Повторение независимых испытаний

СХЕМА БЕРНУЛЛИ

Рассмотрим случай, когда одно и то же испытание повторяется несколько раз - проводится серия испытаний в одинаковых условиях, т. е. вероятность появления события A во всех опытах одна и та же (const). Такие испытания называются **повторными независимыми**.

В задачах определим вероятность появления события A $\boldsymbol{k}$ раз (любое заданное количество раз), в серии из $\boldsymbol{n}$ опытов.

Примеры независимых испытаний

1. Несколько последовательных бросаний монеты.

2. Несколько последовательных выниманий карты из колоды, при условии, что карта возвращается каждый раз и колода перемешивается, т.е. выборка с возвращением (иначе испытания –зависимые).

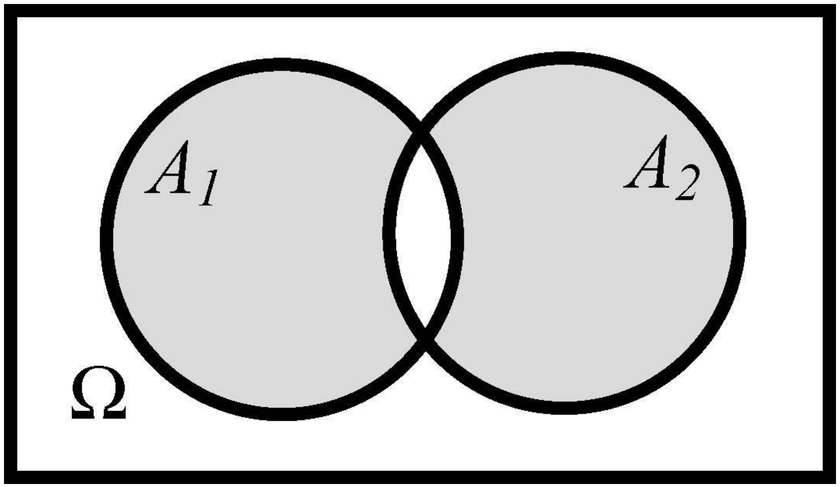
3. Несколько последовательных бросаний игральной кости…

Пусть в результате случайного испытания может произойти или не произойти событие А. Если событие наступило, назовём испытание успешным, а событие – **успехом**. Испытание повторяется **n** раз. При этом соблюдаются условия:

- вероятность успеха **P(A) = p** в каждом испытании одна и та же;
- результат любого испытания не зависит от исходов предыдущих.

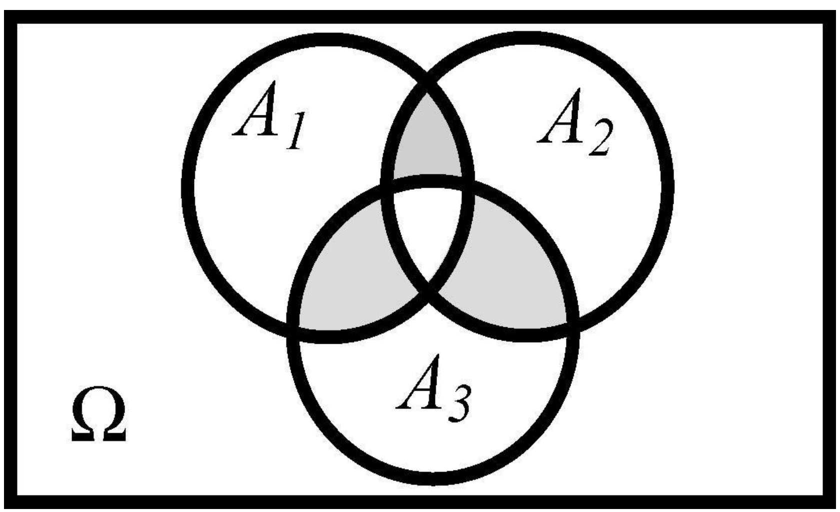
Рассмотрим несколько примеров:

1)



Два испытания, В: ”только в одном успех ” (закрашенная область соответствует событию В)

2)



Три испытания, В:” только в двух успех” (закрашенная область соответствует событию В)

Рассмотрим событие B_m, состоящее в том, что событие A в этих n испытаниях наступит ровно m раз и не наступит ровно $(n - m)$ раз.

Обозначим A_i $(i = 1, 2,\ldots, n)$ появление события A, $\overline{A_i}$ - непоявление A в i –м испытании.

В силу постоянства условий испытания:

$$P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = p$$

$$P(\overline{A_1}) = P(\overline{A_2}) = \ldots = P(\overline{A_n}) = 1 - p = q$$

A может появиться m раз в разных комбинациях, чередуясь с противоположным $\overline{A}$.

- Число возможных комбинаций равно числу сочетаний из n элементов по m, т. е. C_n^m. Следовательно, событие B_m можно представить в виде суммы сложных несовместных событий, причем число слагаемых равно C_n^m:

$$B_m = A_1 A_2 \ldots A_m \overline{A}_{m+1} \ldots \overline{A}_n + \ldots$$

$$\ldots + \overline{A}_1 \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_{n-m} A_{n-m+1} \ldots A_n$$

где в каждое произведение A входит m раз, $\overline{A}$ - $(n-m)$ раз.

Вероятность каждого сложного события формулы по т. умножения вероятностей независимых событий равна $p^m q^{n-m}$.

Так как общее количество таких событий C_n^m, то по т. сложения вероятностей несовместных событий вероятность события B_m (об. $\mathrm{P}_{\mathrm{m}}(\mathrm{n})$):

$$\mathrm{P}_{\mathrm{n}}(\mathrm{m}) = C_n^m \cdot p^m q^{n-m} \quad \text{или}$$

$$\mathrm{P}_{\mathrm{n}}(\mathrm{m}) = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \cdot p^m q^{n-m}$$

Формулу называют **формулой Бернулли**, а повторяющиеся испытания, удовлетворяющие условию независимости и постоянства вероятностей наз. **схемой (испытаниями) Бернулли.**

Пример. Игральная кость брошена 6 раз. Найти вероятность, что ровно 3 раза выпадет «шестёрка».

Решение. Шестикратное бросание кости можно рассматривать как последовательность независимых испытаний с вероятностью успеха («шестерки») 1/6, и вероятностью неудачи — 5/6. Искомую вероятность вычисляем по формуле:

$$P_n(m) = P_6(3) = C_6^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0{,}053$$

Пример. Игральная кость брошена 4 раза. Найти вероятность, что «6» появится не более 2-х раз.

Решение: Пусть событие B - шестерка появится не более двух раз.

B является суммой несовместных событий: B_0 – шестерка не появится ни разу; B_1 – появится 1 раз; B_2 – появится 2 раза.

Произведенное испытание – бросание игральной кости. Событие A (успех) – выпадение «6». Событие $\overline{A}$ (неудача) – выпадение любого числа очков, кроме «6».

По классическому определению вероятности:

$$P(A) = \frac{1}{6} = p, \quad P(\overline{A}) = \frac{5}{6} = q$$

Таких испытаний по условию производится 4.

Тогда вероятность, что в 4-х независимых испытаниях будет 0 успехов:

$$P_4(0) = C_4^0 p^0 q^4 = \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{5^4}{6^4} = \frac{625}{1296} = P(B_0)$$

Аналогично:

$$P_4(1) = C_4^1 p^1 q^3 = 4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 4 \cdot \frac{5^3}{6^4} = \frac{500}{1296} = P(B_1)$$

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 6 \cdot \frac{5^2}{6^4} = \frac{150}{1296} = P(B_2)$$

Используя т. сложения несовместных событий:

$$P(B) = P(B_0 + B_1 + B_2) = P(B_0) + P(B_1) + P(B_2) =$$

$$= \frac{625}{1296} + \frac{500}{1296} + \frac{150}{1296} = \frac{1275}{1296} \approx 0,98379$$

Рассмотрим следующий пример, когда из двух очень похожих вопросов на один можно ответить, пользуясь формулой Бернулли, а для другого этой формулы оказывается недостаточно.

Пример. Система радиолокационных станций ведет наблюдение за группой объектов, состоящей из 8 единиц. Каждый объект может быть (независимо от других) потерян с вероятностью 0,1. Найти вероятность того, что хотя бы один из объектов будет потерян.

Решение: Пусть событие A = {потерять системой радиолокационных станций хотя бы один объект}, тогда: $P(A) = P_8(1) + P_8(2) + \ldots + P_8(8)$.

- Проще найти вероятность противоположного события - ни один объект не потерян.

$$P(\overline{A}) = P_8(0) = C_8^0 \cdot (0{,}1)^0 \cdot (0{,}9)^8 \approx 0{,}43;$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \approx 1 - 0{,}43 = 0{,}57$$

Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях

Число k_0 (наступление события в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p) называют **наивероятнейшим** если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз, превышает вероятность остальных возможных исходов испытаний. Его определяют из двойного неравенства а) если число $(np - q)$ – дробное, то существует одно наивероятнейшее число k_0;

б) если число $(np - q)$ – целое, то существует два наивероятнейших числа, а именно k_0 и k_0+1;

в) если число np – целое, то наивероятнейшее число $k_0 = np$.

Пример. В урне 10 белых и 40 чёрных шаров. Вынимают подряд 14 шаров, причём цвет вынутого шара регистрируют, а затем шар возвращают в урну. Определить наивероятнейшее число появлений белого шара.

Решение. Здесь $n = 14$, $p = 10/50 = 1/5$, $q = 1 - p = = 4/5$. Используя двойное неравенство $np - q \le k_0 \le np + p$ при указанных значениях n, p и q, получим $14/5 - 4/5 \le k_0 \le 14/5 + 1/5$, т.е. $2 \le k_0 \le 3$. Таким образом, задача имеет два решения: $k_0 = 2$, $k_0 = 3$.

Пример. Вероятность попадания стрелком в цель равна 0,7. Сделано 25 выстрелов. Определить наивероятнейшее число попаданий в цель.

Решение. Здесь $n = 25$, $p = 0,7$, $q = 0,3$.

Следовательно,

$25 \cdot 0,7 - 0,3 \leq k_0 \leq 25 \cdot 0,7 + 0,7$, т.е. $17,2 \leq k_0 \leq 18,2$.

Так как k_0 – целое число, то $k_0 = 18$.

Пример. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее – выиграть две партии из 4-х или 4 из 6 (ничьи во внимание не принимают).

Решение. Т.к. играют равносильные шахматисты то вероятности выигрыша (p) и проигрыша (q) равны $\frac{1}{2}$.

Так как во всех партиях вероятность выигрыша постоянна и безразлично, в какой последовательности будут выиграны партии – применима формула Бернулли.

Вероятность, что 2 партии из 4 будут выиграны:

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}$$

Вероятность, что 3 партии из 6 будут выиграны:

$$P_6(3) = C_6^3 \cdot p^3 \cdot q^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

$\boldsymbol{P_4(2) > P_6\ (3)}$, то вероятность выиграть 2 партии из 4-х выше чем вероятность выиграть 3 партии из 6.

- ## Независимые испытания с несколькими исходами

Пример. Игральная кость подбрасывается 15 раз. Найти вероятности событий: а) выпадет ровно 10 троек; б) выпадет ровно 10 троек и 3 единицы.

Решение. а) Есть 15 испытаний схемы Бернулли с вероятностью успеха 1/6 (успех - выпадение «3»). Вероятность 10 успехов в 15-ти испытаниях:

$$P(a) = C_{15}^{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{10}(1-\frac{1}{6})^{15-10}$$

б) каждое испытание имеет три, а не два исхода: выпадение тройки, выпадение единицы, выпадение остальных граней. Пусть в одном испытании возможны m исходов:1, 2, ..., m, и исход i в одном испытании случается с вероятностью p_i, где $p_1 + . . . + p_m = 1$

Обозначим через $P(n_1, . . . , n_m)$ искомую вероятность того, что в $n = n_1 + . . . + n_m$ независимых испытаниях исход 1 появился n_1 раз, исход 2 - n_2

- **Теорема.** Для любого n и любых целых $n_1 > 0, \ldots,$ $n_m > 0$ таких, что $n_1 + \ldots + n_m = n$, верна формула:

$$P(n_1, \ldots, n_m) = \frac{n!}{n_1! \ldots n_m!} p_1^{n_1} \cdot \cdots \cdot p_m^{n_m}$$

Так как вероятности выпадения тройки и единицы равны по1/6, а вероятность третьего исхода (выпали любые другие грани) равна 4/6, то вероятность получить десять троек, три единицы и ещё два других очка равна:

$$P(б) = \frac{15!}{10!\,3!\,2!} \cdot \frac{1}{6^{10}} \cdot \frac{1}{6^3} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^2$$

Формула Пуассона

В том случае, когда вероятность появления события p мала ($p < 0{,}1$), а число независимых испытаний велико, для оценки вероятности появления события ровно k раз в n независимых испытаниях используется асимптотическая формула Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = n \cdot p$$

$$P_n(k)$$

Значения при фиксированных k и λ можно

λ / k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030
5				0,0001	0,0002	0,0004
λ / k	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,4966	0,4493	0,4066	0,3676	0,1353	0,0498
1	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679	0,2707	0,1494
2	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839	0,2707	0,2240
3	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613	0,1804	0,2240
4	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153	0,0902	0,1680
5	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031	0,0361	0,1008

Пример. Вероятность искажения одного символа при передаче сообщения по линии связи равна **0,001.** Сообщение считают принятым, если в нём отсутствуют искажения. Найти вероятность того, что будет принято сообщение, состоящее из **20** слов **по 100** символов каждое.

Решение: Обозначим через ***A*** событие вероятность которого требуется найти в задаче.

Переформулируем задачу в терминах схемы Бернулли n = 2000 - **количество символов в сообщении;**

успех: символ не искажается, **p = 0,001** - вероятность успеха; **m = 0** $P_{2000}(0)-?$

Вычислим $P_{2000}(0)$

$\lambda = np = 2$

$$P_{2000}(0)=\frac{2^{0}}{0!}\cdot e^{-2}=0{,}1353$$

или с помощью таблицы.

Пример. Известно, что процент брака для некоторой детали равен 0,5%. Контролер проверяет 1000 деталей. Какова вероятность обнаружить ровно 3 бракованные детали? Какова вероятность обнаружить не меньше трех бракованных деталей?

Решение. Имеем 1000 испытаний Бернулли с вероятностью «успеха» p = 0,005. Применяя пуассоновское приближение с λ= np = 5:

$$1.\ P_{1000}(3) \approx \frac{5^3}{3!} e^{-5} \approx 0,14;$$

$$2.\ P_{1000}(m > 3) = 1 - P_{1000}(m < 3) =$$

$$= 1 - \left[P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2) \right] \approx$$

$$\approx 1 - \sum_{m=0}^{2} \frac{5^m}{m!} \cdot e^{-5} \approx 0{,}875.$$

Ответ: вероятность обнаружить ровно 3 бракованные детали равна 0,14; обнаружить не менее 3-х бракованных деталей 0,875.

Пример (задача С. Пепайса). Пепайс предложил Ньютону следующую задачу. Какое из событий более вероятно:

- A = {появление по крайней мере одной шестерки при подбрасывании 6 костей},
- B = { появление хотя бы двух шестерок при подбрасывании 12 костей} и
- C = {появление не менее трех шестерок при бросании 18 костей}?

Решение. Проще найти вероятности противоположных событий, а затем их сравнивать. Для их нахождения воспользуемся теоремой Пуассона:

$$P(\overline{A}) = P_6(0) \approx \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{1}{e},$$

где $\lambda = np = 6 \cdot \dfrac{1}{6} = 1$

$$P(\overline{B}) = P_{12}(0) + P_{12}(1) \approx \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{3}{e^2},$$

где $\lambda = 12 \cdot \frac{1}{6} = 2$

- $$P(\overline{C}) = P_{18}(0) + P_{18}(1) + P_{18}(1) \approx \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} +$$

$$+ \frac{\lambda^1}{1!} \cdot e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-3} + 3e^{-3} + \frac{9}{2} e^{-3} = \frac{17}{2e^{-3}},$$

где $\lambda = 18 \cdot \frac{1}{6} = 3$

Отсюда: $P(\overline{A}) < P(\overline{B}) < P(\overline{C})$ или

$1 - P(\overline{A}) > 1 - P(\overline{B}) > 1 - P(\overline{C})$ то есть

$$\boldsymbol{P(A) > P(B) > P(C)}$$

Рекомендации по применению приближённых формул, выбор осуществляется по числам λ и n

Формула	Формула Пуассона	Формула Муавра-Лапласа
n<10	$\lambda \le 2$	$\lambda > 2$
$10 \le n \le 20$	$\lambda \le 3$	$\lambda > 3$
$20 \le n \le 100$	$\lambda \le 5$	$\lambda > 5$
$100 \le n \le 1000$	$\lambda \le 10$	$\lambda > 10$
n>1000	$\lambda \le \frac{1}{2}\sqrt{n}$	$\lambda > \frac{1}{2}\sqrt{n}$