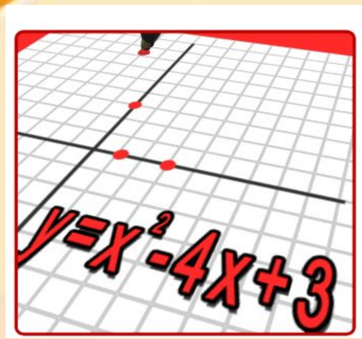
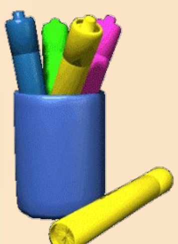


Подготовка к ЕГЭ. Решение задач С2.

Коткова Евгения Сергеевна,
учитель математики
МБОУ «Лицей № 83» г. Казани,
I квалификационная категория



Типы задач С2

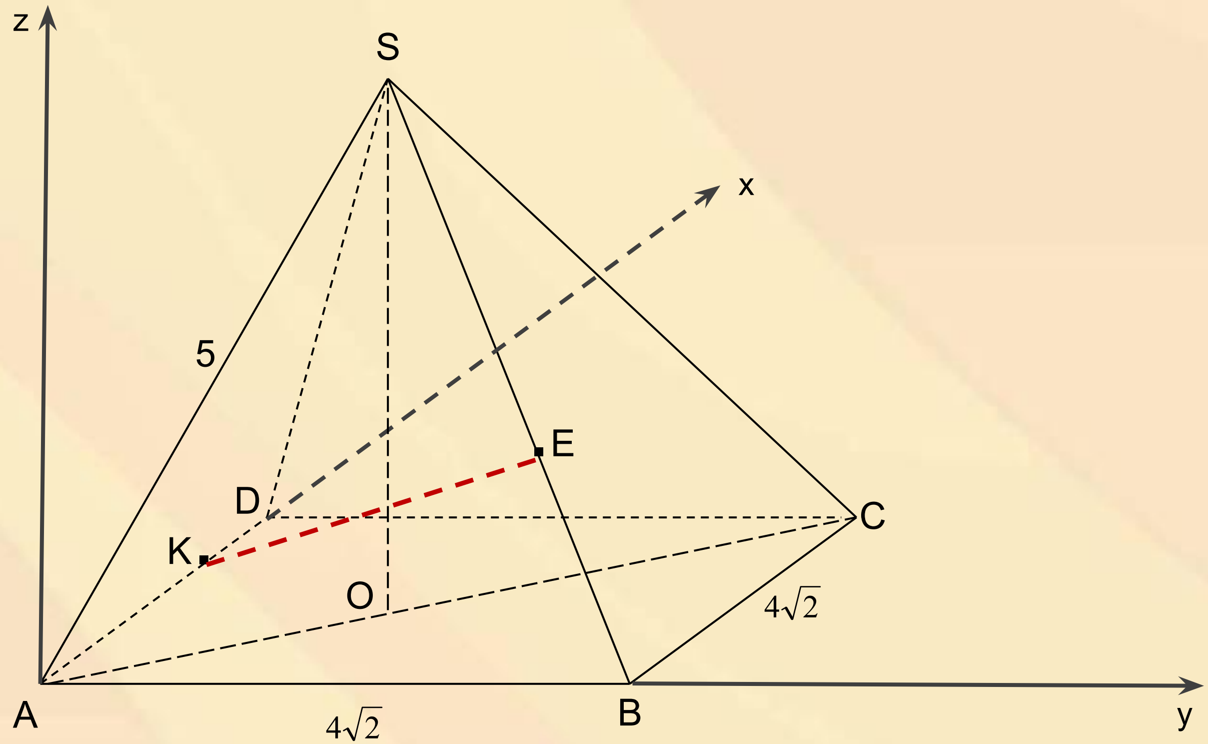
- Расстояние между двумя точками
- Расстояние от точки до плоскости
- Угол между прямой и плоскостью
- Угол между плоскостями

Расстояние между двумя точками

Пусть точки $A(x_1, y_1, z_1)$ *и* $B(x_2, y_2, z_2)$ *- концы отрезка АВ. Тогда внутренняя точка С отрезка АВ такая, что АС:СВ=k, имеет координаты*

$$C\left(\frac{x_1 + kx_2}{k+1}, \frac{y_1 + ky_2}{k+1}, \frac{z_1 + kz_2}{k+1}\right)$$

Задача. ***В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, сторона основания и боковое ребро которой равны $4\sqrt{2}$ и 5 соответственно. Найдите расстояние между точками E и K, если известно, что E лежит на боковом ребре SB и SE=2BE, а K – на стороне основания AD и AK=3KD.***

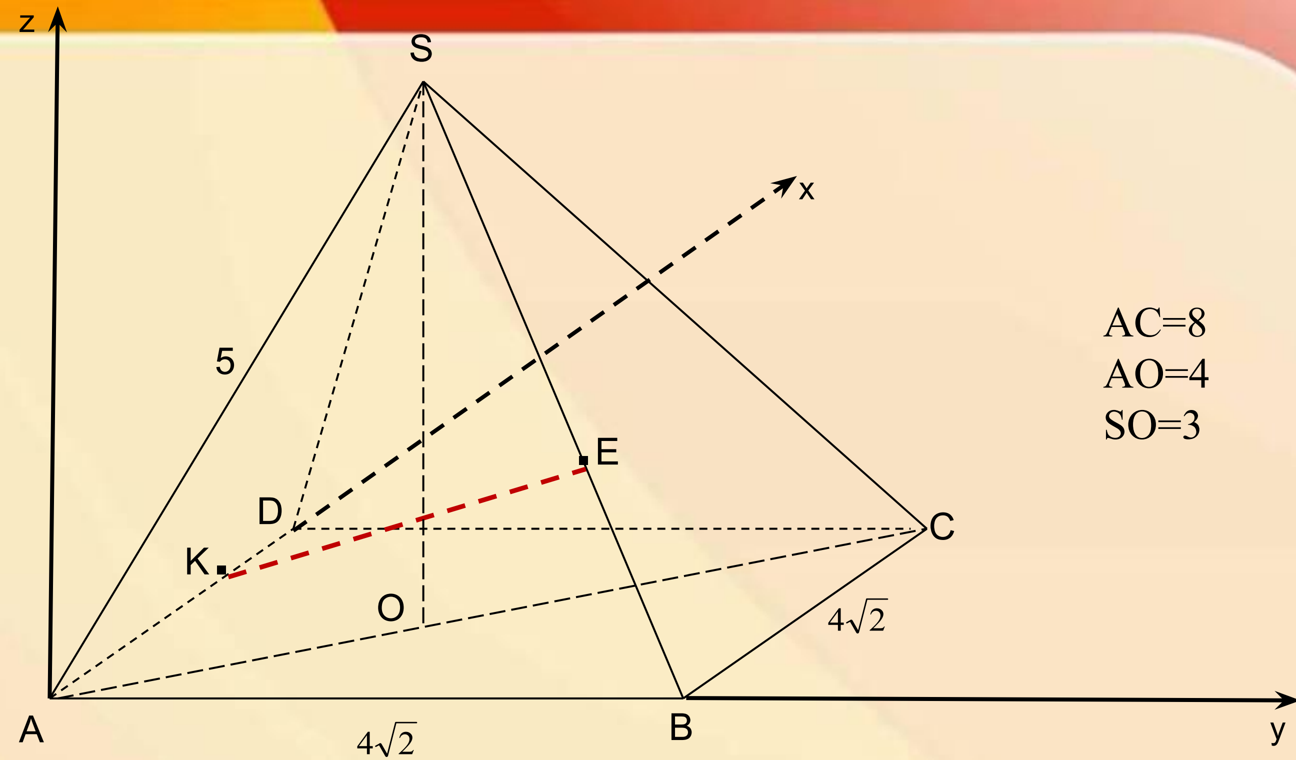


AC=8
AO=4
SO=3

$K\left(3\sqrt{2};\, 0;\, 0\right)$

$B\left(0;\, 4\sqrt{2};\, 0\right),\ S\left(2\sqrt{2};\, 2\sqrt{2};\, 3\right) \Rightarrow$ *по формуле находим координаты точки* E :

$$E\left(\frac{2\sqrt{2}+2\cdot 0}{2+1};\, \frac{2\sqrt{2}+2\cdot 4\sqrt{2}}{2+1};\, \frac{3+2\cdot 0}{2+1}\right) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3};\, \frac{10\sqrt{2}}{3};\, 1\right)$$



AC=8
AO=4
SO=3

$$K\left(3\sqrt{2};\ 0;\ 0\right),\quad E\left(\frac{2\sqrt{2}}{3};\ \frac{10\sqrt{2}}{3};\ 1\right)$$

$$KE=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-3\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{10\sqrt{2}}{3}-0\right)^2+(1-0)^2}=\sqrt{\frac{98}{9}+\frac{200}{9}+1}=\frac{\sqrt{307}}{3}$$

$$\textit{Ответ}:\ \frac{\sqrt{307}}{3}$$

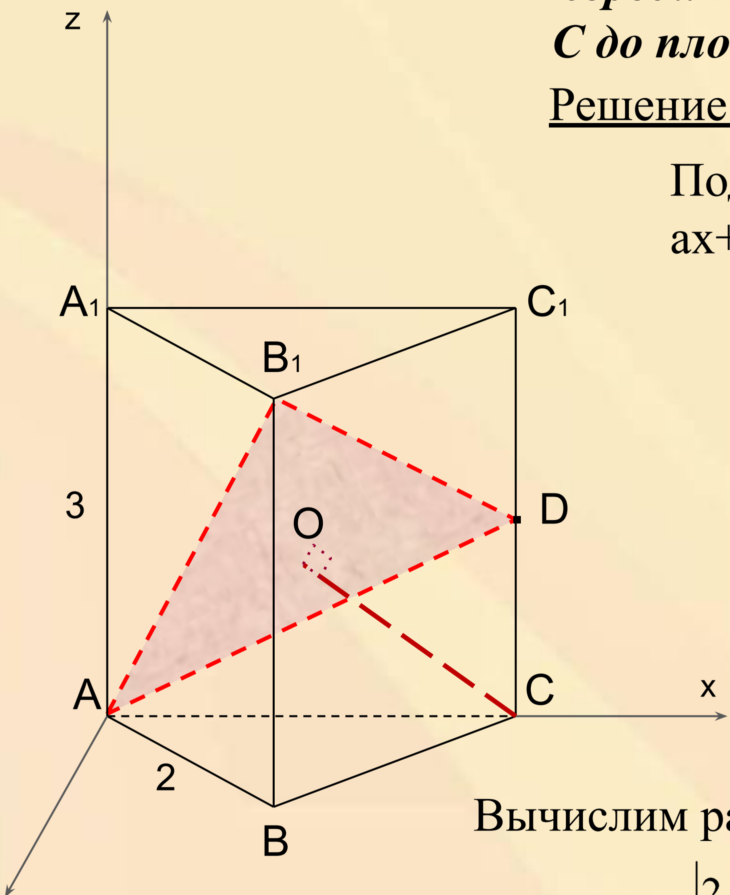
Расстояние от точки до плоскости

Координатный метод

Расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ *до плоскости* α, *заданной уравнением ax+by+cz+d=0, можно вычислить по формуле*

$$\rho(M,\alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Задача (ЕГЭ, 2012). ***В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, боковые рёбра равны 3, точка D – середина ребра CC_1. Найдите расстояние от вершины C до плоскости ADB_1.***



Решение: $A(0;0;0)$, $B_1(1;\sqrt{3};3)$, $D\left(2;0;\frac{3}{2}\right)$

Подставим координаты точек в уравнение плоскости ax+by+cz+d=0,

$$\begin{cases} d=0, \\ a+\sqrt{3}b+3c=0, \\ 2a+\frac{3}{2}c=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=0, \\ b=\sqrt{3}a, \\ c=-\frac{4}{3}a. \end{cases} \Rightarrow$$

$$ax+\sqrt{3}ay-\frac{4}{3}az=0 \Rightarrow 3x+3\sqrt{3}y-4z=0$$

$$a=3,\ b=3\sqrt{3},\ c=-4,\ d=0, \qquad C(2;0;0)$$

Вычислим расстояние от точки C до плоскости ADB_1 по формуле:

$$\rho(C,ADB_1)=\frac{\left|2\cdot3+3\sqrt{3}\cdot0-4\cdot0+0\right|}{\sqrt{9+27+16}}=\frac{6}{\sqrt{52}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\textit{Ответ}:\ \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

Угол между прямой и плоскостью

Векторно - координатный метод

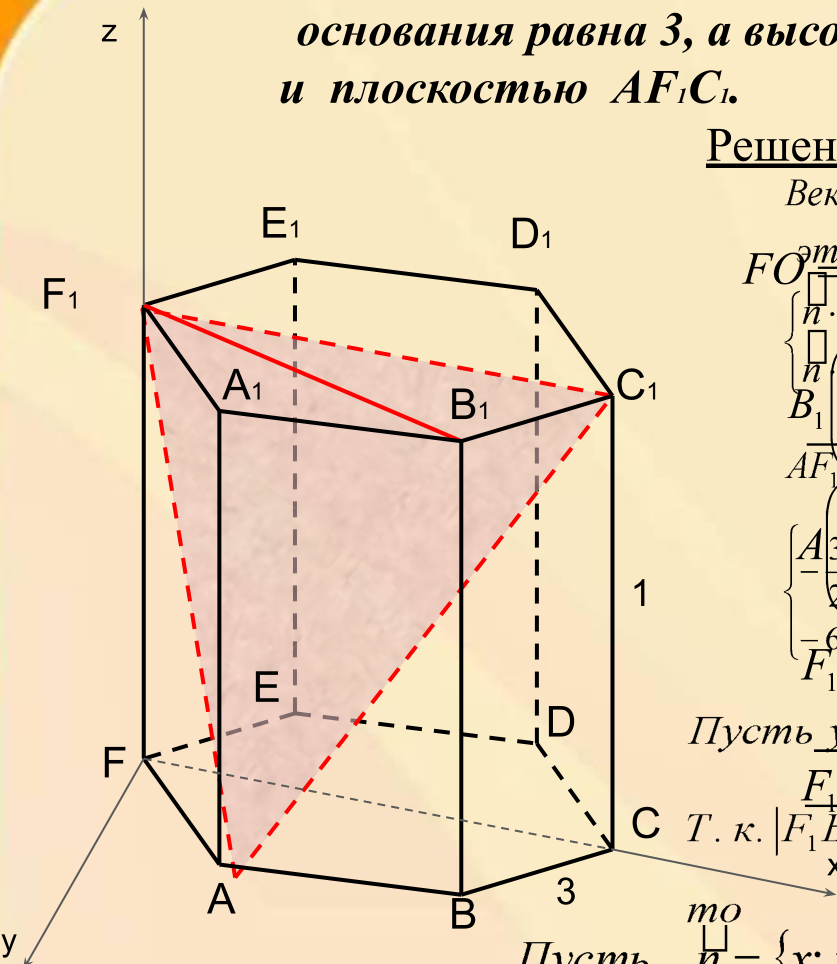
Угол между прямой ℓ и плоскостью α можно вычислить по формуле

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{p}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{p}|} = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

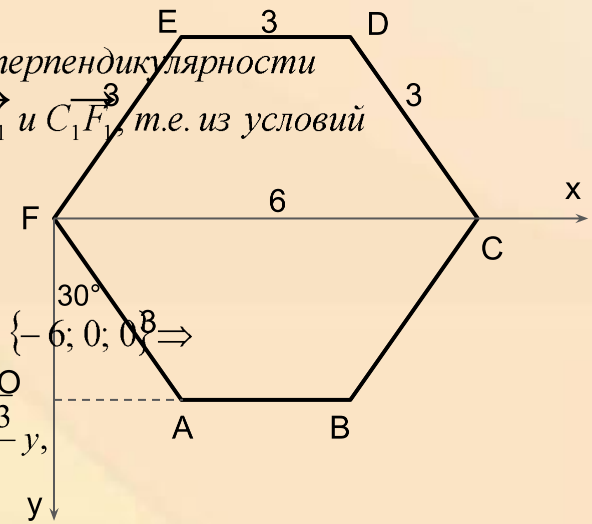
где $\vec{n} = \{x_1, y_1, z_1\}$ – *вектор нормали плоскости* α,

$\vec{p} = \{x_2, y_2, z_2\}$ – *направляющий вектор прямой* ℓ.

***Задача*. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 3, а высота равна 1. Найдите угол между прямой F_1B_1 и плоскостью AF_1C_1.**



Решение:



Вектор $\vec{n}$ *найдем из условий перпендикулярности этого вектора векторам* $\overrightarrow{AF_1}$ *и* $\overrightarrow{C_1F_1}$, *т.е. из условий*

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AF_1} = 0, \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{C_1F_1} = 0 \end{cases}$$

$$FO = \sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$B_1\left(\frac{9}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}; 1\right)$$

$$A\left(\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

$$F_1(0; 0; 1),\ C_1(6; 0; 1)$$

$$\overrightarrow{AF_1} = \left\{-\frac{3}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}; 1\right\},\ \overrightarrow{C_1F_1} = \{-6; 0; 0\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}x - \frac{3\sqrt{3}}{2}y + z = 0, \\ -6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{3\sqrt{3}}{2}y, \\ x = 0. \end{cases}$$

Пусть $y = 2$, *тогда* $z = 3\sqrt{3}$, $x = 0$ *и* $\vec{n} = \{0; 2; 3\sqrt{3}\}$, $|\vec{n}| = \sqrt{31}$.

$$\overrightarrow{F_1B_1} = \left\{\frac{9}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}; 0\right\}$$

Т. к. $|\overrightarrow{F_1B_1}| = 3\sqrt{3}$ *и* $\overrightarrow{F_1B_1}\cdot\vec{n} = 0\cdot\frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot 2 + 3\sqrt{3}\cdot 0 = 3\sqrt{3}$, *то*

$$\sin\varphi = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{31}} = \frac{\sqrt{31}}{31} \Rightarrow \varphi = \arcsin\frac{\sqrt{31}}{31}$$

Пусть $\vec{n} = \{x; y; z\}$ – *вектор, перпендикулярный плоскости* α, φ – *искомый угол. Тогда по формуле:*

$$\sin\varphi = \frac{|\overrightarrow{F_1B_1}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{F_1B_1}|\cdot|\vec{n}|}.$$

$$\boxed{\textit{Ответ}: \arcsin\frac{\sqrt{31}}{31}}$$

Угол между плоскостями

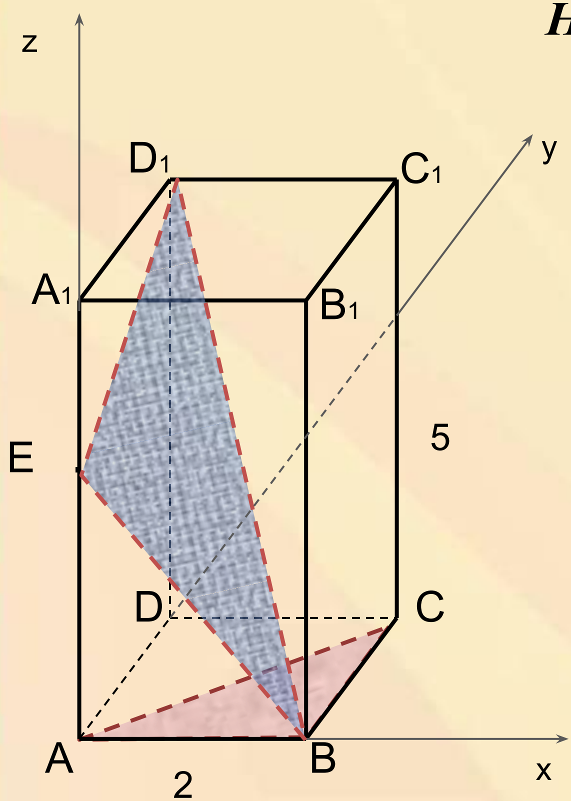
Векторно - координатный метод

Задачу о нахождении угла между плоскостями α и β, заданными в прямоугольной системе координат уравнениями $p_1x+q_1y+r_1z+d_1=0$ и $p_2x+q_2y+r_2z+d_2=0$ соответственно, удобнее свести к задаче о нахождении угла между векторами их нормалей

$\vec{n}_\alpha = \{p_1, q_1, r_1\}$ *и* $\vec{n}_\beta = \{p_2, q_2, r_2\}$, *используя формулу*

$$\boxed{\cos\angle(\alpha, \beta) = \frac{\left|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta\right|}{\left|\vec{n}_\alpha\right| \cdot \left|\vec{n}_\beta\right|} = \frac{\left|p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2\right|}{\sqrt{p_1^{\ 2} + q_1^{\ 2} + r_1^{\ 2}} \cdot \sqrt{p_2^{\ 2} + q_2^{\ 2} + r_2^{\ 2}}}}$$

Задача (ЕГЭ, 2012). ***В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE:EA_1=3:2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.***



Решение: Составим уравнение плоскости BED_1.

$B(2;0;0)$, $E(0;0;3)$, $D_1(0;2;5)$

Подставим координаты точек в уравнение плоскости $ax+by+cz+d=0$.

$$\begin{cases} 3c+d=0, \\ 2a+d=0, \\ 2a+5c+d=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-\dfrac{1}{3}d, \\ a=-\dfrac{1}{2}d, \\ b=\dfrac{1}{3}d \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2}dx+\frac{1}{3}dy-\frac{1}{3}dz+d=0 \Rightarrow$$

$-3x+2y-2z+6=0$ – *уравнение плоскости*

Координаты нормального вектора $\vec{n}_1=\{-3;2;-2\}$.

Т. к. ось Az перпендикулярна плоскости основания, то *нормальный вектор* плоскости ABC *имеет координаты* $\vec{n}_2=\{0;0;1\}$

Итак, $\vec{n}_1=\{-3;2;-2\}$, $\vec{n}_2=\{0;0;1\}$

Используя формулу, вычислим косинус искомого угла:

$$\cos\angle(ABC,BED_1)=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{|0+0-2|}{\sqrt{0+0+1}\cdot\sqrt{9+4+4}}=\frac{2}{\sqrt{17}}=\frac{2\sqrt{17}}{17}$$

Отсюда искомый угол равен $\arccos\dfrac{2\sqrt{17}}{17}$.

$$\boxed{\textit{Ответ}:\ \arccos\frac{2\sqrt{17}}{17}.}$$

Спасибо за внимание!

Расстояние между двумя точками

Пусть точки $A(x_1, y_1, z_1)$ *и* $B(x_2, y_2, z_2)$ *- концы отрезка АВ. Тогда внутренняя точка С отрезка АВ такая, что АС:СВ=k, имеет координаты*

$$C\left(\frac{x_1 + kx_2}{k+1}, \frac{y_1 + ky_2}{k+1}, \frac{z_1 + kz_2}{k+1}\right)$$

Расстояние от точки до плоскости

Координатный метод

Расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости α, заданной уравнением $ax+by+cz+d=0$, можно вычислить по формуле

$$\rho(M,\alpha)=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Угол между прямой и плоскостью

Векторно - координатный метод

Угол между прямой ℓ и плоскостью α можно вычислить по формуле

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{p}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{p}|} = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

где $\vec{n} = \{x_1, y_1, z_1\}$ – *вектор нормали плоскости* α,

$\vec{p} = \{x_2, y_2, z_2\}$ – *направляющий вектор прямой* ℓ

Угол между плоскостями

Векторно - координатный метод

Задачу о нахождении угла между плоскостями α и β, заданными в прямоугольной системе координат уравнениями $p_1x+q_1y+r_1z+d_1=0$ и $p_2x+q_2y+r_2z+d_2=0$ соответственно, удобнее свести к задаче о нахождении угла между векторами их нормалей

$\vec{n}_\alpha = \{p_1, q_1, r_1\}$ *и* $\vec{n}_\beta = \{p_2, q_2, r_2\}$, *используя формулу*

$$\cos\angle(\alpha, \beta) = \frac{\left|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta\right|}{\left|\vec{n}_\alpha\right| \cdot \left|\vec{n}_\beta\right|} = \frac{\left|p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2\right|}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}$$