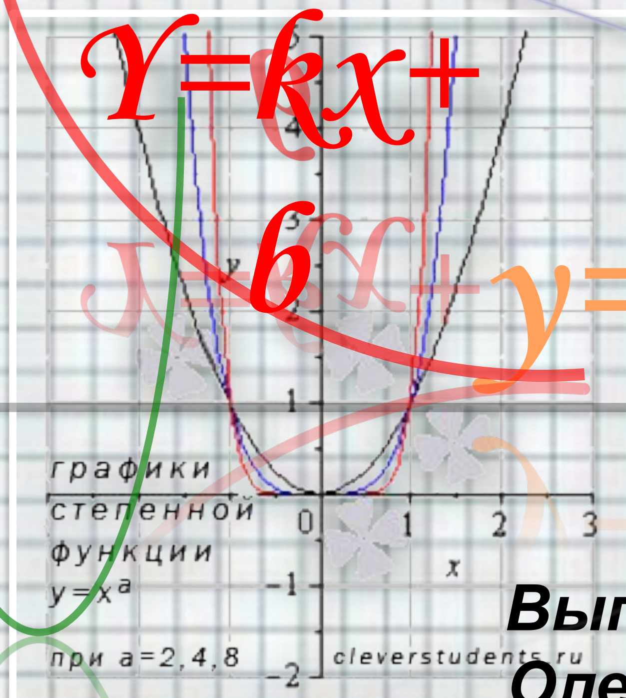
Функции. Графики функций и их свойства



Y=kx+б

$y=x^n$

y=ax²+бx+c

Выполнил: Ковалев Никита Олегович, студент группы БМП-12-11

План работы:

Рассмотреть графики и свойства функций:

1. Линейная

2. Квадратичная

3. Степенная: а) с четным отрицательным показателем

б) с нечетным отрицательным показателем

в) с показателем, равным 0

г) с четным положительным показателем

д) с рациональным показателем

4. Показательная 5. Логарифмическая

6. Тригонометрические: а) y=sin(x) б) y=cos(x)

в) y=ctg(x) г) y=tg(x)

7. Обратные тригонометрические:

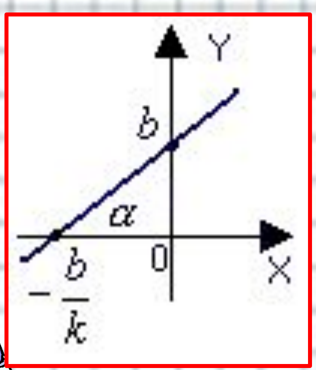
а) y=arcsin(x) б) y=arccos(x) в) y=arcctg(x) г) y=arctg(x)

1. Линейная

$y=kx+b$

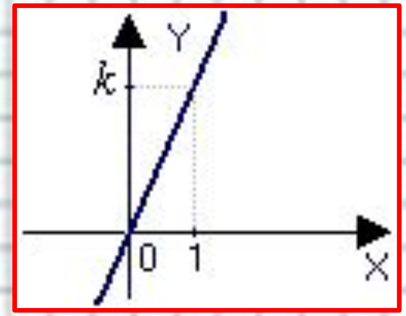
***y* = *kx* + *b*, где *k*,*b* - действительные числа**

График линейной функции - прямая. *k* - угловой коэффициент *k = tg α*, *b* - ордината точки пересечения с осью *y*

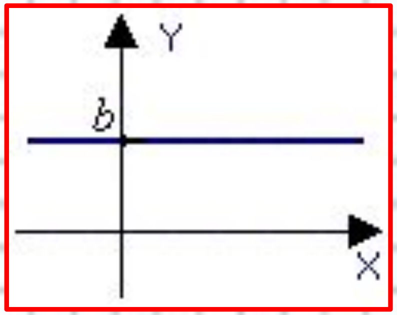


Частные случаи линейной функции:

прямая пропорциональность:



постоянная функция:



Свойства линейной функции:

1) Область определения - множество R

2) Область значений - множество R, если k не равно 0, а если к =0, то число b

3) При к не равно 0, функция ни парная ни непарная; если к =0, то функция парная; если b =0, то функция непарная

4) При к>0 функция возрастает, при к <0 функция убывает, при к =0 постоянная

5) Функция не имеет экстремумов

6) График - прямая, не проходящая через начало координат

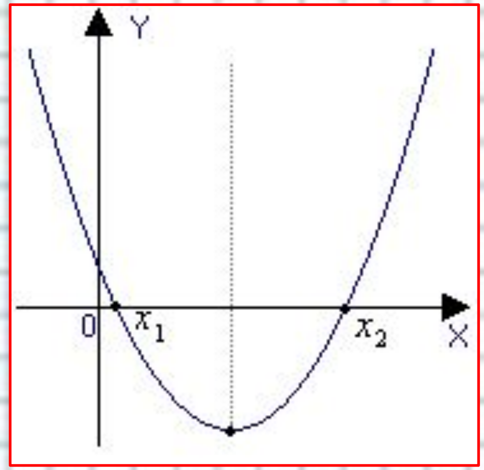
7) При b =0 функция имеет вид y = kx. график - прямая, проходящая через начало координат

2. Квадратичная

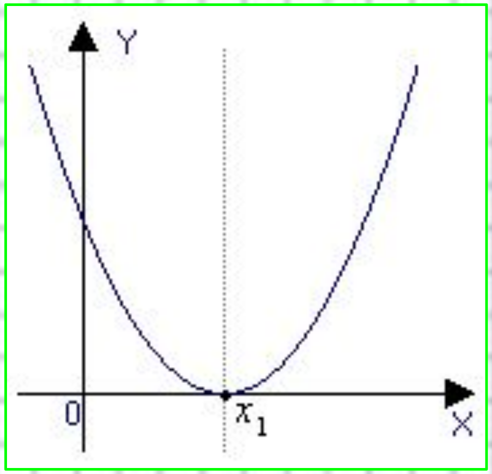
***y = ax²* + *bx* + *c*,** *где a* *не равно*

График квадратичной функции - парабола. Свойства функции и вид её графика определяются, в основном, значениями коэффициента a и дискриминанта D = b² - 4ac.

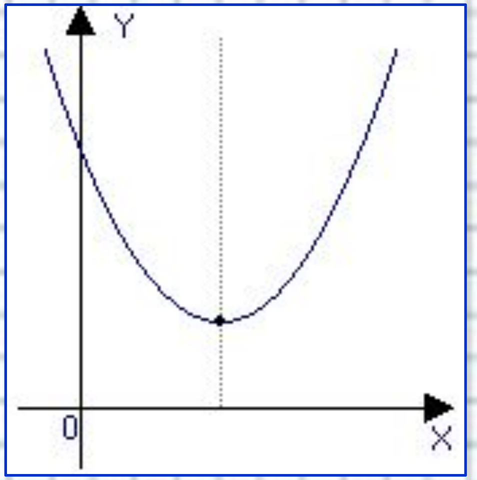
***a* > 0, *D* > 0**



***a* > 0, *D* = 0**



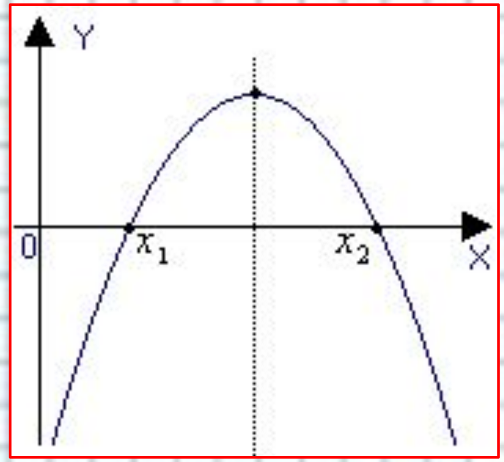
***a* > 0, *D* < 0**



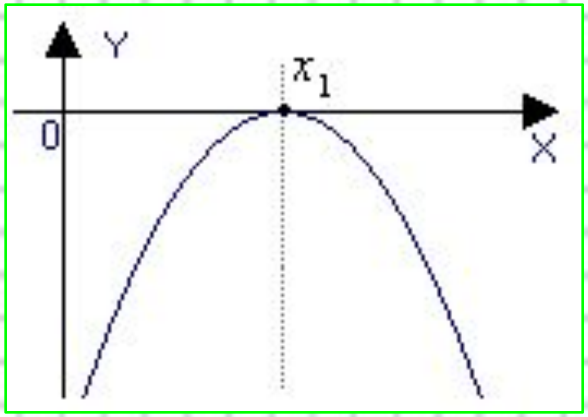
Графиком этой функции является парабола

2. Квадратичная

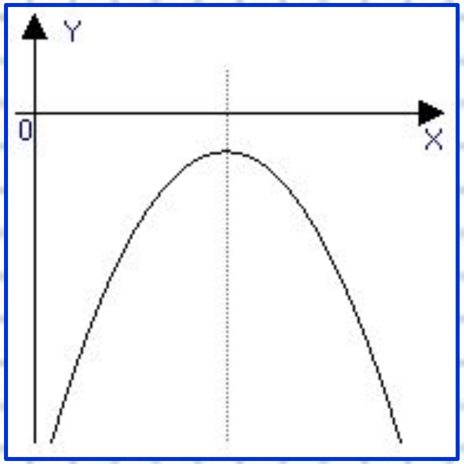
a < 0, *D* > 0



a < 0, *D* = 0



a < 0, *D* < 0



Свойства квадратичной функции:

ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ: R

ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ:

$$\begin{cases} \text{при } a > 0 & [-D/(4a); \infty) \\ \text{при } a < 0 & (-\infty; -D/(4a)] \end{cases}$$

ЧЕТНОСТЬ, НЕЧЕТНОСТЬ:

при b = 0 функция четная при b ≠ 0
функция не является ни четной, ни нечетной

НУЛИ: *при D > 0 два нуля*: $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$

при D = 0 один нуль функции: $x_1 = \frac{-b}{2a}$

при D < 0 нулей функции нет

:

Промежутки знакопостоянства

1) если, а > 0, $D > 0$, то $\begin{cases} y > 0 \text{ при } x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty) \\ y < 0 \text{ при } x \in (x_1; x_2) \end{cases}$

2) если, а > 0, $D = 0$, то $y > 0 \text{ при } x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; \infty)$

3) если а > 0, $D < 0$, то $y > 0 \text{ при } x \in R$

4) если а < 0, $D > 0$, то $\begin{cases} y > 0 \text{ при } x \in (x_1; x_2) \\ y < 0 \text{ при } x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty) \end{cases}$

5) если а < 0, $D = 0$, то $y < 0 \text{ при } x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; \infty)$

6) если а < 0, $D < 0$, то $y < 0 \text{ при } x \in R$

Промежутки монотонности

при а > 0

$$\begin{cases} \text{функция возрастает при } x \in [-b/(2a); \infty) \\ \text{функция убывает при } x \in (-\infty; -b/(2a)] \end{cases}$$

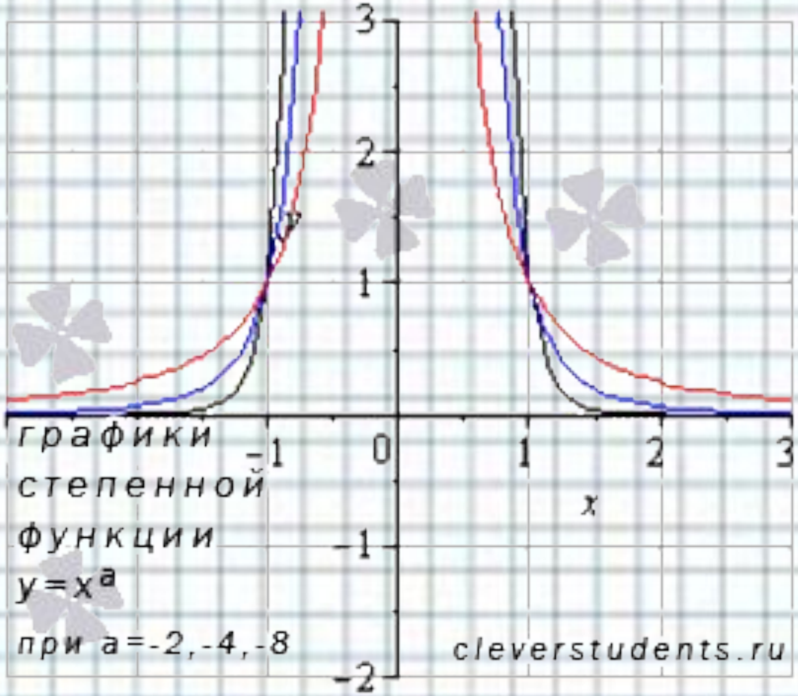
при а < 0

$$\begin{cases} \text{функция возрастает при } x \in (-\infty; -b/(2a)] \\ \text{функция убывает при } x \in [-b/(2a); \infty) \end{cases}$$

3.Степенная $y=x^n$

а) с четным отрицательным показателем

На рисунке изображены графики степенных функций - $y = x^{-8}$ – черная линия, $y = x^{-4}$ – синяя линия, $y = x^{-2}$ – красная линия



Свойства степенной функции с четным отрицательным показателем:

1. Область определения: $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$

2. Область значений: $y \in (0; +\infty)$

3. Функция четная, так как $y(-x) = y(x)$

4. Функция возрастает при $x \in (-\infty; 0)$ убывает при $x \in (0; +\infty)$

5. Функция вогнутая при $x \in (-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$

6. Точек перегиба нет.

7. Горизонтальной асимптотой является прямая $y = 0$.

8. Функция проходит через точки $(-1;1)$, $(1;1)$.

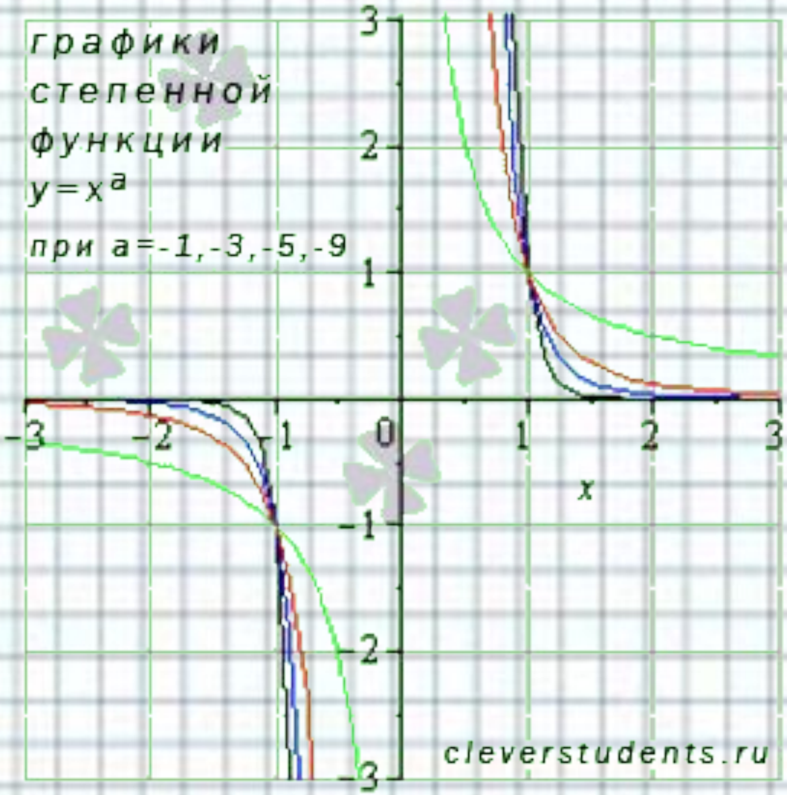
3.Степенная

б) с нечетным отрицательным показателем

Перейдем к степенной функции при *a* = -1, -3, -5,…

На рисунке в качестве примеров показаны графики степенных функций $y = x^{-3}$ – красная линия,

$y = x^{-1}$ – зеленая линия.



При *a* = -1 имеем *обратную пропорциональность (гиперболу)* - частный случай степенной функции.

Свойства степенной функции с нечетным отрицательным показателем:

1. Область определения: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

2. Область значений: $y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

3. Функция нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$

4. Функция убывает при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

5. Функция выпуклая при $x \in (-\infty; 0)$ и вогнутая при $x \in (0; +\infty)$

6. Точек перегиба нет.

7. Горизонтальной асимптотой является прямая $y = 0$

8. Функция проходит через точки $(-1;-1)$, $(1;1)$.

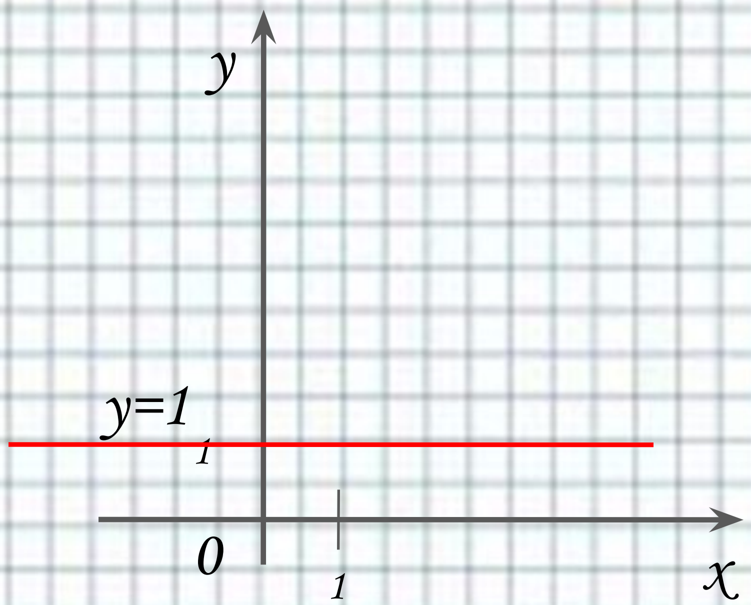
3.Степенная

в) с показателем n=0

Рассмотрим функцию, когда $y=x^0=1$. Графиком этой функции являетс[я] прямая

Свойства:

1. Область определения
2. Область значений: $y=1$
3. Функция не возрастает и не убывает
4. Функция не имеет экстремумов
5. График не проходит через начало координат



3.Степенная

г) с четным положительным показательным

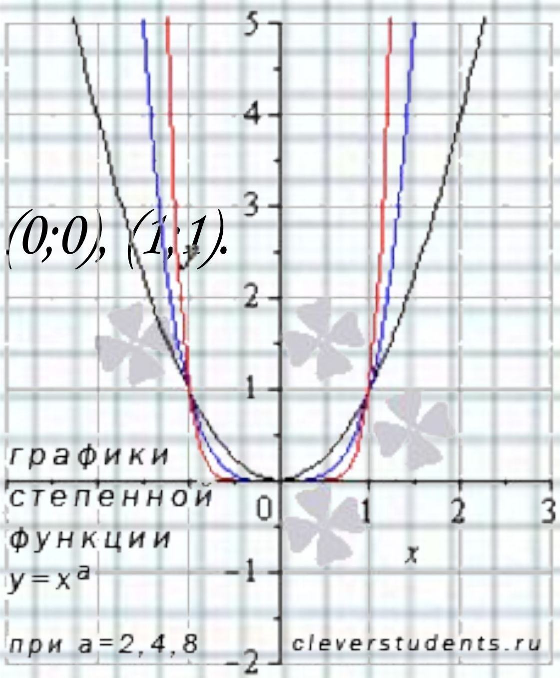
Рассмотрим степенную функцию $y = x^a$ с четным положительным показателем степени, то есть, при $a = 2, 4, 6, \ldots$.

В качестве примера приведем графики степенных функций $y = x^2$ – черная линия, $y = x^4$ – синяя линия, $y = x^8$ – красная линия.

При $a = 2$ имеем квадратичную функцию – *квадратичную параболу* – частный случай степенной функции.

Свойства степенной функции с четным положительным показателем:

1. Область определения: $x \in (-\infty; +\infty)$
2. Область значений: $y \in [0; +\infty)$
3. Функция четная, так как $y(-x) = y(x)$
4. Функция возрастает при $x \in [0; +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty; 0]$
5. Функция вогнутая при $x \in (-\infty; +\infty)$
6. Точек перегиба нет.
7. Функция проходит через точки *(-1;1), (0;0), (1;1).*



3.Степенная

д) с рациональным показательным

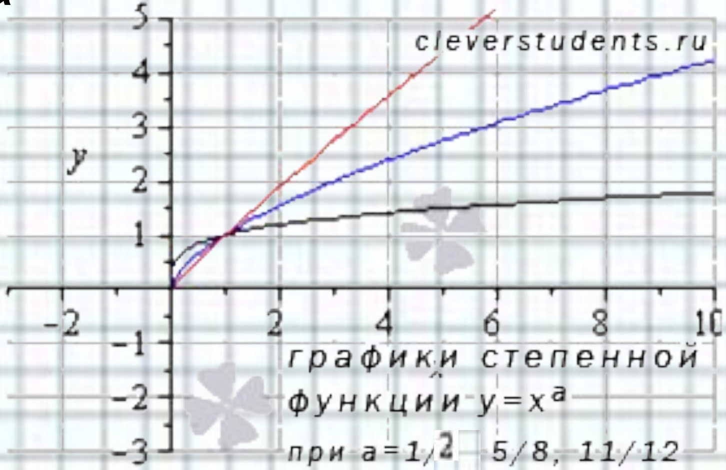
Рассмотрим графики степенной функции $y = x^a$, если $0 < a < 1$ и *a* – несократимая рациональная дробь с четным знаменателем (например, *a* = *1/4* или *3/8*)

На рисунке в качестве примера показаны графики степенных функций

$y=\sqrt{x}$ – черная линия,

$y = x^{\frac{5}{8}}$ – синяя линия,

$y = x^{\frac{11}{12}}$ – красная линия.



Свойства степенной функции с рациональным показателем меньшим единицы:

1. Область определения: $x \in [0; +\infty)$

2. Область значений: $y \in [0; +\infty)$

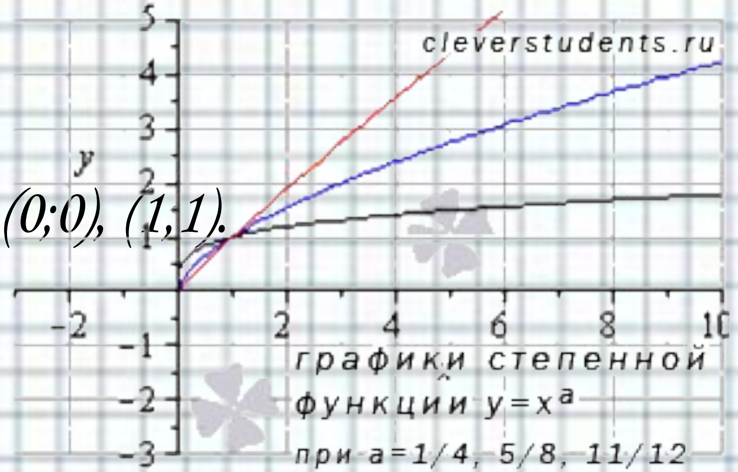
3. Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.

4. Функция возрастает при $x \in [0; +\infty)$

5. Функция выпуклая при $x \in [0; +\infty)$

6. Точек перегиба нет.

7. Функция проходит через точки (0;0), (1;1).



4. Показательная $y=a^x$

Одной из основных элементарных функций является показательная функция.

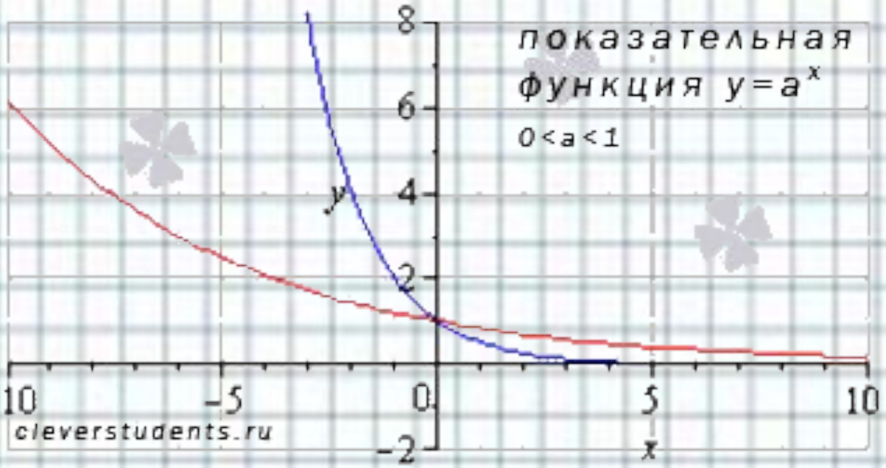
График показательной функции $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$

Рассмотрим случай, когда основание показательной функции принимает значение от нуля до единицы, то есть, $0 < a < 1$

Для примера приведем графики показательной функции

$a = 1/2$ – синяя линия,

$a = 5/6$ – красная линия.



Свойства показательной функции

с основанием меньше единицы

1. Областью определения показательной функции является все множество действительных чисел: $x \in (-\infty; +\infty)$

2. Область значений: $y \in (0; +\infty)$

3. Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть, она общего вида.

4. Показательная функция, основание которой меньше единицы, убывает на всей области определения.

5. Функция вогнутая при $x \in (-\infty; +\infty)$

6. Точек перегиба нет.

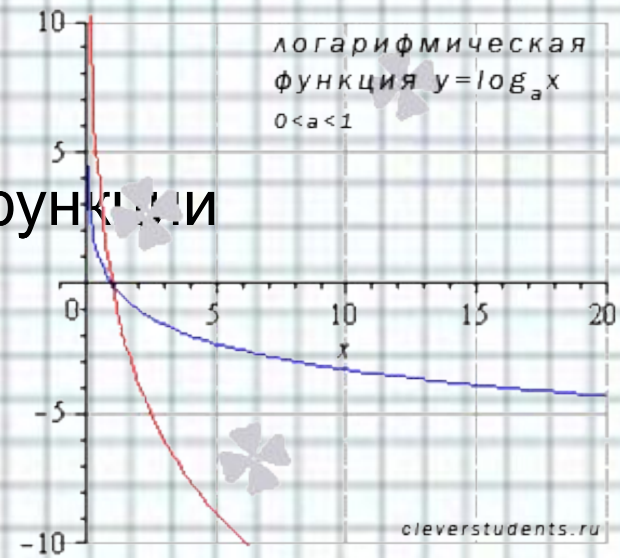
7. Горизонтальной асимптотой является прямая $y = 0$ при x стремящемся к плюс бесконечности.

8. Функция проходит через точку $(0;1)$.

5. Логарифмическая

Следующей элементарной функцией является логарифмическая функция $y=\log_a(x)$, где $a>0,\ a\neq 1$. Логарифмическая функция определена лишь для положительных значений аргумента, то есть, при $x\in(0;+\infty)$. График логарифмической функции принимает различный вид в зависимости от значения основания *a*.

Начнем со случая, когда $0<a<1$. Для примера приведем графики логарифмической функции при a = $1/2$ – синяя линия, $a = 5/6$ – красная линия.



При других значениях основания, не превосходящих единицы, графики логарифмической функции будут иметь схожий вид.

Свойства логарифмической функции с основанием меньшим единицы

1. Область определения логарифмической функции: $x \in (0;+\infty)$

x стремящемся к нулю справа, значения функции стремятся к плюс бесконечности.

2. Область значений: $y \in (-\infty;+\infty)$

3. Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.

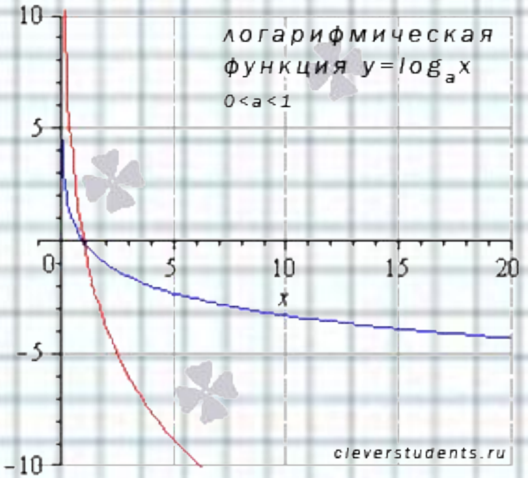
4. Логарифмическая функция убывает на всей области определения. $x \in (0;+\infty)$

5. Функция вогнутая при

6. Точек перегиба нет.

7. Горизонтальных асимптот нет.

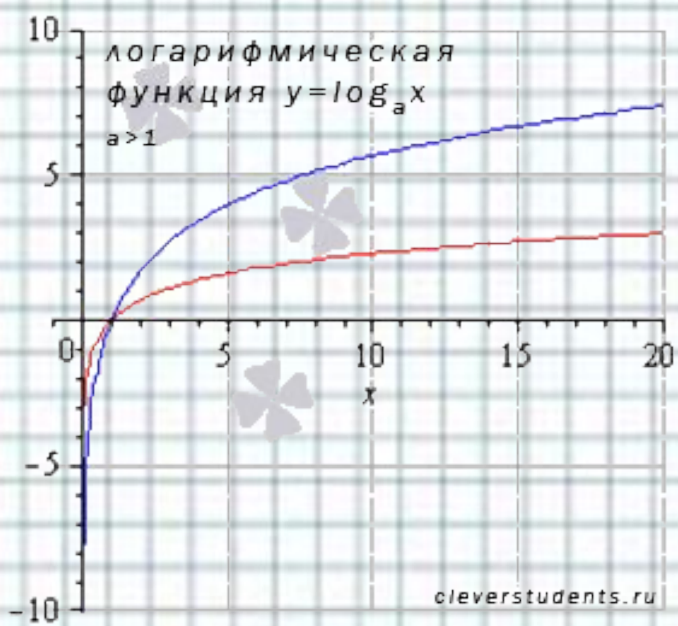
8. Функция проходит через точку *(1;0)*.



5. Логарифмическая

Перейдем к случаю, когда основание логарифмической функции $a > 1$ больше единицы. Покажем графики логарифмических функций

$y = \log_{\frac{3}{2}} x$ – синяя линия, $y = \ln x$ – красная линия.



При других значениях основания,
больших единицы, графики логарифмической функции будут иметь схожий вид.

Свойства логарифмической функции с основанием большим единицы

1. Область определения: $x \in (0;+\infty)$

При *x* стремящемся к нулю справа, значение функции стремятся к минус бесконечности.

2. Область значений логарифмической функции является все множество действительных чисел, то есть, интервал $y \in (-\infty; +\infty)$

3. Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.

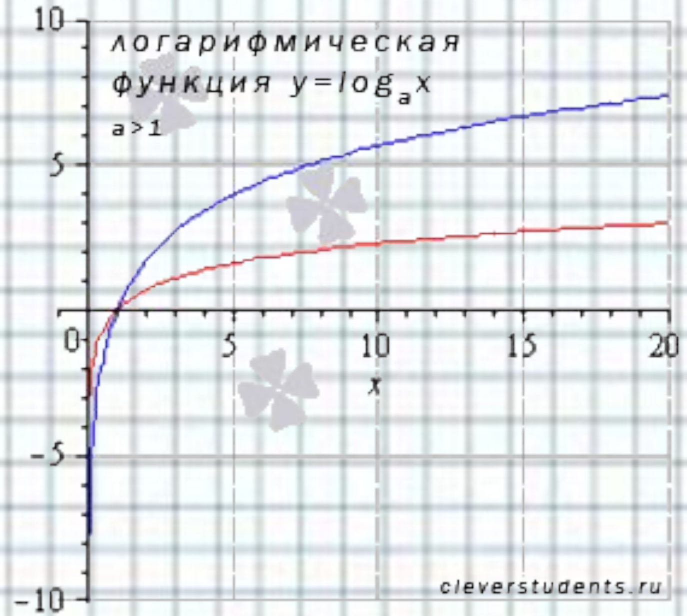
4. Функция возрастает при $x \in (0;+\infty)$

5. Функция выпуклая при $x \in (0;+\infty)$

6. Точек перегиба нет.

7. Горизонтальных асимптот нет.

8. Функция проходит через точку *(1;0)*



6. Тригонометрические

Все тригонометрические функции (синус, косинус, тангенс и котангенс) относятся к основным элементарным функциям.

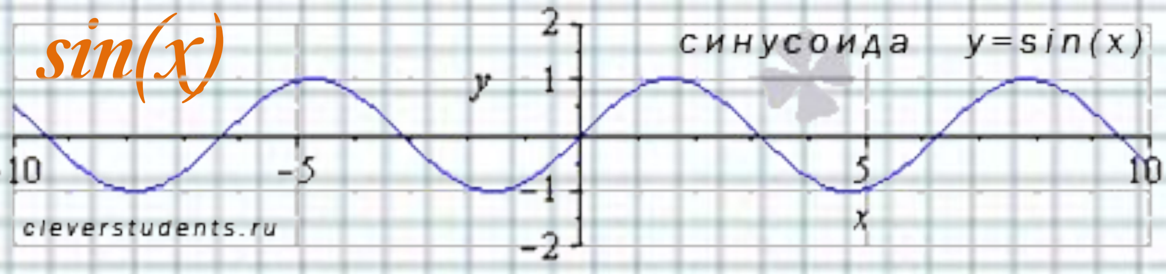
У тригонометрических функций есть понятие *периодичности* (повторяемости значений функции при различных значениях аргумента, отличных друг от друга на величину периода

$$f(x+T)=f(x)$$

где T - период), поэтому, в список свойств тригонометрических функций добавлен пункт «*наименьший положительный период*».

Также для каждой тригонометрической функции мы укажем значения аргумента, при которых соответствующая функция обращается в ноль.

а) Функция синус $y = \sin(x)$



синусоида

Свойства функции y=sin(x):

1. Областью определения функции синус является все множество действительных чисел, то есть, функция $y = \sin x$ определена при $x \in (-\infty; +\infty)$

2. Наименьший положительный период функции синуса равен двум пи.

3. Функция обращается в ноль при $x = \pi \cdot k$, где $k \in Z$, Z – множество целых чисел.

4. Функция синус принимает значения из интервала от минус единицы до единицы включительно, то есть, ее область значений есть $y \in [-1; 1]$

Свойства функции y=sin(x):

5. Функция синус - нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$

6. Функция убывает при $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot k\right], \quad k \in Z$,возрастает при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k\right], \quad k \in Z$

7. Функция синус имеет локальные максимумы в точках $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; 1\right)$,

локальные минимумы в точках $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; -1\right), \quad k \in Z$

8. Функция $y = \sin x$ вогнутая при $x \in [-\pi + 2\pi \cdot k; 2\pi \cdot k], \quad k \in Z$

выпуклая при $x \in [2\pi \cdot k; \pi + 2\pi \cdot k], \quad k \in Z$

9. Координаты точек перегиба $(\pi \cdot k; 0), \quad k \in Z$

10. Асимптот нет.

б) Функция косинус $y =$

График данной функции

Свойства функции y=cos(x):

1. Область определения функции косинус: $x \in (-\infty; +\infty)$

2. Наименьший положительный период функции $y = \cos x$ равен двум пи

3. Функция обращается в ноль при $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$, где $k \in Z$ Z – множество целых чисел.

4. Область значений функции косинус представляет интервал от минус единицы до единицы включительно:

5. Функция косинус - четная, так как $y(-x) = y(x)$

Свойства функции y=cos(x):

6. Функция убывает ,возрастает при

7. Функция $y = \cos x$ имеет локальные максимумы в точках

локальные минимумы в точках

8. Функция вогнутая ,выпуклая при

9. Координаты точек перегиба

10. Асимптот нет.

г) Функция тангенс $y = tg(x)$

Изобразим график функции тангенс (его называют "тангенсоида")

Свойства функции y=tg(x):

1. Область определения функции тангенс: , где $k \in Z$

2. Наименьший положительный период функции тангенс

3. Функция обращается в ноль при , $k \in Z$ где , Z – множество целых чисел.

4. Область значений функции $y = tgx$: $y \in (-\infty; +\infty)$

5. Функция тангенс - нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$

6. Функция возрастает при

7. Функция вогнутая ,выпуклая при

8. Координаты точек перегиба

9. Наклонных и горизонтальных асимптот нет.

в) Функция котангенс $y = ctg(x)$

Изобразим график функции котангенс (его называют "котангенсоида"):

Свойства функции y=tg(x):

1. Область определения функции кот , $k \in Z$

где

2. Наименьший положительный период функции $y = ctgx$

равен пи

3. Функция обращается в , $k \in Z$

ноль при

где

4. Область значений функции котангенс: $y \in (-\infty; +\infty)$

5. Функция нечетная, так $y(-x) = -y(x)$

как

6. Функция $y = ctgx$ убывает

при

7. Функция котангенс вогнутая ,выпуклая

при

8. Координаты точек

перегиба

9. Наклонных и горизонтальных асимптот нет.

7. Обратные тригонометрические

а) Функция арксинус $y = \arcsin(x)$

Свойства функции y=arcsin(x):

1. Областью определения функции арксинус является интервал от минус единицы до един ключительно:

2. Область значений функции $y = \arcsin(x)$:

3. Функция арксинус - нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$

4. Функция $y = \arcsin(x)$ возрастает на всей области определе о есть, при

5. Функция вогнутая при , выпуклая при

6. Точка перегиба $(0; 0)$, она же ноль функции

7. Асимптот нет.

б) Функция арксинус $y = \arccos(x)$

Свойства функции y=arccos (x):

1. Область определения функции арккосинус:

2. Область значений функции $y = arcc$

3. Функция не является ни четной ни нечетной, то есть, она общего вида.

4. Функция арккосинус убывает на всей области определе есть, при

5. Функция вогнутая при , выпуклая при

6. Точка перегиба

7. Асимптот нет.

в) **Функция арктангенс** *$y = arctg(x)$*

Свойства функции y=arctg(x):

1. Область определения функции $y = arctg(x)$: $x \in (-\infty; +\infty)$

2. Область значений функции арктан

3. Функция арктангенс *-* нечетная*,* так как $y(-x) = -y(x)$

4. Функция возрастает на всей области определения*,* то есть*,* при $x \in (-\infty; +\infty)$

5. Функция арктангенс вогнутая при *,* выпуклая при $x \in [0; +\infty)$

6. Точка перегиба *(0; 0),* она же ноль функции.

7. Горизонтальными асимптотами являются пр и пр ями и пр и

На чертеже они показаны зеленым цветом.

г) Функция арккотангенс $y = \operatorname{arcctg}(x)$

Свойства функции y=arcctg(x):

1. Областью определения функции арккотангенс является все множество действительных чисел: $x \in (-\infty; +\infty)$

2. Область значений функции $y = arcct$

3. Функция арккотангенс не является ни четной ни нечетной, то есть, она общего вида.

4. Функция убывает на всей области определения, то есть, при $x \in (-\infty; +\infty)$

5. Функция вогнутая при $x \in [0; +\infty)$, выпуклая при

6. Точка перегиба

7. Горизонтальными асимптотами являются прямые пр и

(на чертеже показана зеленым цветом) и $y = 0$ при

Спасибо за внимание!