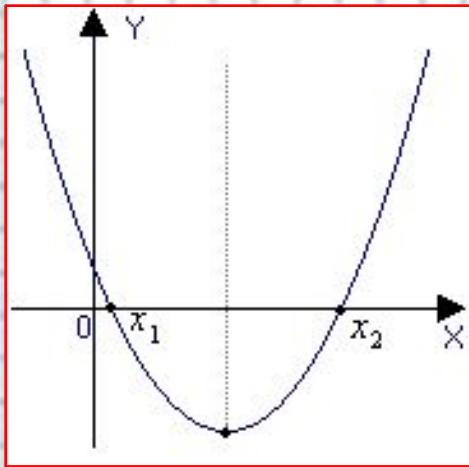


2. Квадратичная

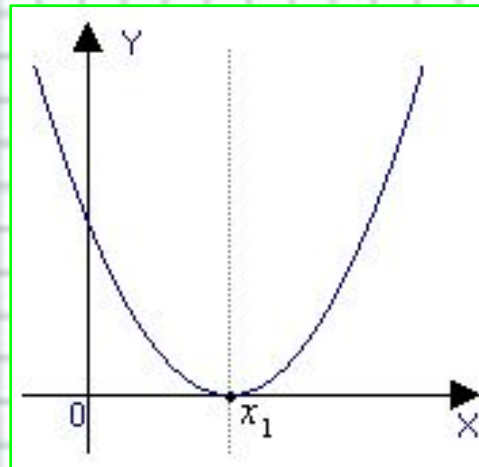
$y = ax^2 + bx + c$, где a **не равно**

График квадратичной функции - парабола. **Свойства функции** и вид её графика определяются, в основном, значениями коэффициента a и дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

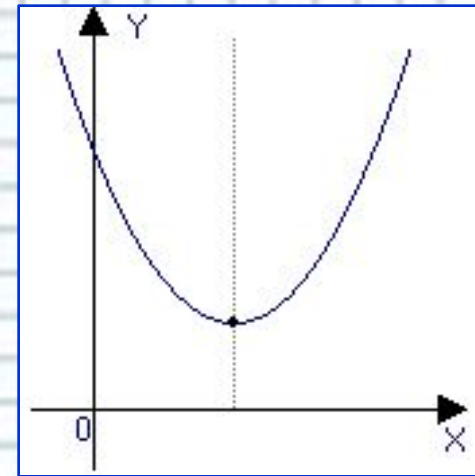
$a > 0, D > 0$



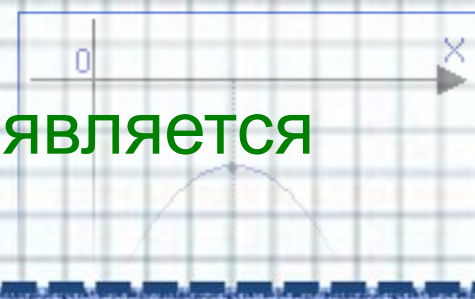
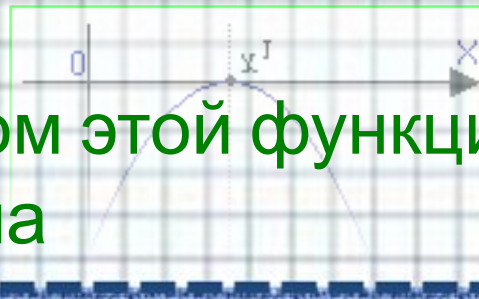
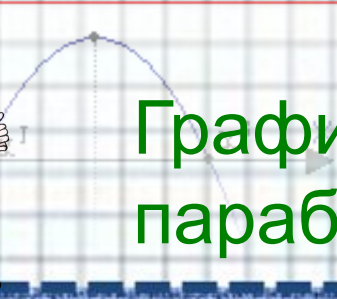
$a > 0, D = 0$



$a > 0, D < 0$

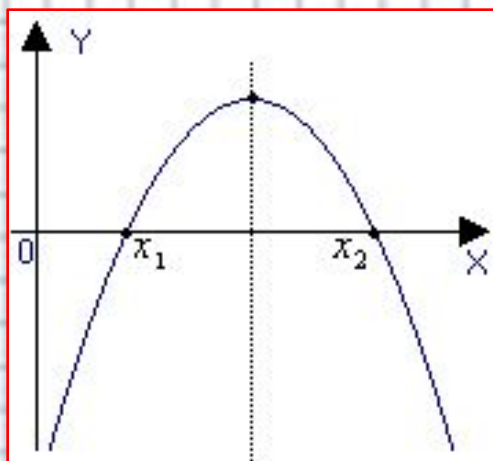


Графиком этой функции является парабола

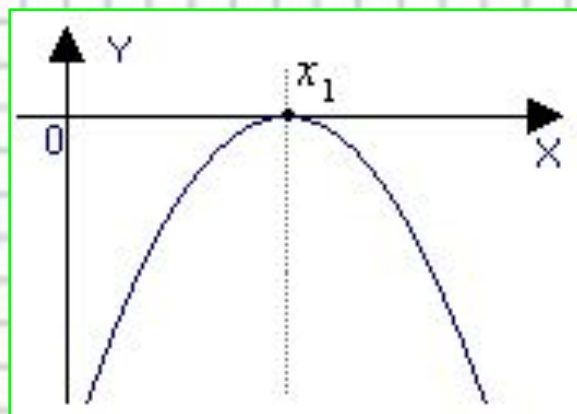


2. Квадратичная

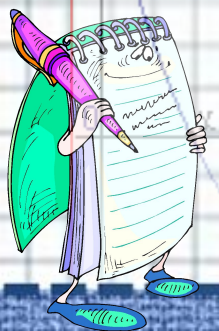
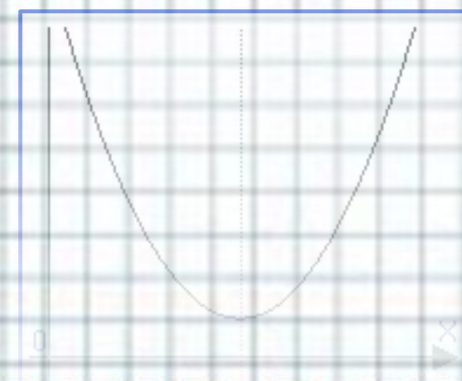
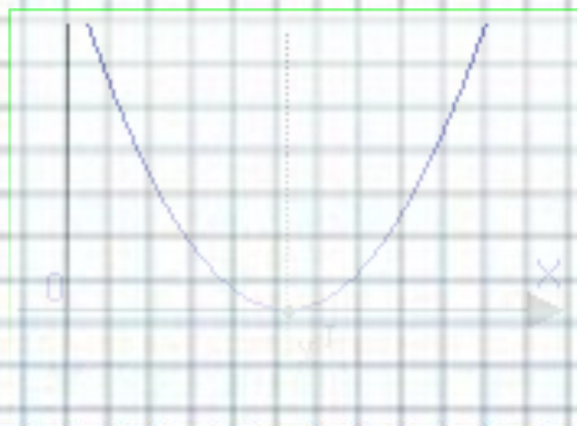
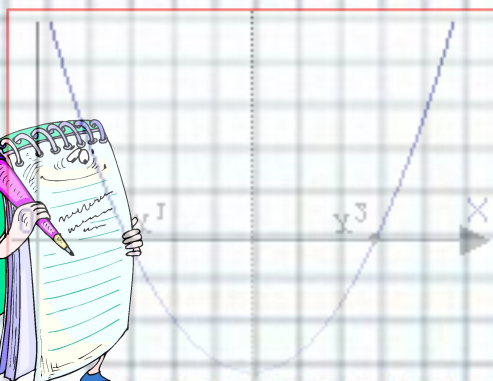
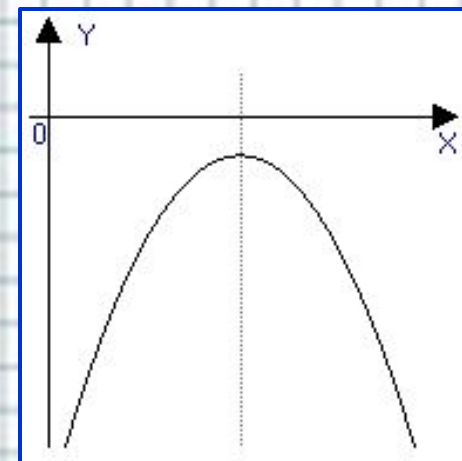
$$a < 0, D > 0$$



$$a < 0, D = 0$$



$$a < 0, D < 0$$



Свойства квадратичной функции:

ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ: \mathbb{R}

ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{при } a > 0 \quad [-D/(4a); \infty) \\ \text{при } a < 0 \quad (-\infty; -D/(4a)] \end{array} \right.$$

ЧЕТНОСТЬ, НЕЧЕТНОСТЬ:

при $b = 0$ функция четная при $b \neq 0$
функция не является ни четной, ни нечетной

НУЛИ: при $D > 0$ два нуля: $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

при $D = 0$ один нуль функции: $x_1 = \frac{-b}{2a}$

при $D < 0$ нулей функции нет



: Промежутки

знакопостоянства

1) если, $a > 0, D > 0$, \longrightarrow $\begin{cases} y > 0 \text{ при } x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty) \\ y < 0 \text{ при } x \in (x_1, x_2) \end{cases}$

то

2) если, $a > 0, D = 0$, \longrightarrow $y > 0$ при $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_1, \infty)$

то

3) если $a > 0, D < 0$, \longrightarrow $y > 0$ при $x \in R$

то

4) если $a < 0, D > 0$, \longrightarrow $\begin{cases} y > 0 \text{ при } x \in (x_1, x_2) \\ y < 0 \text{ при } x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty) \end{cases}$

то

5) если $a < 0, D = 0$, \longrightarrow $y < 0$ при $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_1, \infty)$

то

6) если $a < 0, D < 0$, \longrightarrow $y < 0$ при $x \in R$

то



Промежутки МОНОТОННОСТИ

при $a > 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{функция возрастает при } x \in [-b/(2a), \infty) \\ \text{функция убывает при } x \in (-\infty, -b/(2a)] \end{array} \right.$

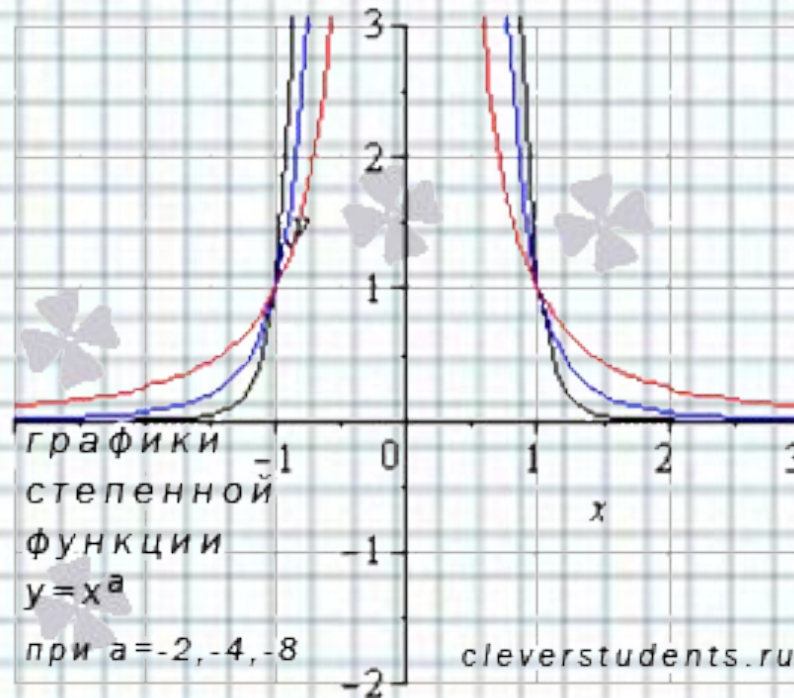
при $a < 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{функция возрастает при } x \in (-\infty, -b/(2a)] \\ \text{функция убывает при } x \in [-b/(2a), \infty) \end{array} \right.$

3. Степенная

$$y=x^n$$

а) с четным отрицательным показателем

На рисунке изображены графики степенных функций -
 $y = x^{-8}$ – черная линия, $y = x^{-4}$ – синяя линия, $y = x^{-2}$ – красная линия



Свойства степенной функции с четным отрицательным показателем:

1. Область определения: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

2. Область значений: $y \in (0; +\infty)$

3. Функция четная, так

$$y(-x) = y(x)$$

как

4. Функция возрастает при $x \in (-\infty; 0)$ убывает при $x \in (0; +\infty)$

5. Функция вогнутая

$$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

при

6. Точек перегиба

нет

7. Горизонтальной асимптотой является прямая $y =$

8. Функция проходит через точки $(-1; 1)$, $(1; 1)$.



3. Степенная

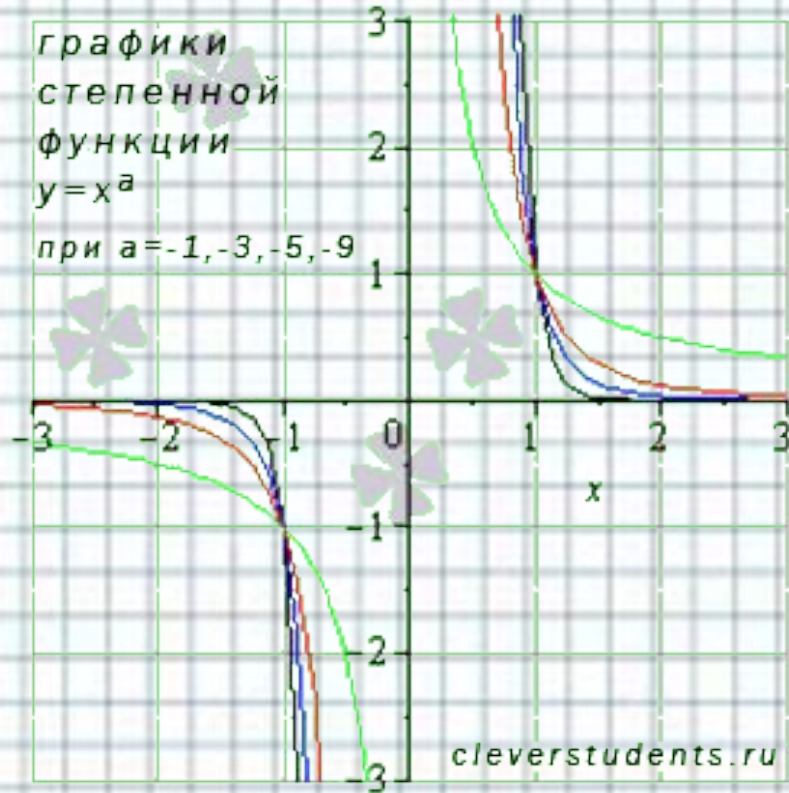
б) с нечетным отрицательным показателем

Перейдем к степенной функции при $a = -1, -3, -5, \dots$

На рисунке в качестве примеров показаны графики степенных функций

$y = x^{-3}$ – красная линия,
 $y = x^{-1}$ – зеленая линия,
линия.

При $a = -1$ имеем обратную пропорциональность (гиперболу) - частный случай степенной функции.



графики степенной функции $y = x^a$ при $a = -1, -3, -5, -9$

Свойства степенной функции с нечетным отрицательным показателем:

1. Область определения: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
2. Область значений: $y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
3. Функция нечетная, так $y(-x) = -y(x)$
4. Функция убывает как $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
5. Функция выпуклая при $x \in (-\infty; 0)$ и вогнутая при $x \in (0; +\infty)$
6. Точек перегиба нет
7. Горизонтальной асимптотой является прямая $y = 0$
8. Функция проходит через точки $(-1; -1)$, $(1; 1)$.

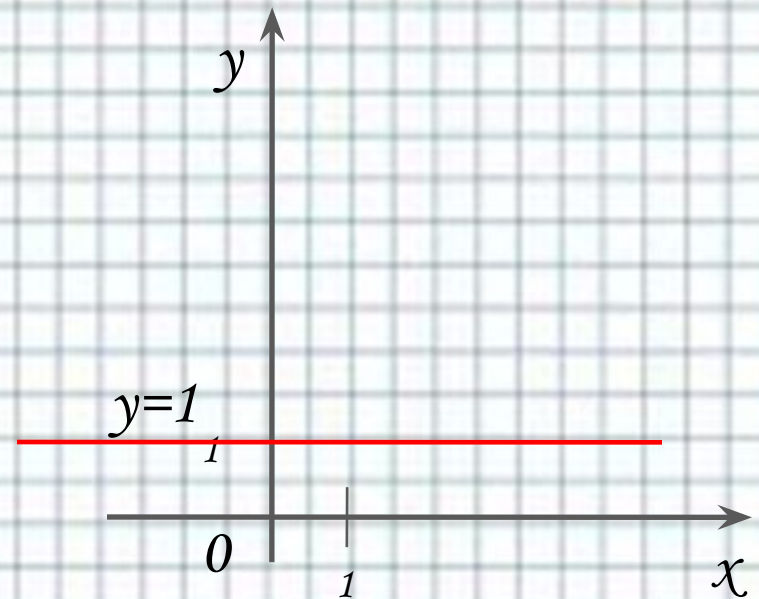
3. Степенная

в) с показателем $n=0$

Рассмотрим функцию, когда $y=x^0$ Графиком этой функции является
пряма

я Свойства:

1. Область определения
2. Область значений: $y=1$
3. Функция не возрастает и не убывает
4. Функция не имеет экстремумов
5. График не проходит через начало координат



3. Степенная

г) с четным положительным показателем

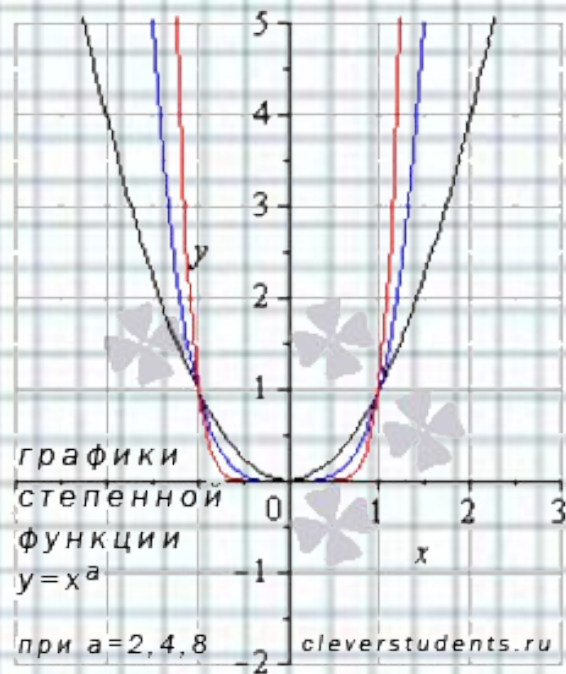
Рассмотрим степенную функцию $y = x^a$ с четным положительным показателем степени, то есть, при $a = 2, 4, 6, \dots$

В качестве примера приведем графики

$y = x^2$ – черная линия,
 $y = x^4$ – синяя линия,
 $y = x^8$ – красная линия.

При $a = 2$ имеем квадратичную функцию

– **квадратичную параболу** – частный случай степенной функции.



Свойства степенной функции с четным положительным показателем:

1. Область определения: $x \in (-\infty; +\infty)$

2. Область значений: $y \in [0; +\infty)$

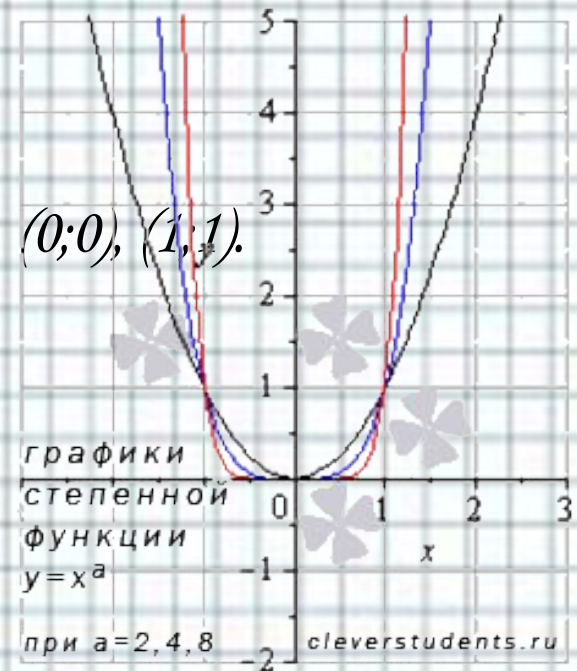
3. Функция четная, так $y(-x) = y(x)$

4. Функция возрастает $x \in [0; +\infty)$, убывает $x \in (-\infty; 0]$

5. Функция вогнутая $x \in (-\infty; +\infty)$ при

6. Точек перегиба

7. Функция проходит через точки $(-1;1)$, $(0;0)$, $(1;1)$.



3. Степенная

д) с рациональным показательным

Рассмотрим графики степенной функции

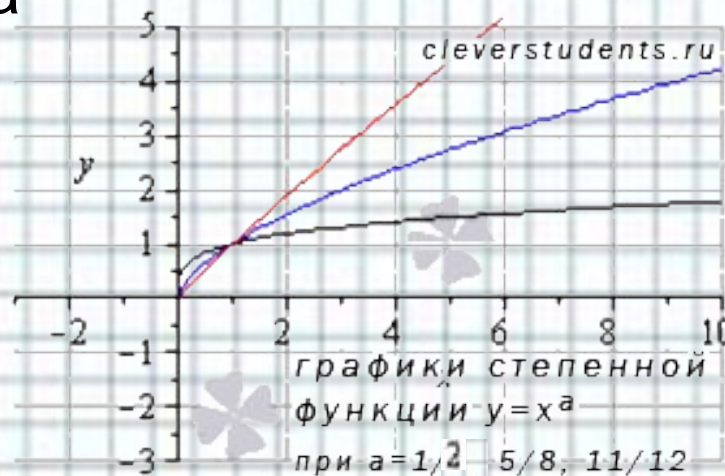
$y = x^a$ если $0 < a < 1$ и a – несократимая рациональная дробь с четным знаменателем (например, $a = 1/4$ или $3/8$)

На рисунке в качестве примера показаны графики степенных

функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^{1/4}$

$y = x^{5/8}$ – черная линия,
– синяя

$y = x^{11/12}$ – красная линия.



Свойства степенной функции с рациональным показателем меньшим единицы:

1. Область определения: $x \in [0; +\infty)$

2. Область значений: $y \in [0; +\infty)$

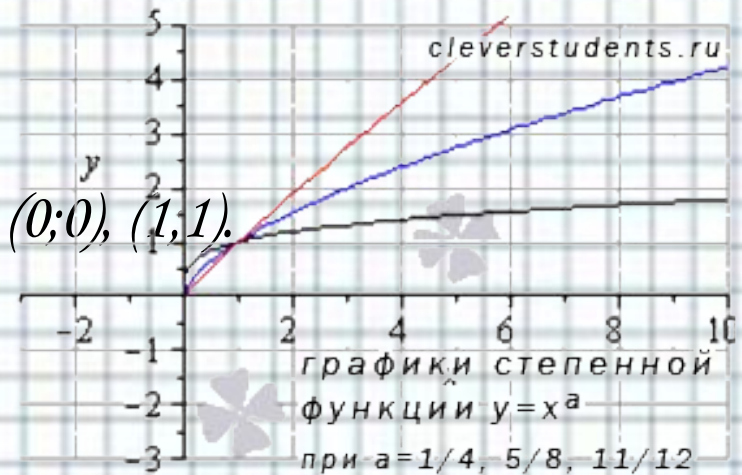
3. Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.

4. Функция возрастает $x \in [0; +\infty)$

5. Функция выпуклая $x \in [0; +\infty)$

6. Точек перегиба нет

7. Функция проходит через точки $(0;0)$, $(1;1)$.



4. Показательная $y=a^x$

Одной из основных элементарных функций является показательная функция.

График показательной функции $y=a^x$, $a>0$ и $a\neq 1$

Рассмотрим случай, когда основание a принимает значение от нуля до единицы, то

для примера приведем графики показательной

функции

$a = 5/6$ – красная

линия.



Свойства показательной функции

с основанием меньше единицы

1. Областью определения показательной функции является все множество действительных чисел:
2. Область значений $y \in (0; +\infty)$
3. Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть, она общего вида.
4. Показательная функция, основание которой меньше единицы, убывает на всей области определения.
5. Функция вогнутая $x \in (-\infty; +\infty)$
Пик перегиба
6. Горизонтальной асимптотой является прямая $y = 0$ при x стремящемся к плюс бесконечности.
8. Функция проходит через точку $(0; 1)$.

5. Логарифмическая

Следующей элементарной функцией является логарифмическая функция $y = \log_a(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

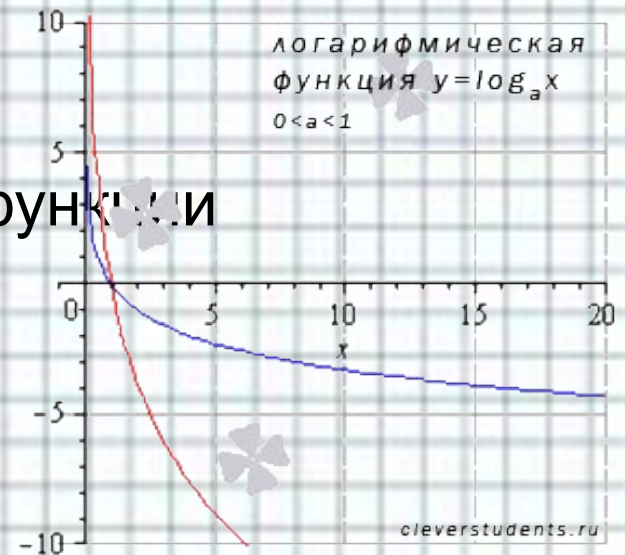
Логарифмическая функция определена только для положительных значений аргумента, то есть $x \in (0; +\infty)$.

График логарифмической функции принимает различный вид в зависимости от значения основания a .

Начнем со случая, $0 < a < 1$. Для примера приведем графики логарифмической функции

при $a = 1/2$ – синяя линия $a = 5/6$ – красная

При других значениях основания, не превосходящих единицы, графики логарифмической функции будут иметь схожий вид.



Свойства логарифмической функции с основанием меньшим единицы

1. Область определения логарифмической функции $x \in (0; +\infty)$
при $x \rightarrow 0^+$ стремящемся к нулю справа, значения функции
стремятся к плюс бесконечности.

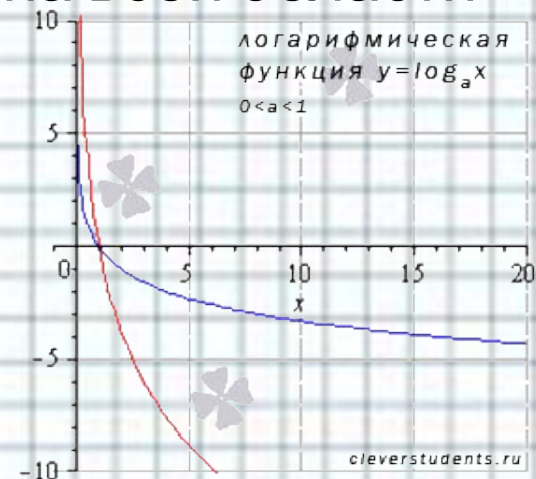
2. Область значений $y \in (-\infty; +\infty)$
Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть
она общего вида.

4. Логарифмическая функция убывает на всей области
определения $x \in (0; +\infty)$

Функция вогнутая
отсутствие точек перегиба

нет горизонтальных асимптот

Функция проходит через точку
 $(1; 0)$.

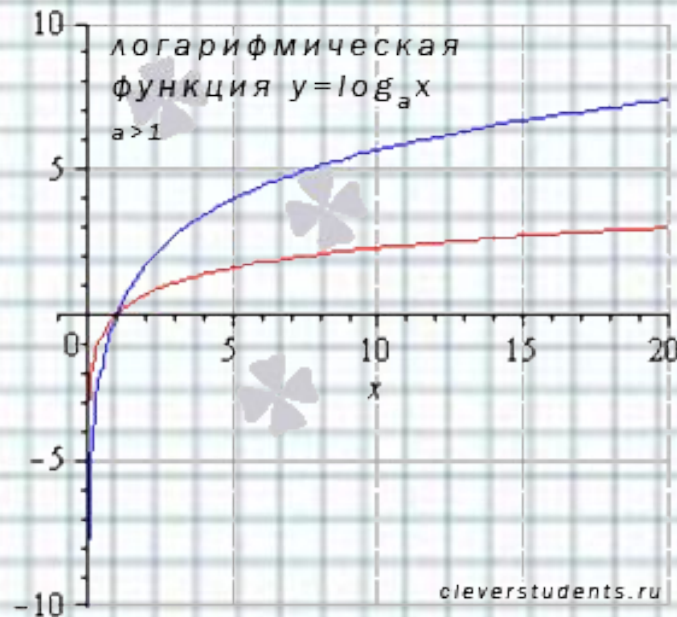


5. Логарифмическая

Перейдем к случаю, когда **основание** логарифмической функции **больше 1**. Покажем графики логарифмических

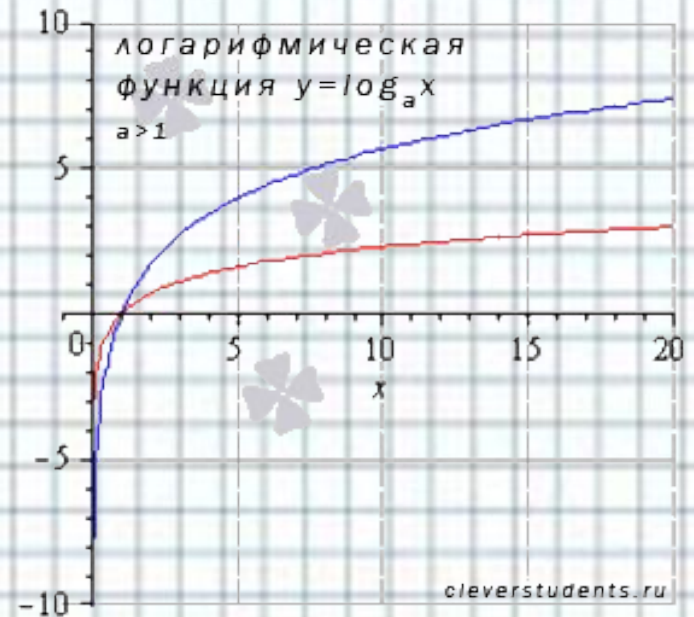
функций $y = \log_{\frac{3}{2}} x$ – синяя линия,
 $y = \ln x$ – красная линия.

При других значениях основания, больших единицы, графики логарифмической функции будут иметь схожий вид.



Свойства логарифмической функции с основанием большим единицы

1. Область определения функции $x \in (0; +\infty)$ При x стремящемся к нулю y стремится к минус бесконечности
2. Область значений логарифмической функции является все множество действительных чисел $(-\infty; +\infty)$
3. Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.
4. Функция возрастает $x \in (0; +\infty)$
5. Функция выпуклая $x \in (0; +\infty)$
6. Точек перегиба нет
7. Горизонтальных асимптот нет
8. Функция проходит через точку $(1; 0)$



6. Тригонометрические

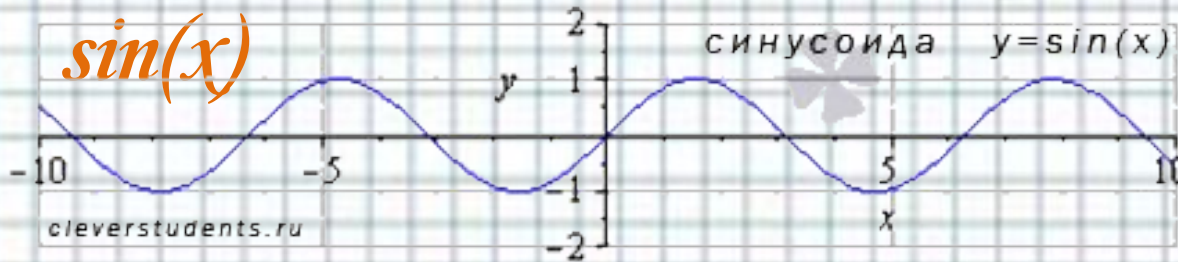
Все тригонометрические функции (**синус, косинус, тангенс и котангенс**) относятся к основным **элементарным** функциям.

У тригонометрических функций есть понятие **периодичности** (повторяемости значений функции при различных значениях аргумента, отличных друг от друга на величину периода), где **T - период**, поэтому, в список свойств

функций добавлен пункт «**наименьший положительный период**» тригонометрических

Также для каждой тригонометрической функции мы укажем значения аргумента, при которых соответствующая функция обращается в ноль.

а) Функция синус $y =$



синусоида

Свойства функции $y = \sin(x)$:

1. Областью определения функции синус является все множество действительных чисел, то есть, функция $x \in (-\infty; +\infty)$
2. ~~Наименьшим~~ ~~определенным~~ ~~положительным~~ периодом функции синуса ~~является~~ ~~два~~ ~~π~~ ~~единицы~~
3. Функция обращается в $x = \pi \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$ \mathbb{Z} – целые при где множество чисел
4. Функция синус принимает значения из интервала от минус единицы до единицы включительно, то есть, ее область значений есть $y \in [-1; 1]$

Свойства функции $y=\sin(x)$:

5. Функция синус - нечетная, так $y(-x) = -y(x)$

как
6. Функция убывает $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot k \right], k \in Z$, возрастает
при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k \right], k \in Z$ при

7. Функция синус имеет локальные максимумы в $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; 1 \right), k \in Z$

локальные минимумы в $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; -1 \right), k \in Z$

точках
8. Функция $y = \sin x$ вогнутая $x \in [-\pi + 2\pi \cdot k; 2\pi \cdot k], k \in Z$.

при
выпуклая $x \in [2\pi \cdot k; \pi + 2\pi \cdot k], k \in Z$

9. Координаты точек $(\pi \cdot k; 0), k \in Z$

перегиба
10. Асимптот

нет.

б) Функция косинус $y =$

График данной функции

Свойства функции $y = \cos(x)$:

1. Область определения функции косинус: $(-\infty; \infty)$
2. Наименьший положительный период функции $y = \cos x$ равен 2π . Функция обращается в ноль при $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$, где $k \in \mathbb{Z}$ — множество целых чисел.
3. Область значений функции косинус представляет собой интервал от минус единицы до единицы включительно.
4. Функция косинус - четная, так как $y(-x) = y(x)$

Свойства функции $y = \cos(x)$:

6. Функция убывает , возрастает
| при

7. Функция $y = \cos x$ имеет локальные максимумы в

точках
локальные минимумы в

точках
8. Функция вогнутая , выпуклая
| при

9. Координаты точек

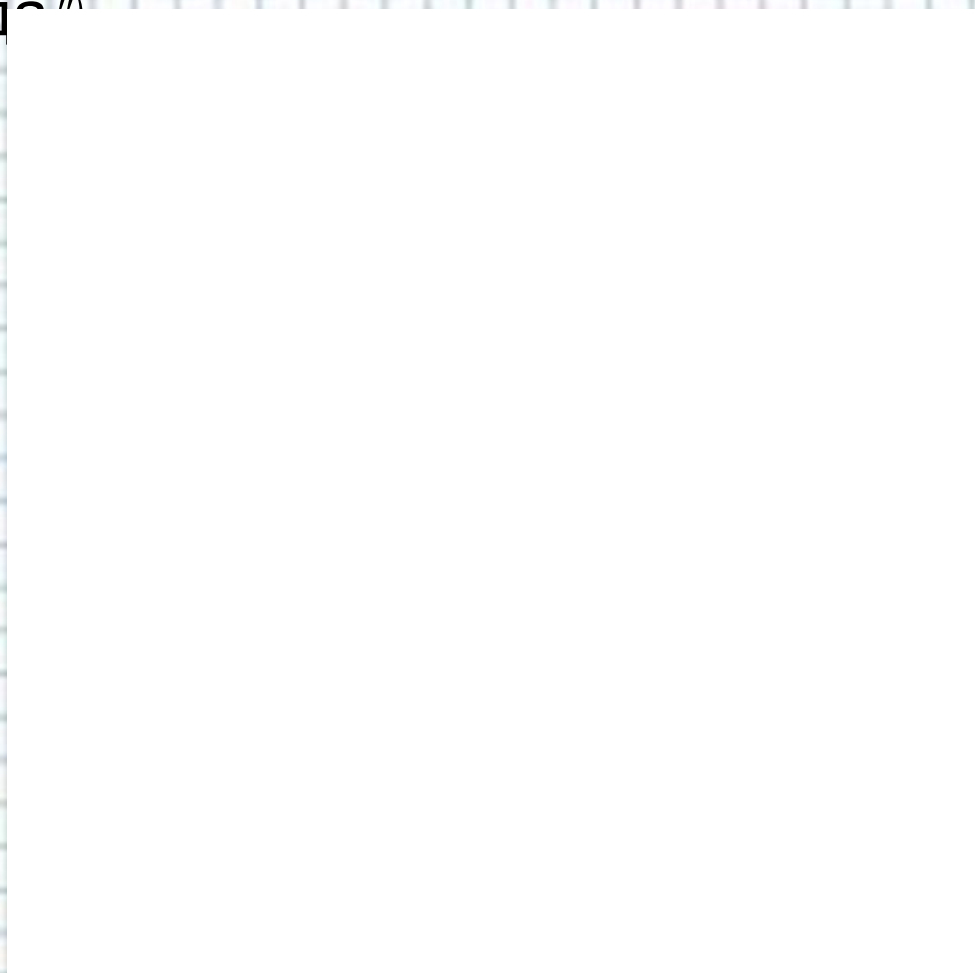
перегиба

10. АСИМПТОТ

нет.

2) Функция тангенс $y =$

Изобразим $tg(x)$ график функции тангенс (его называют "тангенсоидом")

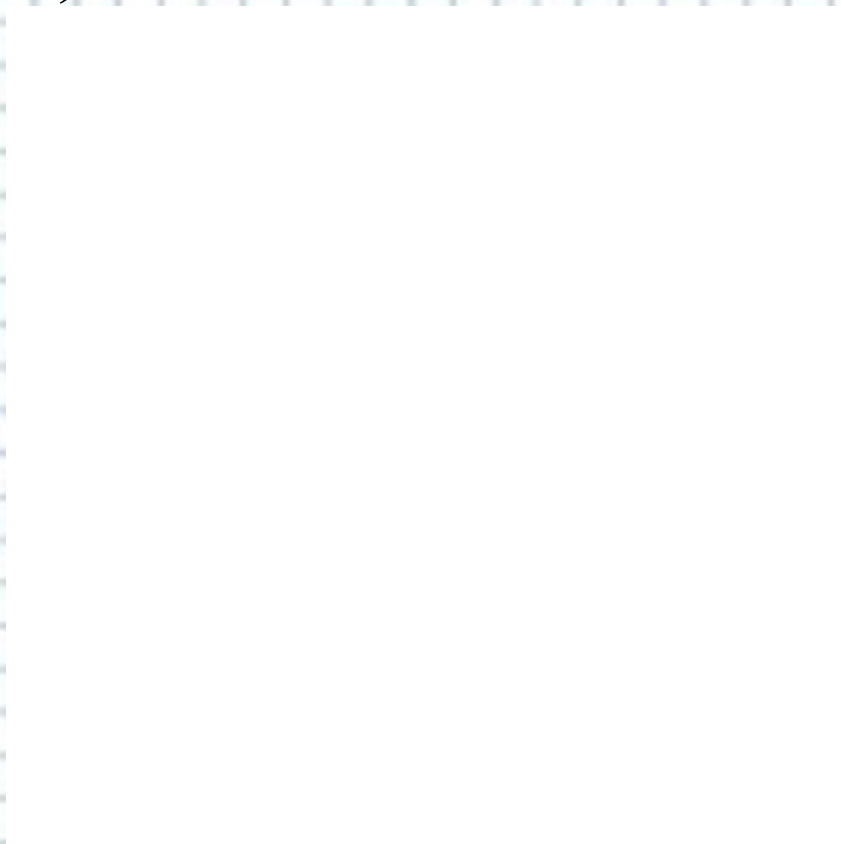


Свойства функции $y = \operatorname{tg}(x)$:

1. Область определения функции тангенс: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$
2. Наименьший положительный период функции тангенс π
3. Функция обращается в ноль при $x = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, \mathbb{Z} – множество целых чисел.
4. Область значений функции $y \in (-\infty; +\infty)$
5. Функция тангенс - нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$
6. Функция возрастает при $x \in (\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{3\pi}{2} + \pi k)$
7. Функция вогнутая при $x \in (\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k)$, выпуклая при $x \in (\pi k; \frac{3\pi}{2} + \pi k)$
8. Координаты точек перегиба $(\pi k, 0)$
9. Наклонных и горизонтальных асимптот нет.

в) Функция котангенс $y =$

Изобразим $\text{Ctg}(x)$ график функции котангенс (его называют 'котангенсоида'):

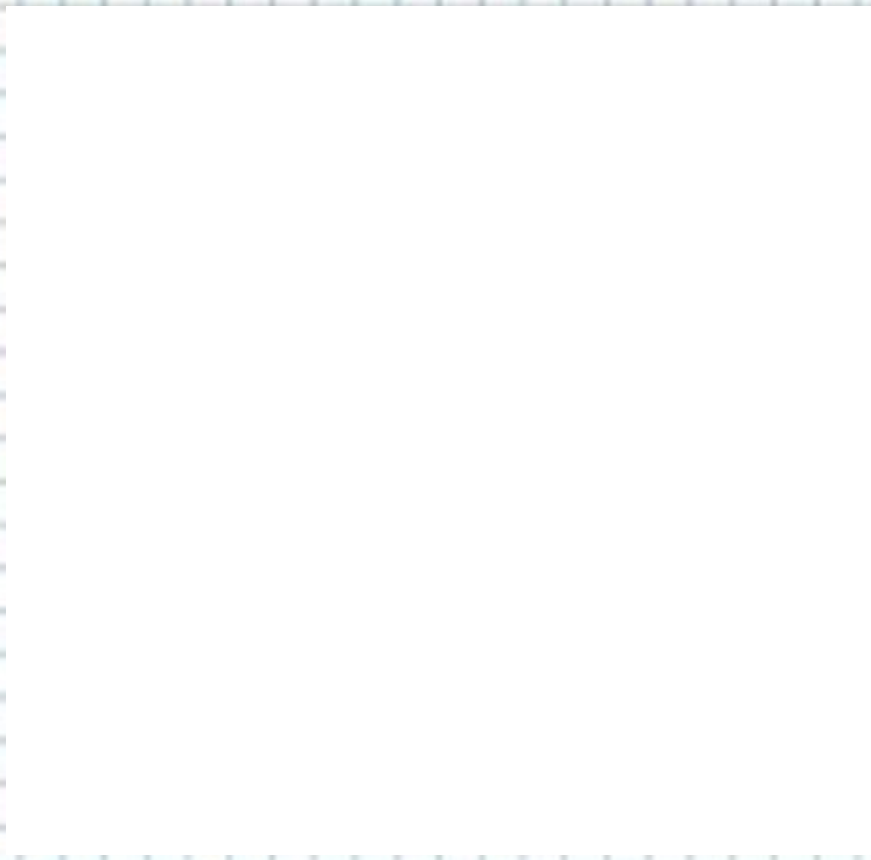


Свойства функции $y = \operatorname{tg}(x)$:

1. Область определения функции кот: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
2. Наименьший положительный период функции $y = \operatorname{tg} x$ равен π , где $k \in \mathbb{Z}$
3. Функция обращается в нуль при $x = k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$
4. Область значений функции котангенс $y \in (-\infty; +\infty)$
5. Функция нечетная, так $y(-x) = -y(x)$
6. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает при $x \in (k\pi; (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
7. Функция котангенс вогнутая при $x \in (2k\pi; (2k+1)\pi)$, выпуклая при $x \in ((2k+1)\pi; 2(k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
8. Координаты точек перегиба $(k\pi; 0)$, $k \in \mathbb{Z}$
9. Наклонных и горизонтальных асимптот нет.

7. Обратные тригонометрические

а) **Функция арксинус** $y = \arcsin(x)$



Свойства функции $y = \arcsin(x)$:

1. Областью определения функции арксинус является интервал от минус единицы до единицы включительно:
2. Область значений функции $y = \arcsin(x)$
3. Функция арксинус - нечетная, так $y(-x) = -y(x)$
4. Функция $y = \arcsin(x)$ возрастает на всей области определе
о есть, при
5. Функция вогнутая , выпуклая
при при
6. Точка перегиба $(0; 0)$, она же ноль функции
7. Асимптот нет.

б) Функция арксинус $y =$
 $\arccos(x)$

Свойства функции $y = \arccos(x)$:

1. Область определения функции $y = \arccos(x)$ — отрезок $[-1; 1]$.
2. Область значений функции $y = \arccos(x)$ — отрезок $[0; \pi]$.
3. Функция не является ни четной ни нечетной, то есть, она не является ни четной ни нечетной.
4. Функция $y = \arccos(x)$ убывает на всей области определения, то есть, при $x \in [-1; 1]$.
5. Функция вогнутая на $[-1; 0]$, выпуклая на $[0; 1]$.
6. Точка перегиба нет.
7. Асимптот нет.

в) Функция арктангенс $y =$
arctg(x)

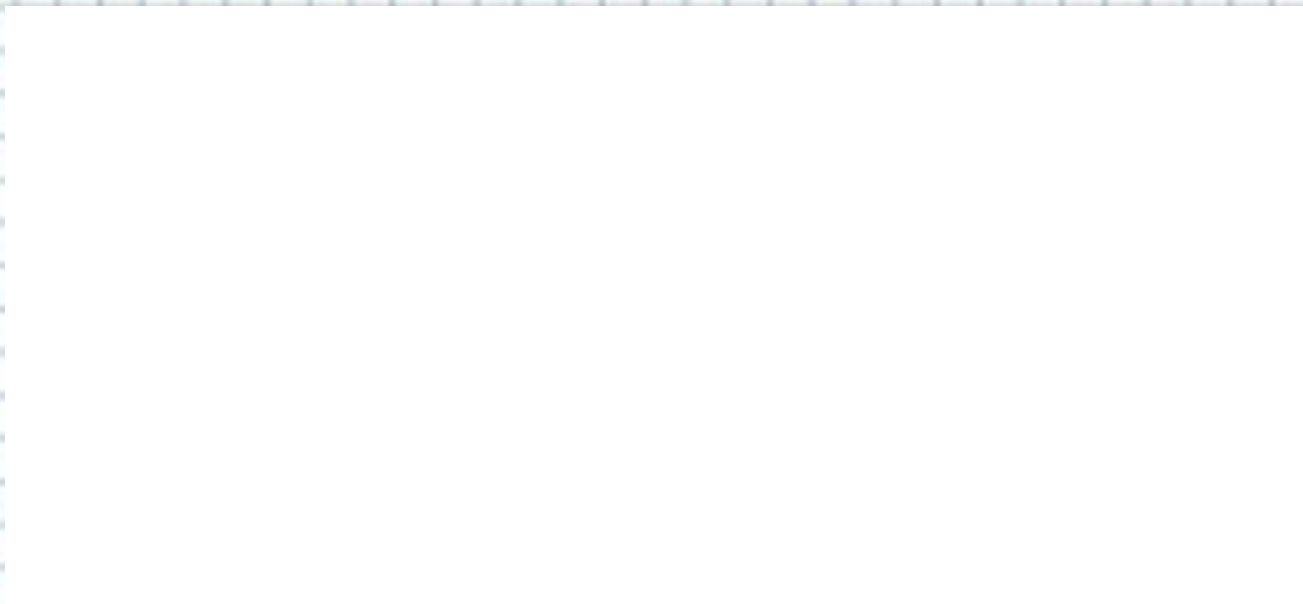


Свойства функции $y = \arctg(x)$:

1. Область определения функции $x \in (-\infty; +\infty)$
2. Область значений функции арктангенс $y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$
3. Функция арктангенс - нечетная, так $y(-x) = -y(x)$
4. Функция возрастает на всей области определения, то есть, как функция арктангенс $x \in (-\infty; +\infty)$
5. Функция арктангенс $y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, выпуклая при $x \in [0; +\infty)$ и вогнутая при $x \in (-\infty; 0]$
6. Точка перегиба $(0; 0)$, она же ноль функции
7. Горизонтальными асимптотами являются $y = \pm \frac{\pi}{2}$ при $x \rightarrow \pm\infty$

На чертеже они ^и показаны зеленым цветом.

2) **Функция арккотангенс** $y =$
 $\text{arccotg}(x)$



Свойства функции $y = \text{arctg}(x)$:

1. Областью определения функции арктангенс является все множество действительных чисел:
2. Область значений функции $y = \text{arctg}(x)$ — интервал $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.
3. Функция арктангенс не является ни четной ни нечетной, то есть, она общего вида.
4. Функция убывает на всей области определения, то есть, при $x \in (-\infty; +\infty)$.
5. Функция вогнутая при $x \in [0; +\infty)$, выпуклая при $x \in (-\infty; 0]$.
6. Точка перегиба находится в начале координат $(0; 0)$.
7. Горизонтальными асимптотами являются $y = \frac{\pi}{2}$ и $y = -\frac{\pi}{2}$ (на чертеже показана зеленым цветом) и $y = 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

***Спасибо за
внимание!***