ЛЕКЦИЯ 4

ПОВТОРЕНИЕ ОПЫТОВ

1. Частная теорема о повторении опытов

В результате каждого опыта может появиться или не появиться некоторое событие , причем нас интересует не результат каждого отдельного опыта, а общее число появлений события в результате серии опытов.

Определение: Несколько опытов называются независимыми, если вероятность того или иного исхода каждого из опытов не зависит от того, какие исходы имели другие опыты.

Независимые опыты могут производиться в одинаковых или различных условиях. В первом случае вероятность события от опыта к опыту меняется.

К первому случаю относится частная теорема,

Ко второму – общая теорема о повторении опытов.

Пример: Производится три независимых выстрела по мишени, вероятность попадания в которую при каждом выстреле равна р. Найти вероятность того, что при этих трех выстрелах мы получим ровно два попадания.

Решение.

В – в мишень попадет ровно два снаряда.

A_1 – попадание при первом выстреле
A_2 – попадание при втором выстреле
A_3 – попадание при третьем выстреле

$$B = A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3,$$

события несовместны, и независимы

$$P(B)=pp(1-p)+p(1-p)p+(1-p)pp$$

Пусть $1-p=q$, *тогда*

$$P(B)=?$$

Пример

Производится n независимых опытов, в каждом из которых может появиться или не появится некоторое событие A; вероятность появления события в каждом опыте равна p, а вероятность непоявления 1-p.

Требуется найти вероятность $P_{m,n}$ того, что событие A в этих n опытах появится ровно m раз.

Решение:

B_m -событие A появится в n опытах ровно m раз.

Разложим событие B_m на сумму произведений событий, состоящих в появлении или непоявлении события в отдельном опыте.

Пусть A_i появление события в i-м опыте

Очевидно, каждый вариант появления события B_m (каждый член суммы) должен состоять из m появлений события A и n-m непоявлений, т.е. из m событий A и n-m событий $\bar{A}$ с различными индексами.

$$B_m = A_1 A_2 \ldots A_m \overline{A_{m+1}} \ldots \overline{A_n} + \ldots + A_1 \overline{A_2} A_3 \ldots \overline{A_{n-1}} A_n + \ldots$$
$$\ldots + \overline{A_1}\,\overline{A_2} \ldots \overline{A_{n-m}} A_{n-m+1} \ldots A_n.$$

причем в каждое произведение событие A должно входить m раз, а $\bar{A}$ должно входить $n-m$ раз.

Число всех комбинаций такого рода равно C_n^m, т.е. числу способов, какими можно из n опытов выбрать m, в которых произошло событие A. Вероятность каждой такой комбинации, по теореме умножения для независимых событий, равна $p^m q^{n-m}$. Так как комбинации между собой несовместны, то, по теореме сложения, вероятность события B_m равна

$$P_{m,n} = \underbrace{p^m q^{n-m} + \ldots + p^m q^{n-m}}_{C_n^m \text{ раз}} = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

частная теорема о повторении опытов

Если производится n независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p , то вероятность того, что событие A появится ровно m раз, выражается формулой:

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m},$$

Где q=1-p

Биномиальное распределение

2. Общая теорема о повторении опытов

Частная теорема о повторении опытов - вероятность события во всех опытах одна и та же.

Если опыты производятся в неодинаковых условиях, и вероятность события от опыта к опыту меняется - общая теорема

производится ряд выстрелов в переменных условиях (при изменяющейся дальности), то вероятность попадания может меняться.

Пусть производится n независимых опытов, в каждом из которых может появится или не появиться некоторое событие A , причем *вероятность появления события в i-м опыте равна* p_i,

а вероятность *непоявления* $q_i = 1 - p_i$

найти вероятность $P_{m,n}$ того, что в результате n опытов событие появится ровно m раз.

B_m -событие A появится в n опытах ровно m раз.

$$B_m = A_1 A_2 \ldots A_m \overline{A_{m+1}} \ldots \overline{A_n} + \ldots + A_1 \overline{A_2} A_3 \ldots \overline{A_{n-1}} A_n + \ldots$$
$$\ldots + \overline{A_1}\,\overline{A_2} \ldots \overline{A_{n-m}} A_{n-m+1} \ldots A_n$$

событие A входит m раз,

событие - $\bar{A}$ - (n-m) раз.

Число таких комбинаций будет $C^m{}_n$, но комбинации между собой будут уже неравновероятны.

Применяя теорему сложения и умножения для независимых событий:

$$P_{m,n} = p_1 p_2 \cdots p_m q_{m+1} \cdots q_n + \ldots + p_1 q_2 p_3 \cdots q_{n-1} p_n + \ldots$$

$$\ldots + q_1 q_2 \cdots q_{n-m} p_{n-m+1} \cdots p_n,$$

искомая вероятность равна сумме всех возможных произведений, в которых

буквы *p* с разными индексами входят m раз,

буквы *q* с разными индексами раз n-m.

Для того чтобы чисто механически составлять все возможные произведения из букв и букв с разными индексами, применим следующий формальный прием. Составим произведение биномов:

$$\varphi_n(z) = (q_1 + p_1 z)(q_2 + p_2 z)\ldots(q_n + p_n z)$$

$$\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^{n}(q_i + p_i z)$$

где – z- произвольный параметр.

Найдем в этом произведении биномов коэффициент при z^m.
перемножим биномы и приведем подобные члены.

Каждый член, содержащий z^m, будет иметь в качестве коэффициента произведение m букв p с какими-то индексами и n-m букв q , а после приведения подобных членов коэффициент при z^m будет представлять собой сумму всех возможных произведений такого типа.

Следовательно, способ составления этого коэффициента полностью совпадает со способом вычисления вероятности в задаче о повторении опытов.

Определение: Функция $\varphi_n(z)$, называется производящей функцией.

Теорема (общая терема о повторении опытов)

Вероятность того, что событие А в n независимых опытах появится ровно m раз, равна коэффициенту при z^m в выражении производящей функции:

$$\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^{n} (q_i + p_i z)$$

где $-p_i$- вероятность появления события в i-м опыте.

$$\prod_{i=1}^{n} (q_i + p_i z) = \sum_{m=0}^{n} P_{m,n} z^m$$

Производится 4 независимых выстрела по одной и той же цели с различных расстояний; вероятности попадания при этих выстрелах равны соответственно

$$p_1=0{,}1,\ p_2=0{,}2,\ p_3=0{,}3,\ p_4=0{,}4$$

Найти вероятности ни одного, одного, двух, трех и четырех попаданий:

Решение:

$$\varphi_4(z) = \prod_{i=1}^{4}(q_i + p_i z) = (0,9+0,1z)(0,8+0,2z)(0,7+0,3z)(0,6+0,4z) =$$

$$= 0,302 + 0,44z + 0,215z^2 + 0,04z^3 + 0,002z^4,$$

$$P_{0,4} = 0,302; P_{1,4} = 0,44; P_{2,4} = 0,215; P_{3,4} = 0,04; P_{4,4} = 0,002$$

СРС

разобрать решение задач 2-6 с.65-66 (Е.С. Вентцель)