

# Позиционные задачи

Задачи, в которых определяют относительное положение или **общие элементы геометрических фигур (точки или линии)**

## Вспомогательные позиционные задачи

- определение общих элементов простейших геометрических фигур **из условия принадлежности**

## Первая позиционная задача

- определение точек пересечения линии и поверхности

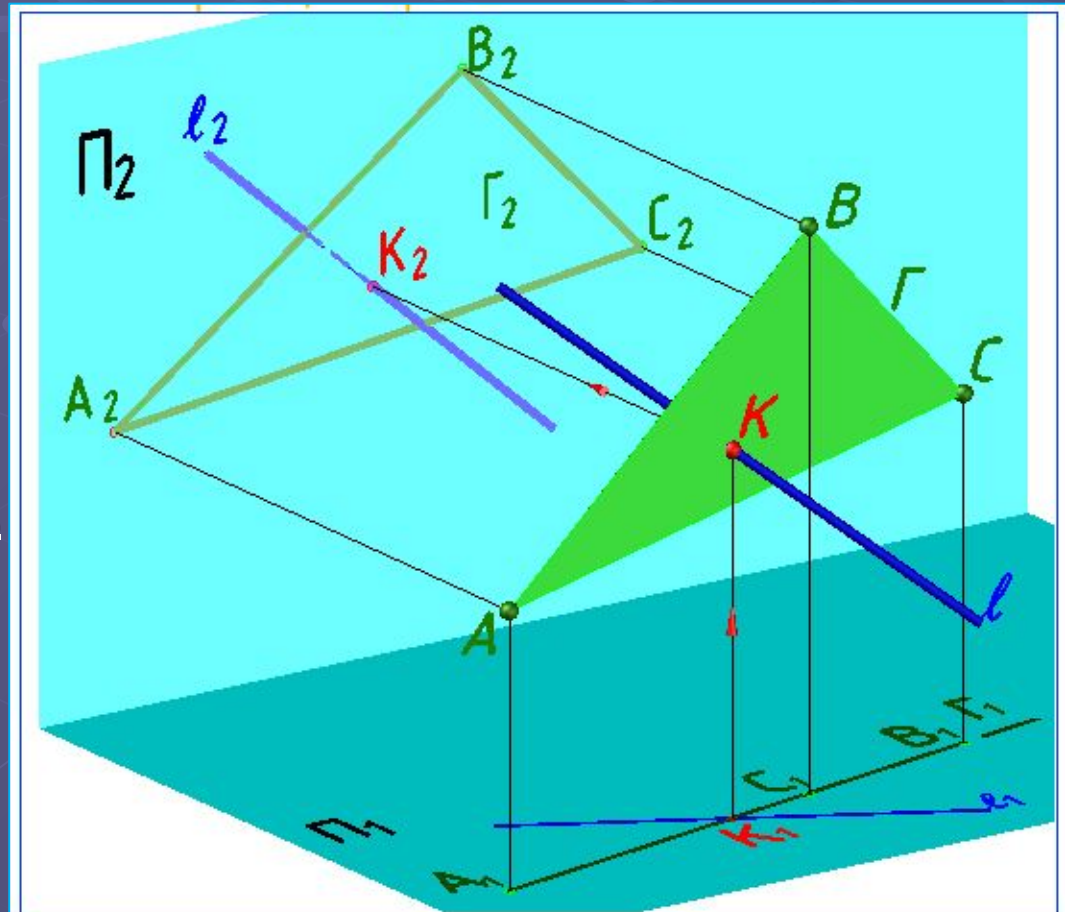
## Вторая позиционная задача

- определение линии пересечения поверхностей

# Определение общих элементов простейших геометрических фигур из условия принадлежности

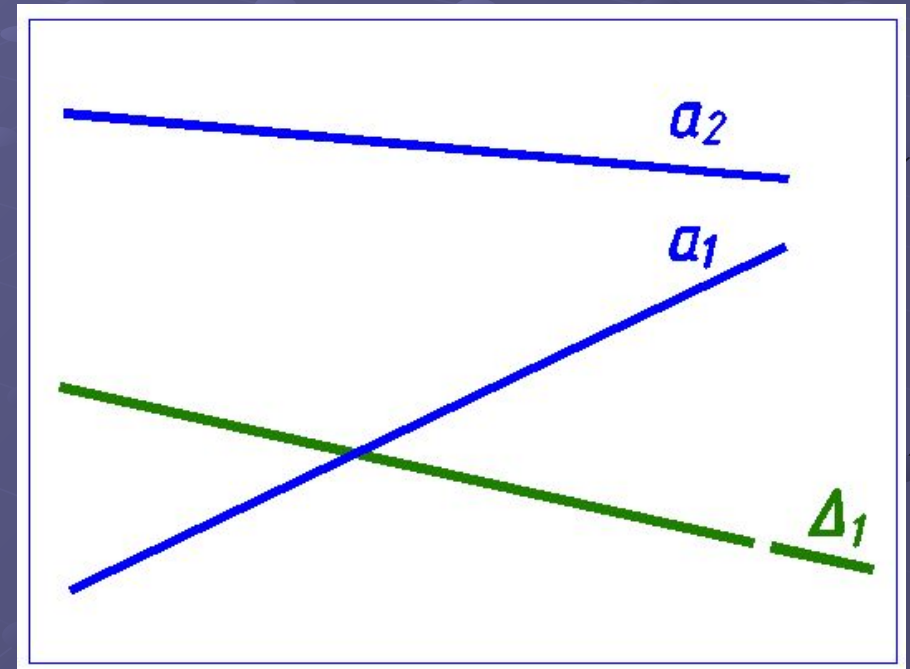
**Задача.** Построить **точку** пересечения прямой  
линии с проецирующей плоскостью

При пересечении  
геометрических фигур с  
проецирующей плоскостью  
одна из проекций их общего  
элемента совпадает с  
проекцией проецирующей  
плоскости (которая  
вырождается в прямую линию).  
Поэтому решение этого типа  
задач сводится к построению  
второй проекции искомой  
геометрической фигуры.



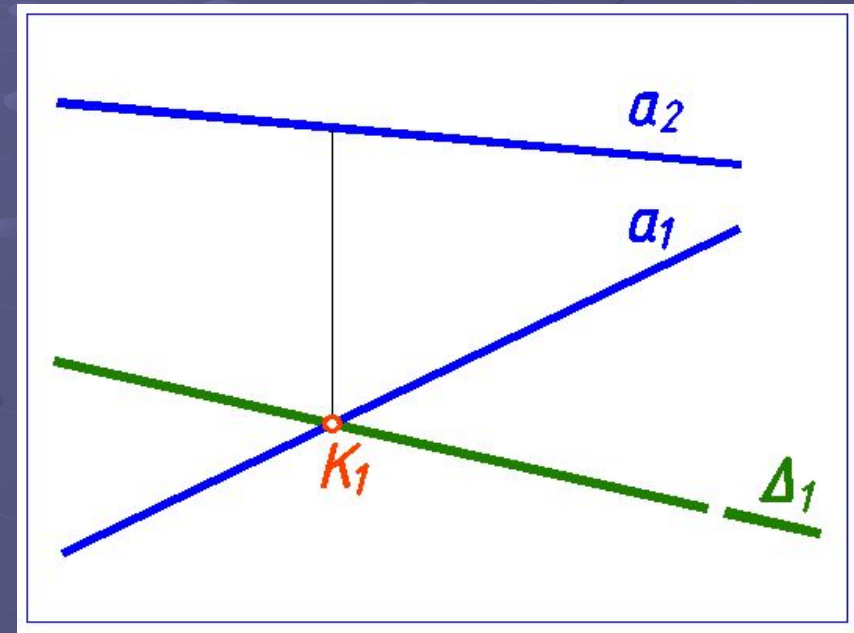
**Задача.** Построить точку  $K(K_2, K_1)$  пересечения горизонтально проецирующей плоскости  $\Delta$  и прямой  $a(a_2, a_1)$  общего положения.

Дано: горизонтально проецирующая плоскость  $\Delta(\Delta_1)$  и прямая  $a(a_1, a_2)$  общего положения.



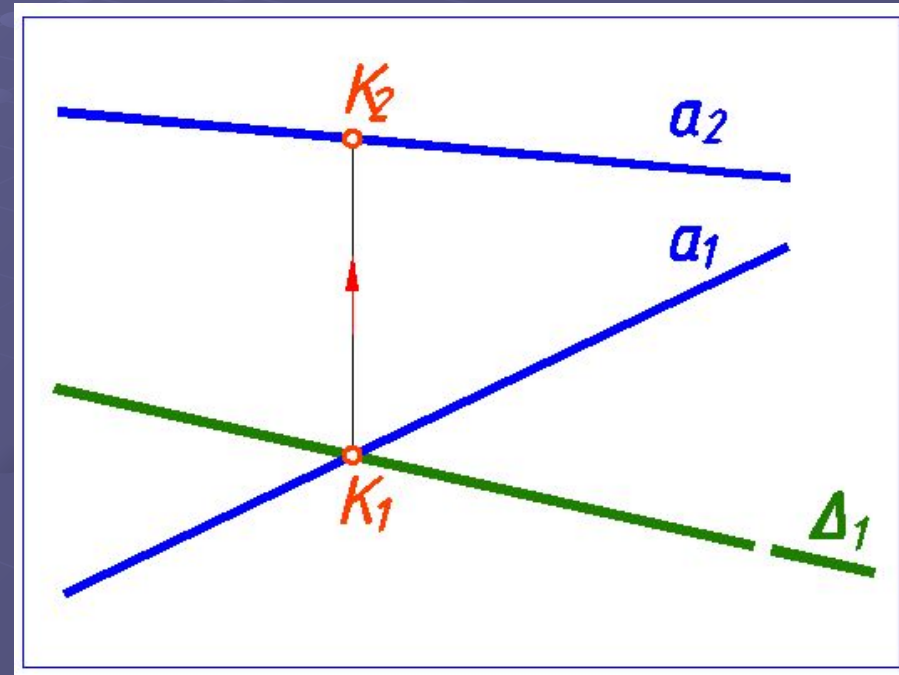
# Построение горизонтальной проекции точки пересечения прямой линии с проецирующей плоскостью

- Точка  $K$  пересечения прямой  $a$  с плоскостью  $\Delta$  принадлежит одновременно и прямой  $a$  и плоскости  $\Delta$ .
- Горизонтальная проекция  $K_1$  точки  $K$  должна принадлежать одновременно горизонтальной проекции  $a_1$  прямой  $a$  и горизонтальной проекции  $\Delta_1$  проецирующей плоскости  $\Delta$ .
- Фиксируем  $K_1$  на пересечении  $a_1$  и  $\Delta_1$ .



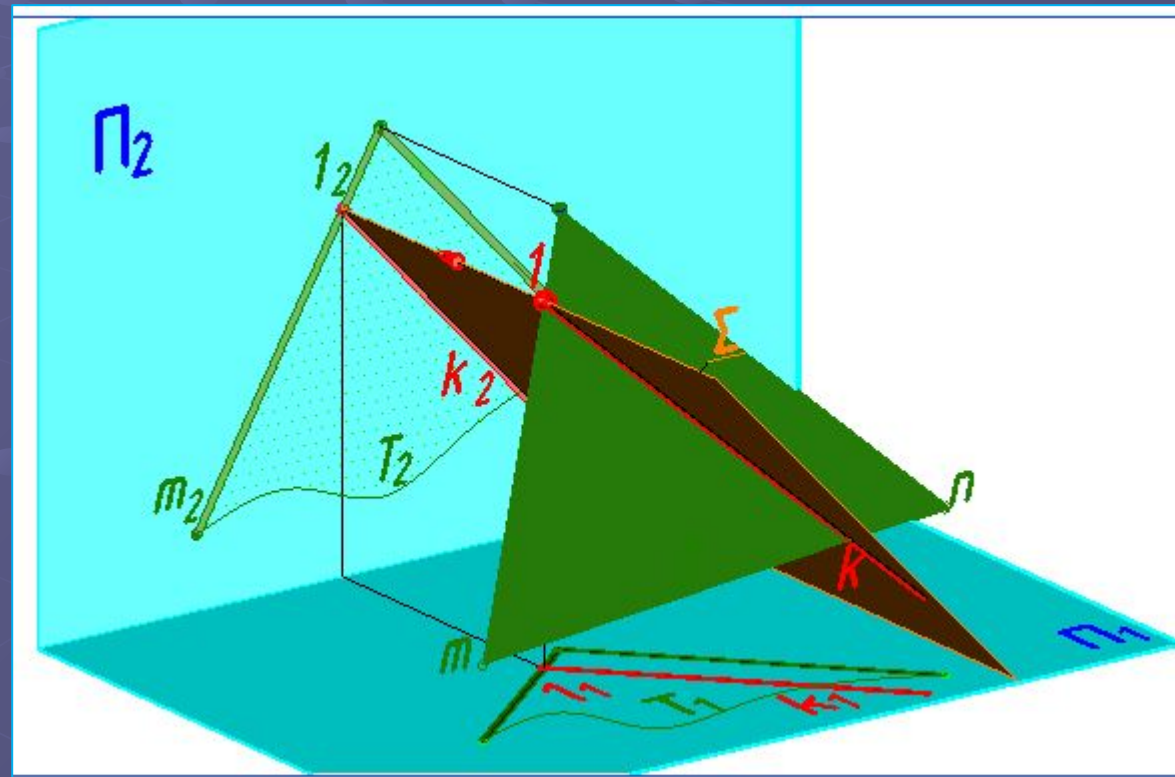
# Построение фронтальной проекции точки пересечения прямой линии с проецирующей плоскостью

Фронтальную проекцию  $K_2$  точки  $K$  находим по линии связи на фронтальной проекции  $a_2$  прямой  $a$  на основании принадлежности точки  $K$  прямой  $a$ .



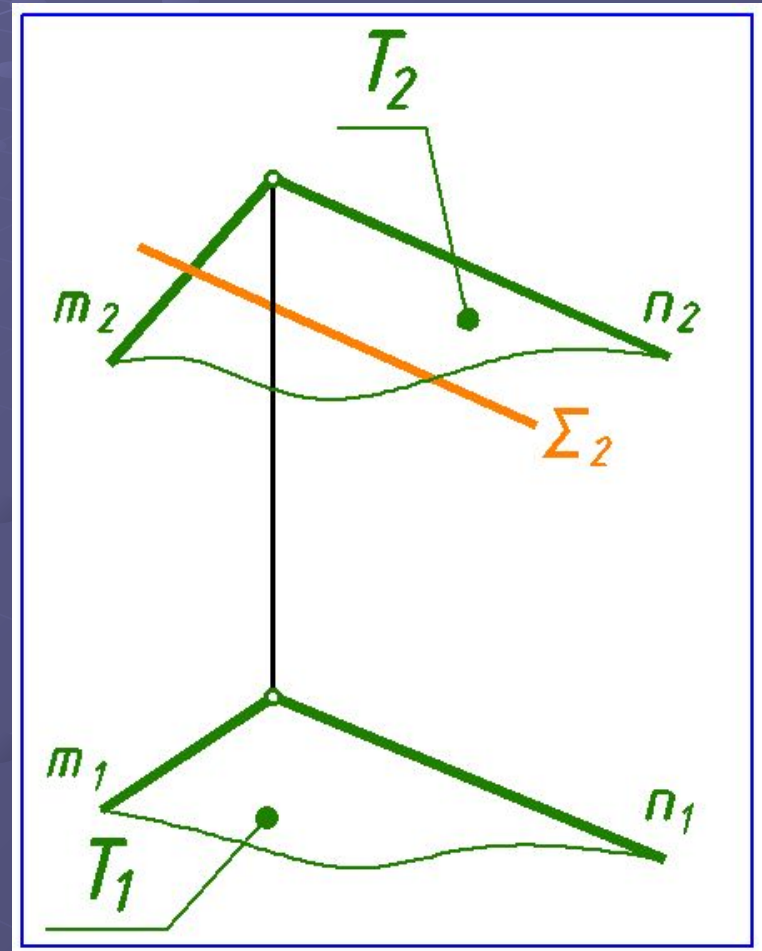
# Построение **линии пересечения** плоскости общего положения с проецирующей плоскостью

Искомая **линия k**  
пересечения  
двух плоскостей  
 $\Sigma$  и  $T$  является  
прямой,  
одновременно  
принадлежащей  
этим плоскостям.



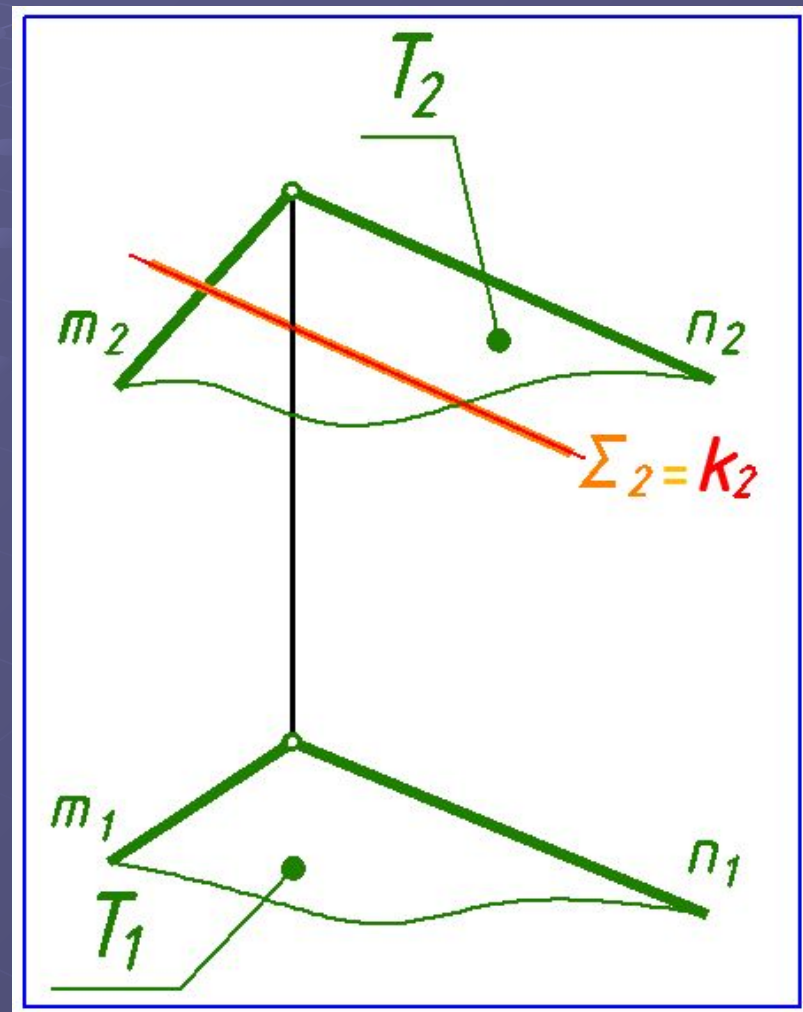
Построить **линию пересечения** плоскости  
общего положения  $T(m \cap n)$  с фронтально  
проецирующей плоскостью  $\Sigma$

Искомая **линия**  $k$   
пересечения двух  
плоскостей  $\Sigma$  и  $T$   
является прямой,  
**одновременно**  
**принадлежащей** этим  
плоскостям.



# Построение фронтальной проекции линии пересечения плоскости $T(m \cap n)$ с плоскостью $\Sigma$

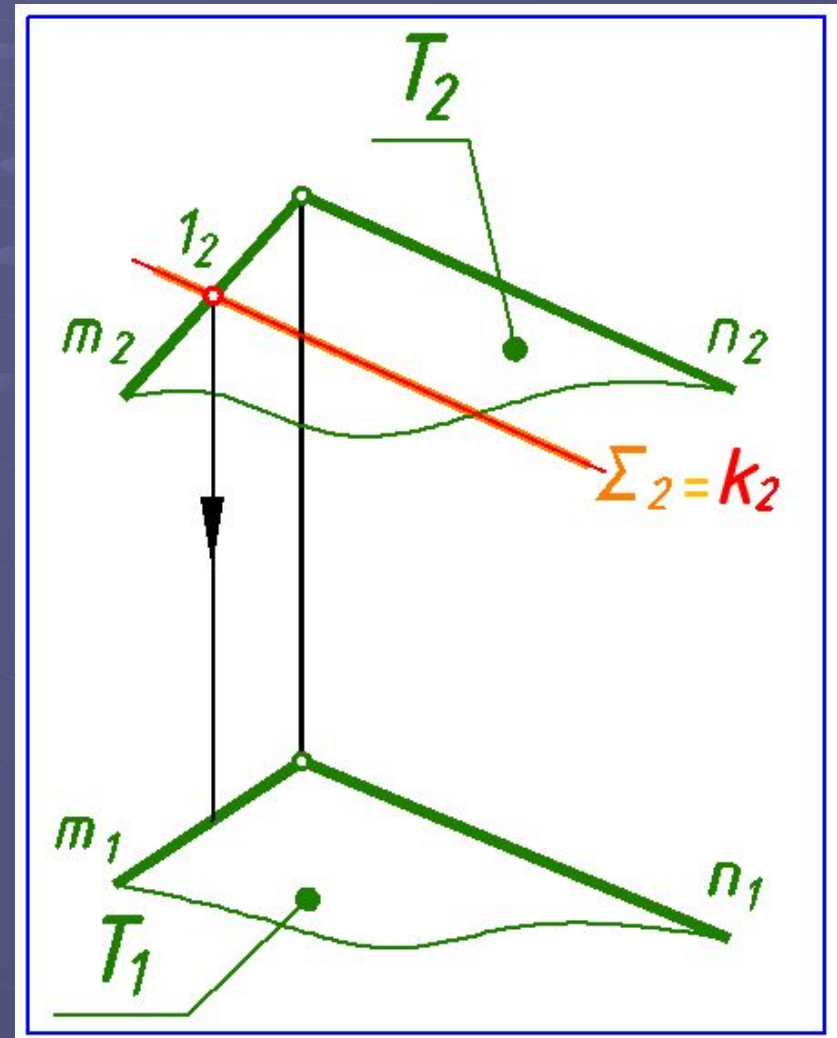
Фронтальная проекция  $k_2$  искомой линии  $k$  пересечения двух плоскостей  $\Sigma$  и  $T$  совпадает с фронтальной проекцией ( $\Sigma_2$ ) проецирующей плоскости  $\Sigma$ .





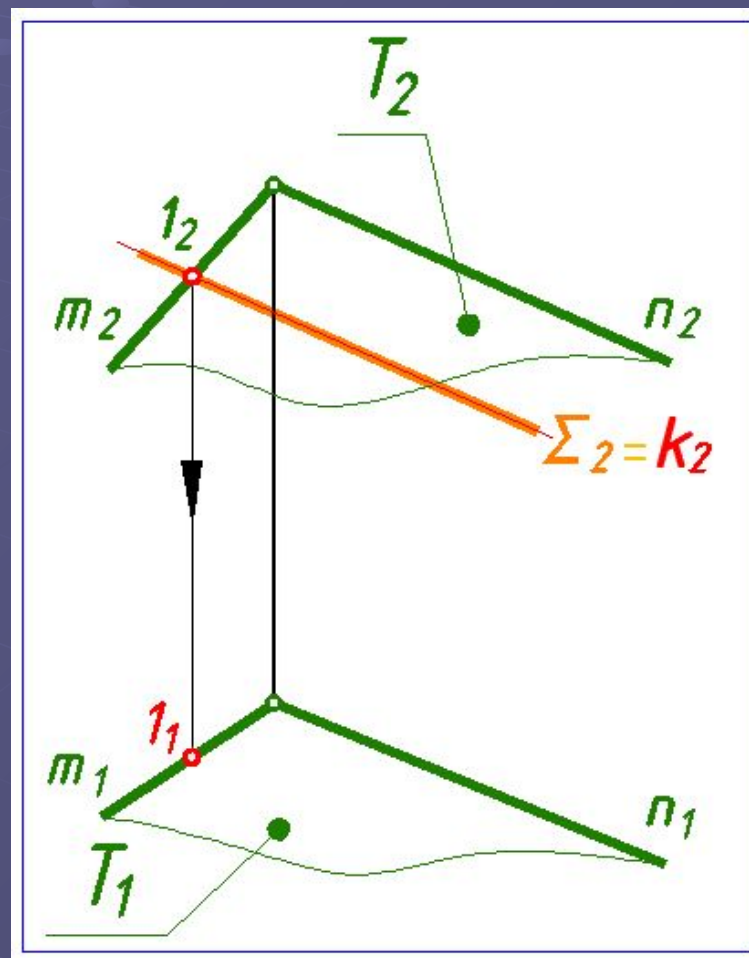
# Построение горизонтальной проекции линии пересечения плоскости $T(m \cap n)$ с плоскостью $\Sigma$

Искомая линия  $k$   
пересечения двух  
плоскостей  $\Sigma$  и  $T$   
принадлежит плоскости  $T$ ,  
так как имеет с ней общую  
точку  $1$  и параллельна  
прямой  $n$ , принадлежащей  
плоскости  $T$ .



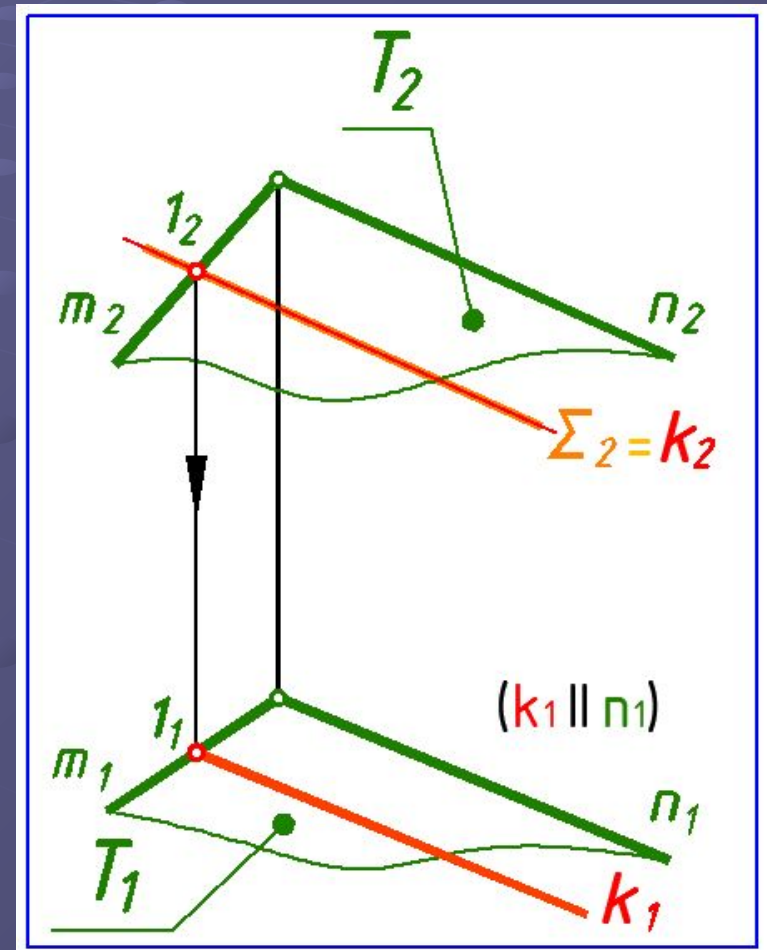
Построение **горизонтальной проекции**  
**линии пересечения** плоскости  $T(m \cap n)$  с  
плоскостью  $\Sigma$

По **линии связи** по  
принадлежности к прямой  $m$   
плоскости  $T$ ,  
определим горизонтальную  
проекцию  $(1_1)$  точки  $1$ .

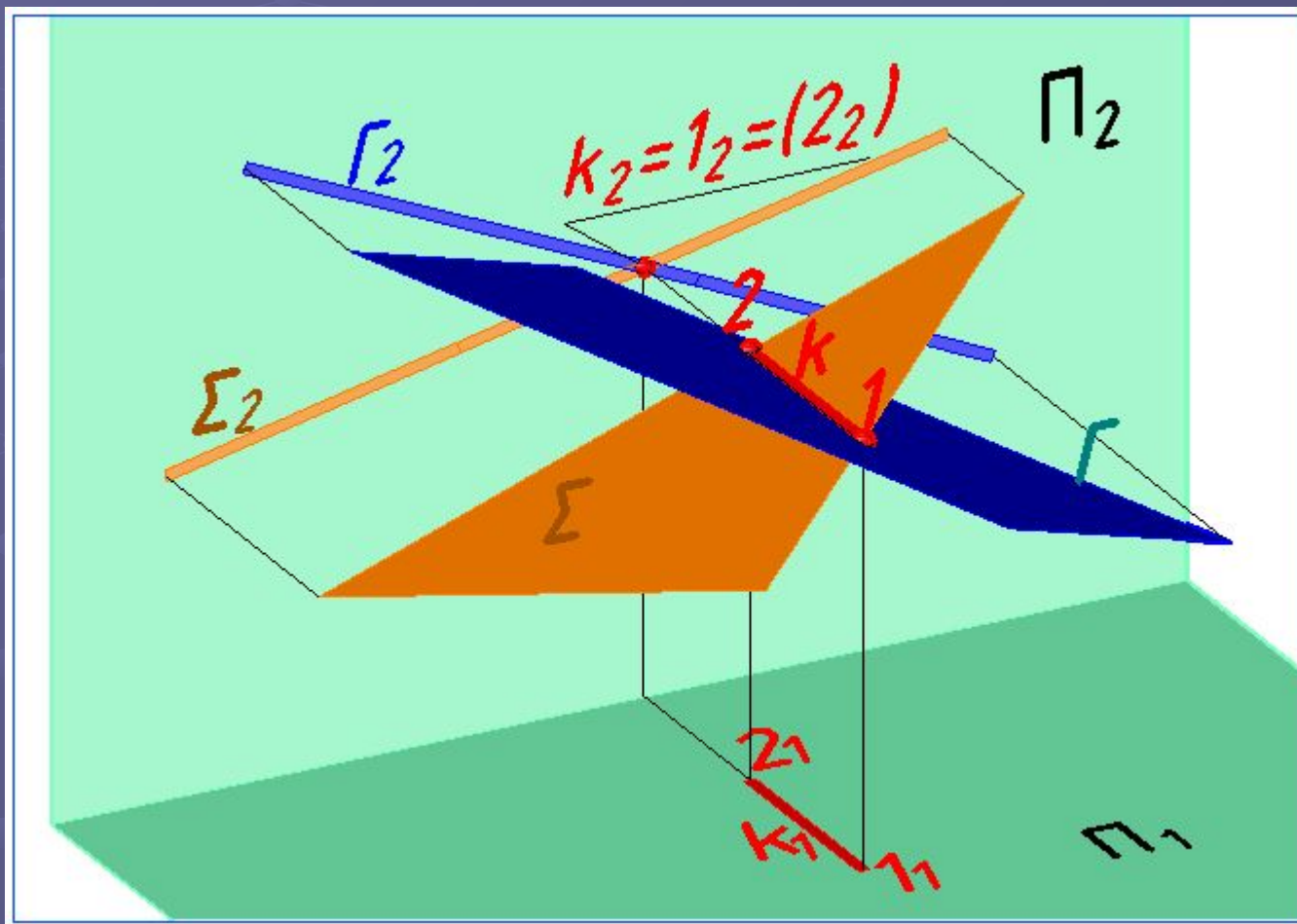


# Построение горизонтальной проекции линии пересечения плоскости $T(m \cap n)$ с плоскостью $\Sigma$

- Горизонтальную проекцию  $k_1$  искомой прямой  $k$  проведём из  $1_1$  параллельно горизонтальной проекции  $n_1$ .
- У параллельных прямых одноимённые проекции параллельны.



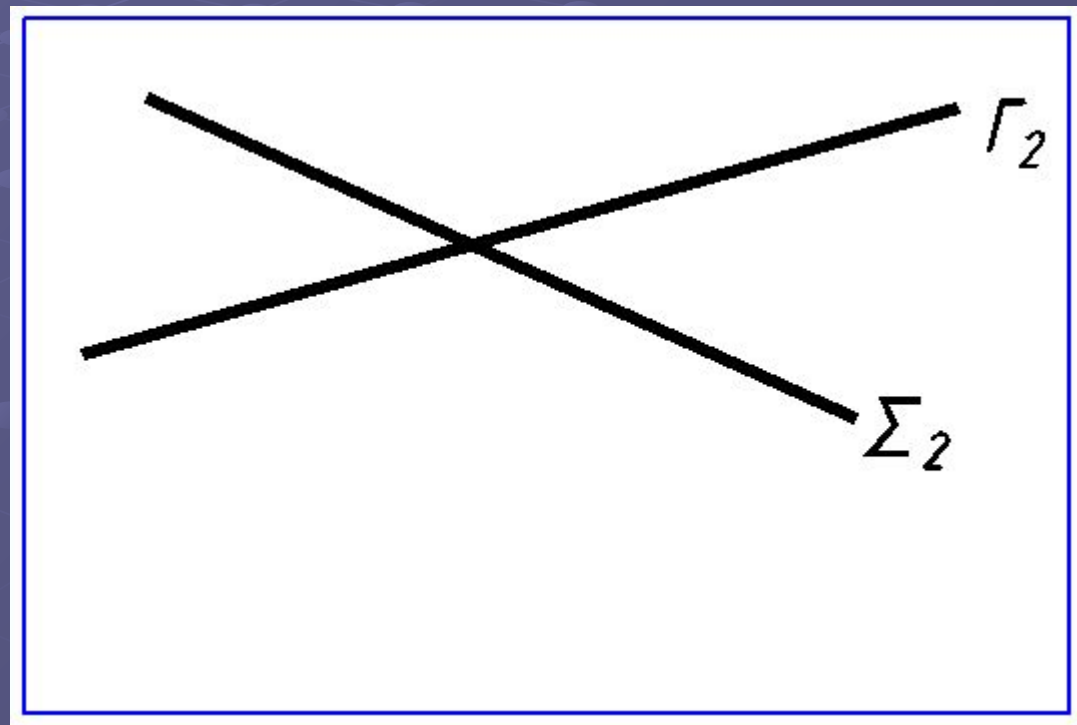
# Построение линии пересечения фронтально проецирующих плоскостей



Линия  $k$  пересечения фронтально проецирующих плоскостей  $\Sigma$  и  $\Gamma$  - фронтально проецирующая прямая.

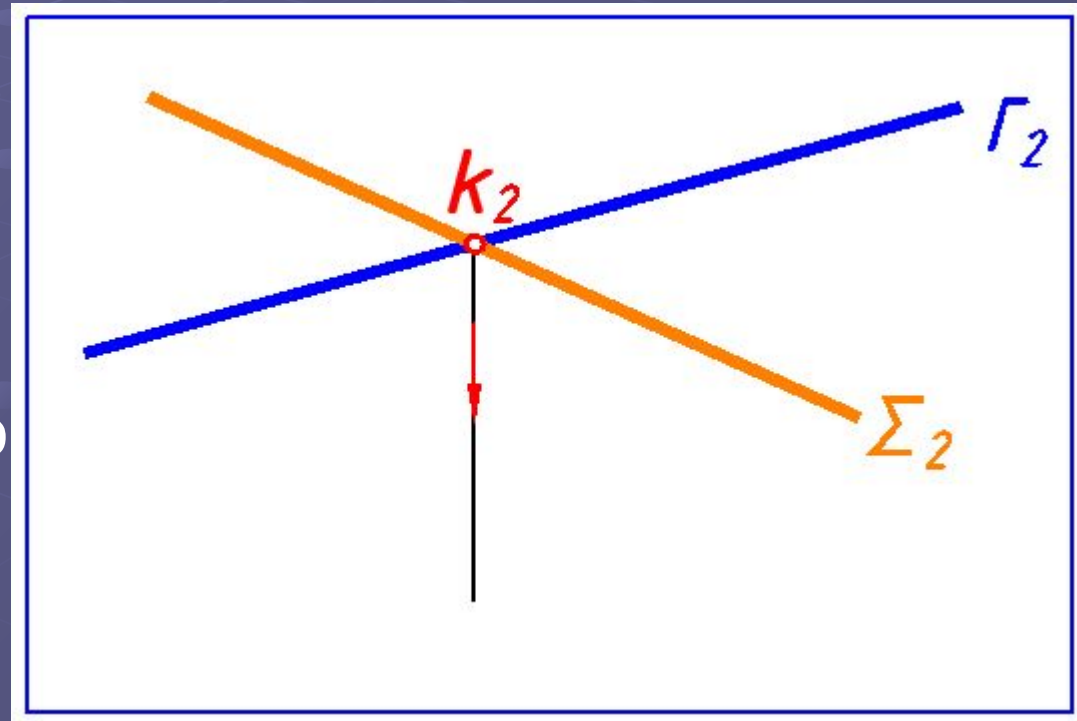
Построить линию  $k$  пересечения фронтально проецирующих плоскостей  $\Sigma$  и  $\Gamma$ .

Заданные плоскости пересекаются по линии  $k$  ( $k_2, k_1$ ), одновременно принадлежащей плоскостям  $\Sigma$  и  $\Gamma$ .

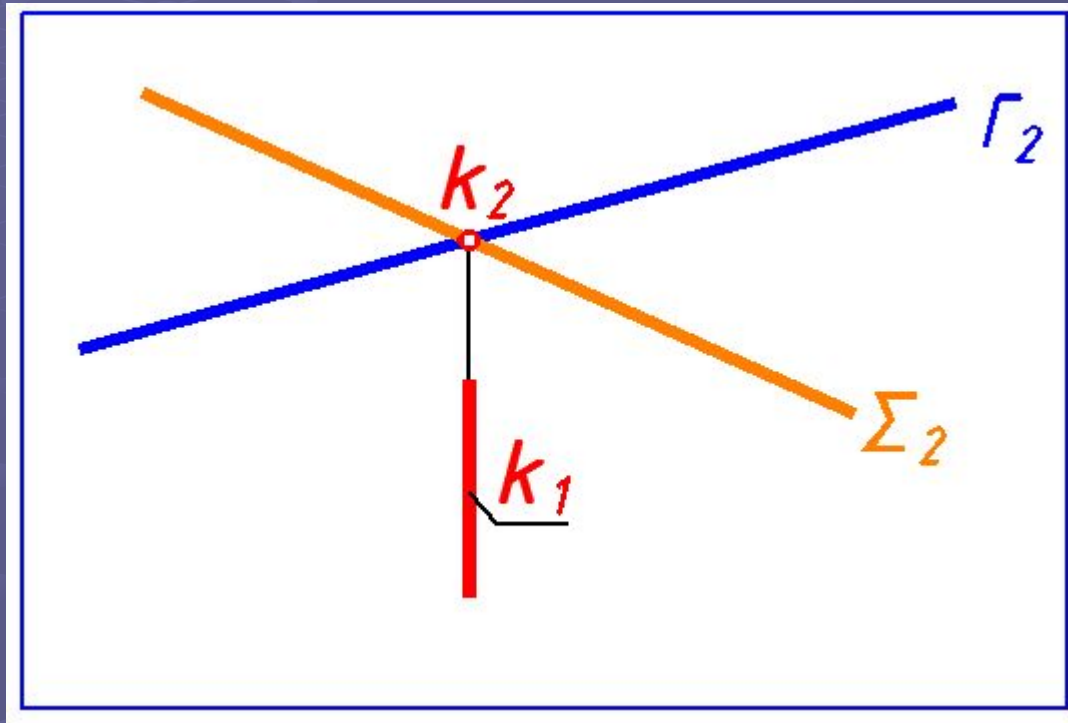


# Построение фронтальной проекции линии пересечения плоскостей $\Sigma$ и $\Gamma$ .

- Фиксируем фронтальную проекцию  $k_2$  искомой линии  $k$  на пересечении фронтальных проекций  $\Sigma_2$  и  $\Gamma_2$  заданных плоскостей.
- Проведём вертикальную линию связи для построения горизонтальной проекции  $k_1$  искомой линии пересечения.



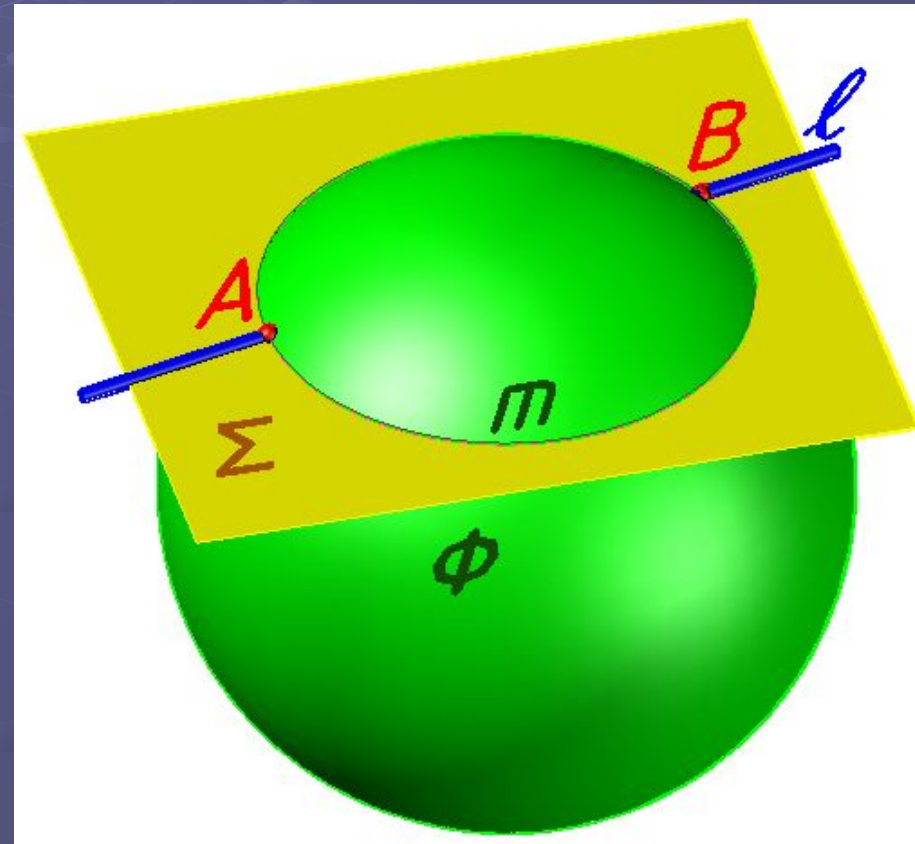
# Построение горизонтальной проекции линии пересечения плоскостей $\Sigma$ и $\Gamma$ .



Линия  $k(k_2, k_1)$  пересечения фронтально проецирующих плоскостей  $\Sigma$  и  $\Gamma$  - фронтально проецирующая прямая. Её горизонтальная проекция  $k_1$  по направлению совпадает с вертикальной линией связи.

# Первая позиционная задача: определение точек пересечения линии и поверхности

- В зависимости от вида и взаимного расположения линии и поверхности, **точек** их пересечения может быть **одна** или **несколько**.
- Прямая линия с алгебраической поверхностью  **$n$ -го порядка** пересекается в  **$n$  точках**.
- В основу построения общих точек положен **способ вспомогательных поверхностей**.





# Сущность способа вспомогательных поверхностей

Сущность способа состоит в том, что каждая из искомых точек ( $A$ ,  $B$ ) рассматривается как результат пересечения двух линий ( $l$  и  $m$ ), принадлежащих вспомогательной поверхности ( $\Sigma$ ).

Одна из них является заданной линией ( $l$ ), а вторая - линией пересечения ( $m$ ) вспомогательной ( $\Sigma$ ) и заданной ( $\Phi$ ) поверхностей.

# Схема решения задач на определение общих точек линии и поверхности

1. Через данную линию  $\ell$  проводим вспомогательную поверхность  $\Sigma$ .

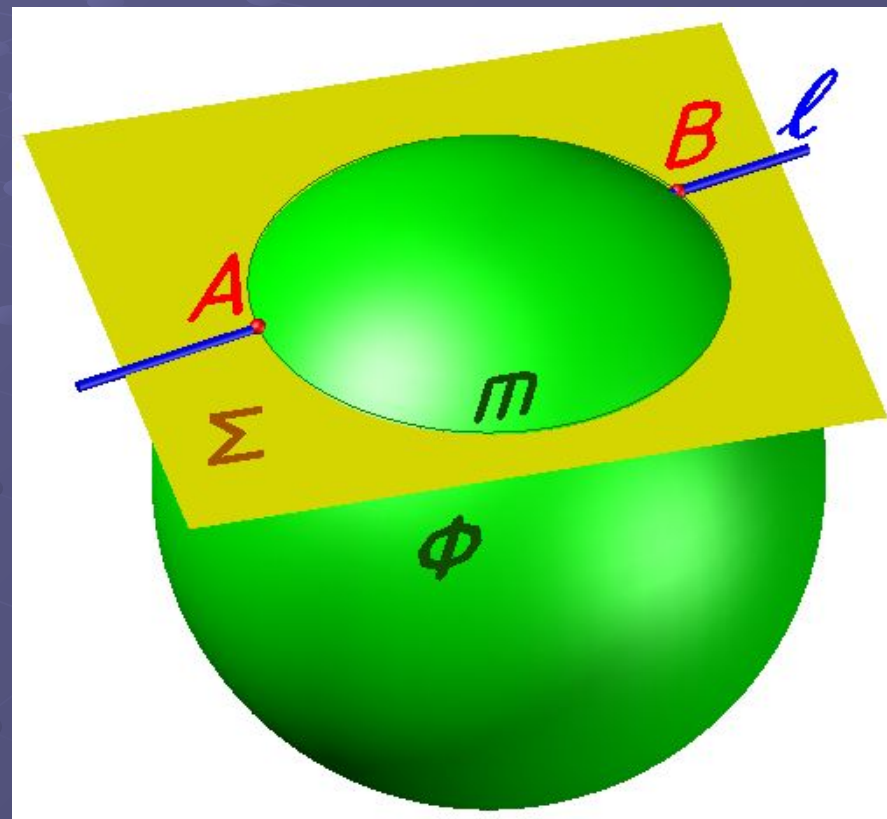
$$\Sigma \supset \ell$$

2. Определяем линию  $m$  пересечения вспомогательной  $\Sigma$  и заданной  $\Phi$  поверхностей.

$$m = \Sigma \cap \Phi$$

3. Отмечаем точки  $A, B$ , пересечения линий  $\ell$  и  $m$ , которые являются искомыми.

$$m \cap \ell = A, B$$



# Алгоритм

- Для конкретной задачи на основании общей схемы составляется алгоритм ее решения. **Алгоритмом называется совокупность однозначных последовательных операций, которые необходимо выполнить для решения данной задачи.**
- Схема преобразуется в алгоритм, если конкретизировать первый пункт, т. е. **точно указать вид и положение вспомогательной поверхности,** которая выбирается для определения точек пересечения заданных линии и поверхности.
- В качестве вспомогательных поверхностей наиболее часто применяют плоскости частного положения.

# Первая позиционная задача

- определение точки пересечения линии  
и плоскости

Алгоритм:

1. Через прямую  $\ell$   
проводим фронтально  
проецирующую  
плоскость  $\Sigma$

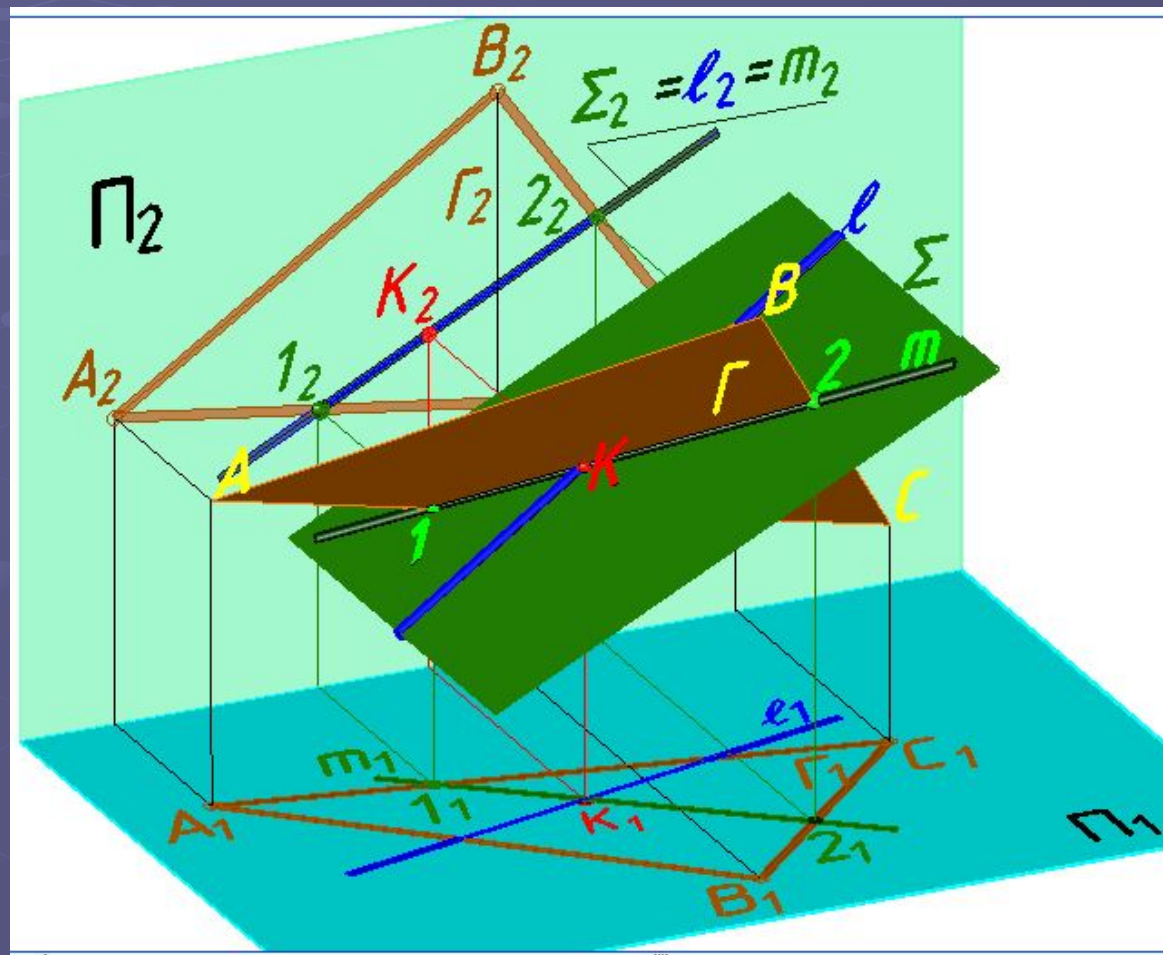
$$\ell \subset \Sigma \perp \Pi_2$$

2. Определяем прямую  
 $m(1,2)$  пересечения  
плоскостей  $\Gamma$  и  $\Sigma$ ;

$$\Sigma \cap \Gamma = m(1,2)$$

3. Отмечаем точку  $K$   
пересечения прямых  
 $m(1,2)$  и  $\ell$ , которая  
является искомой

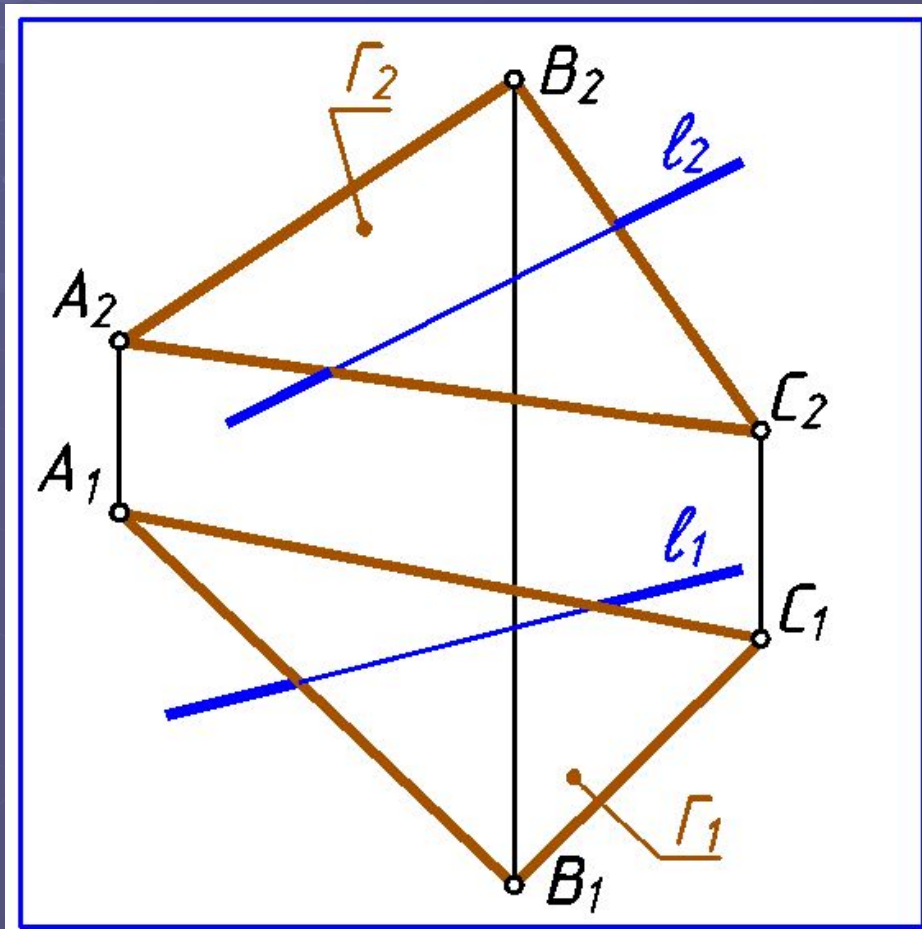
$$m(1,2) \cap \ell = K$$



# Определение точки пересечения линии и плоскости

## Задача

- Построить точку  $K$  пересечения прямой  $\ell$  плоскостью  $\Gamma(ABC)$ .
- Определить видимость проекций прямой.
- Записать алгоритм.

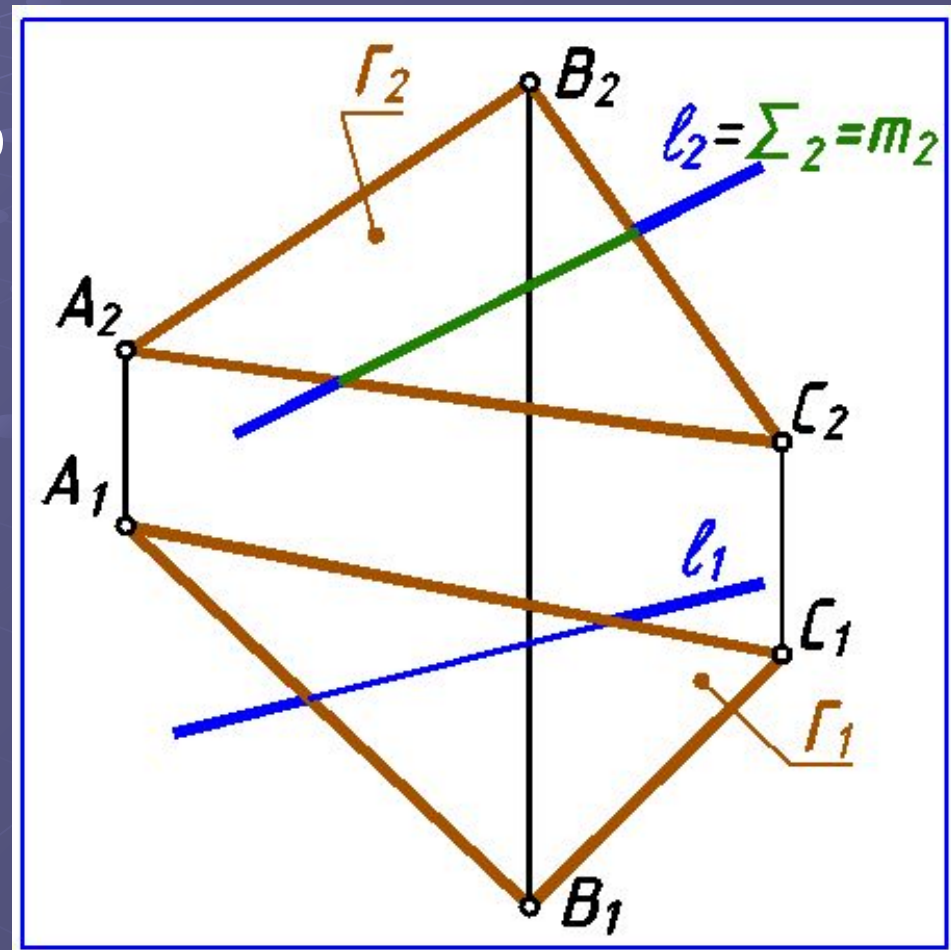


# Введение вспомогательной проецирующей плоскости $\Sigma(\Sigma_2)$

Через прямую  $\ell$  проводим фронтально проецирующую плоскость  $\Sigma$

$$\ell \subset \Sigma \perp P_2$$

Проецирующая плоскость  $\Sigma$  содержит проекцию  $m_2$  линии пересечения с плоскостью  $\Gamma(\Gamma_2, \Gamma_1)$ .

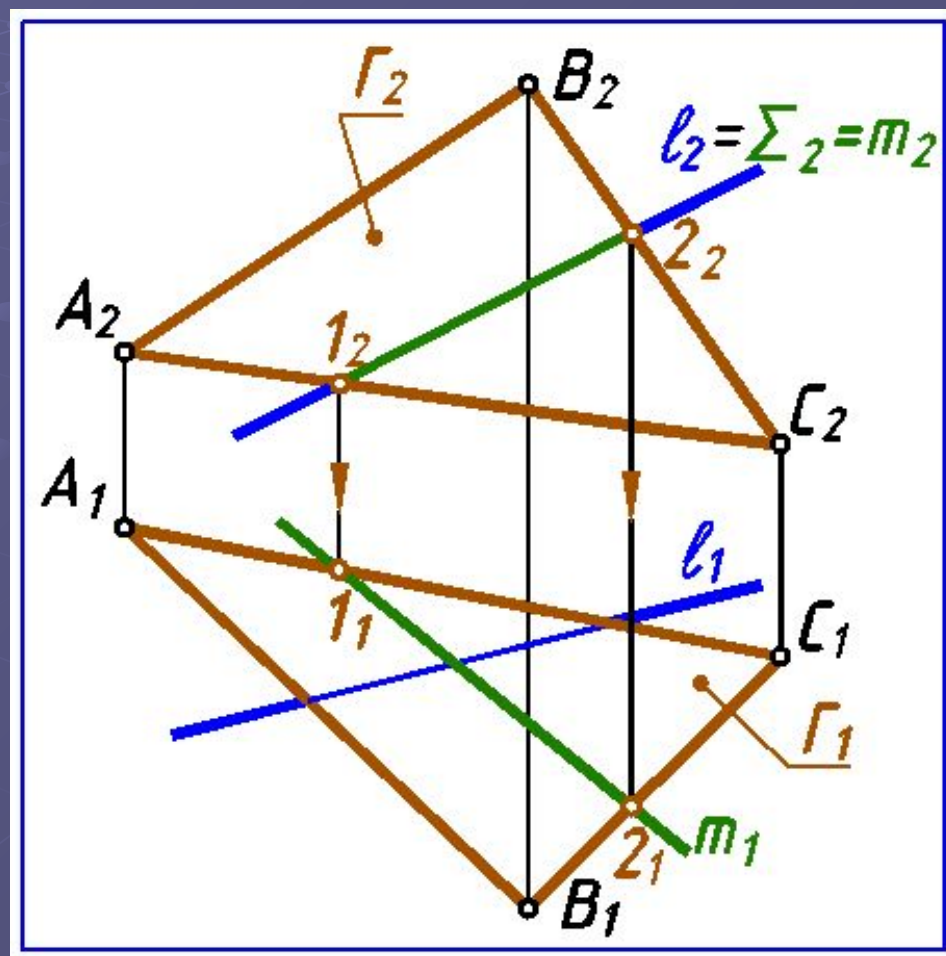


# Построение горизонтальной проекции ( $m_1$ ) линии пересечения плоскостей $\Sigma$ и $\Gamma$

По линиям связи по принадлежности к  $[AC]$  и  $[BC]$  находим горизонтальные проекции  $1_1$  и  $2_1$  точек линии ( $m$ ) пересечения плоскостей  $\Sigma$  и  $\Gamma$ .

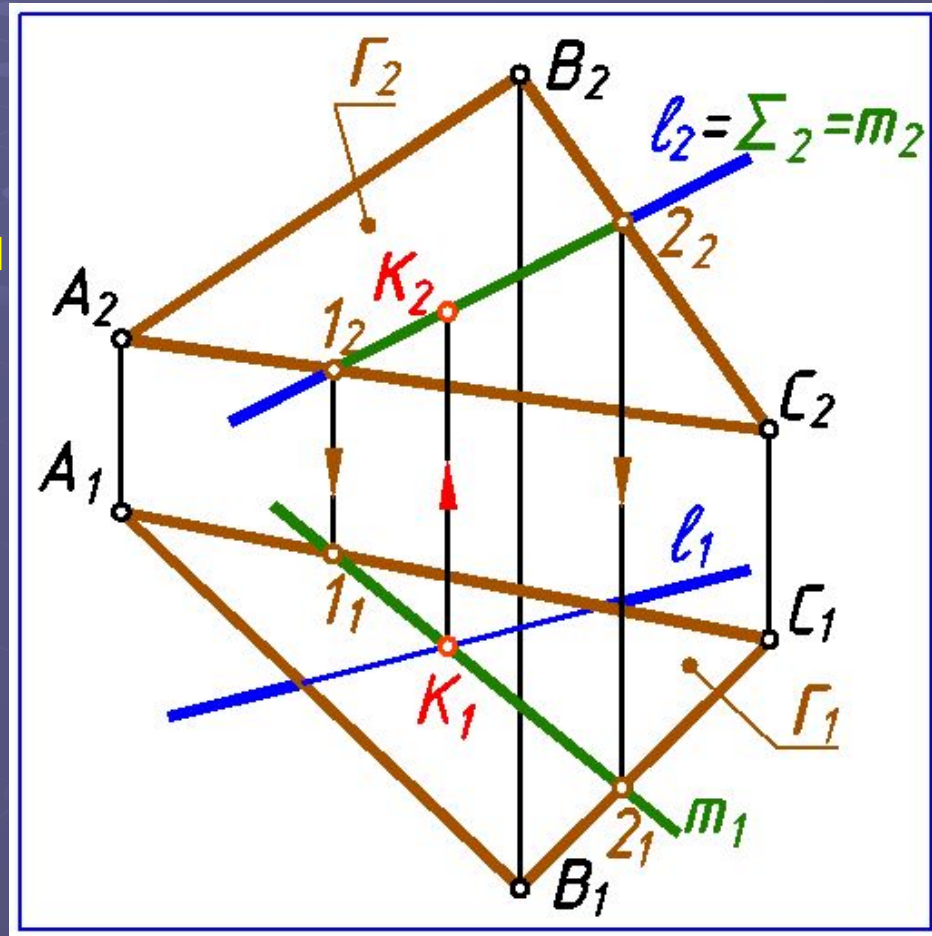
Через найденные точки проводим горизонтальную проекцию ( $m_1$ ) линии  $m$  пересечения плоскостей  $\Sigma$  и  $\Gamma$ .

$$\Sigma \cap \Gamma = m(1,2)$$



# Построение точки $K$ пересечения прямой $\ell$ плоскостью $\Gamma(ABC)$ .

Горизонтальную проекцию ( $K_1$ ) точки  $K$  пересечения прямой  $\ell$  плоскостью  $\Gamma(ABC)$  фиксируем в пересечении горизонтальных проекций ( $m_1$ ) и ( $\ell_1$ ) линий  $m$  и  $\ell$ .  
 Фронтальную проекцию ( $K_2$ ) точки  $K$  определим по линии связи по принадлежности прямой  $\ell$ . ( $K_2 \in \ell_2$ )  
 $K = m(1,2) \cap \ell$





# Определение **видимости** проекций прямой линии $\ell$

Считаем плоскость непрозрачной.  
Плоскость **закрывает** часть линии,  
находящуюся за ней.

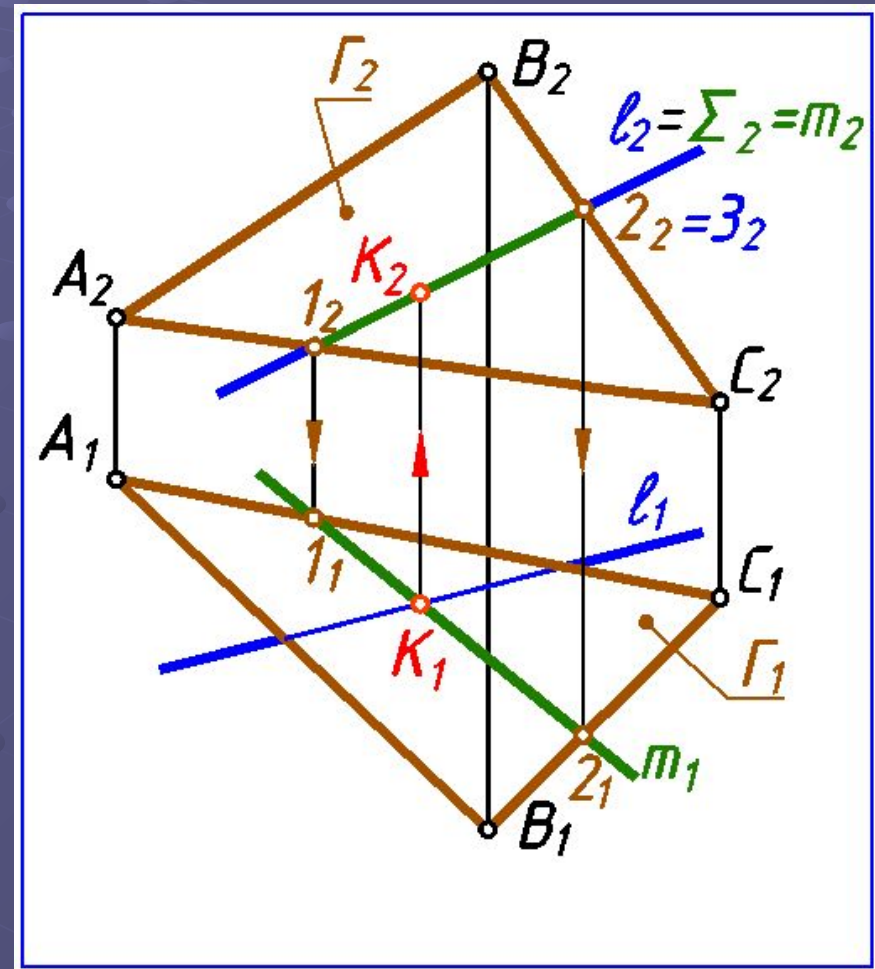
В точке пересечения **К** видимость  
меняется на противоположную.

Видимость определяется **отдельно**  
для каждой плоскости проекций.

Для определения видимости  $\ell_2$   
прямой  $\ell$  на  $\Pi_2$ , выделяем  
**фронтально конкурирующие точки**  
**2** и **3**.

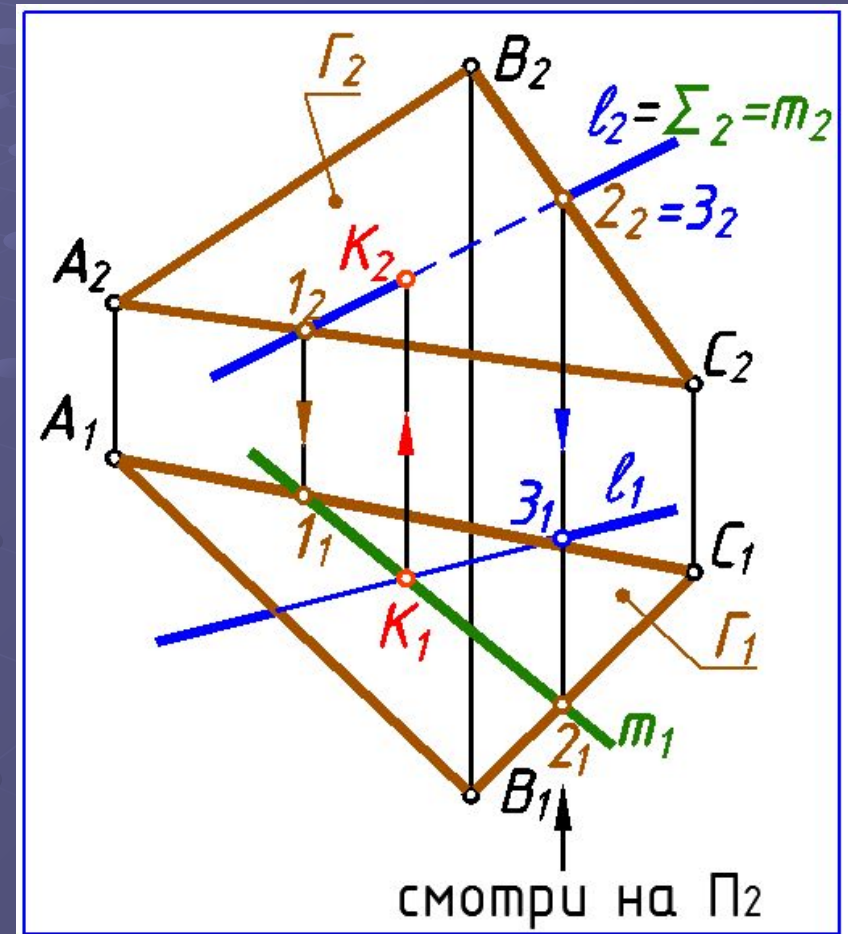
Точка **2** принадлежит плоскости  $\Gamma$ .

Точка **3** принадлежит прямой  $\ell$ .



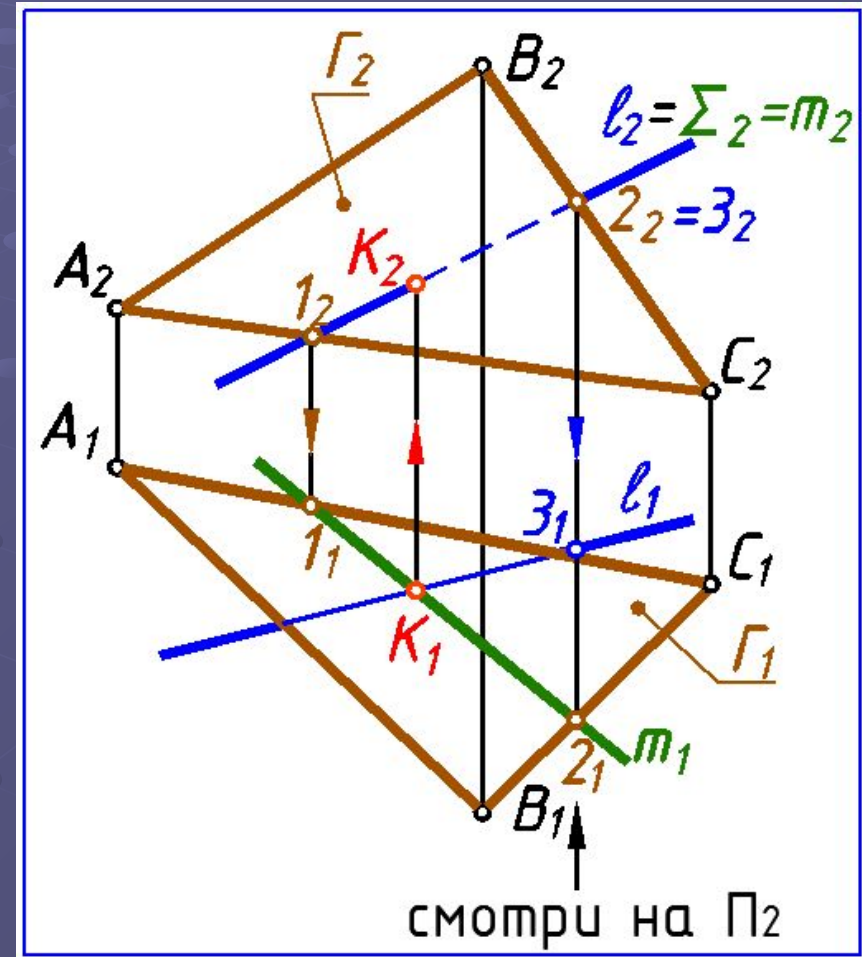
# Определение **видимости** проекций прямой линии $\ell$ на $\Pi_2$

По линии связи по  
принадлежности  $\ell_1$   
**находим** горизонтальную  
проекцию  $3_1$   
конкурирующих точек  $2$  и  $3$ .



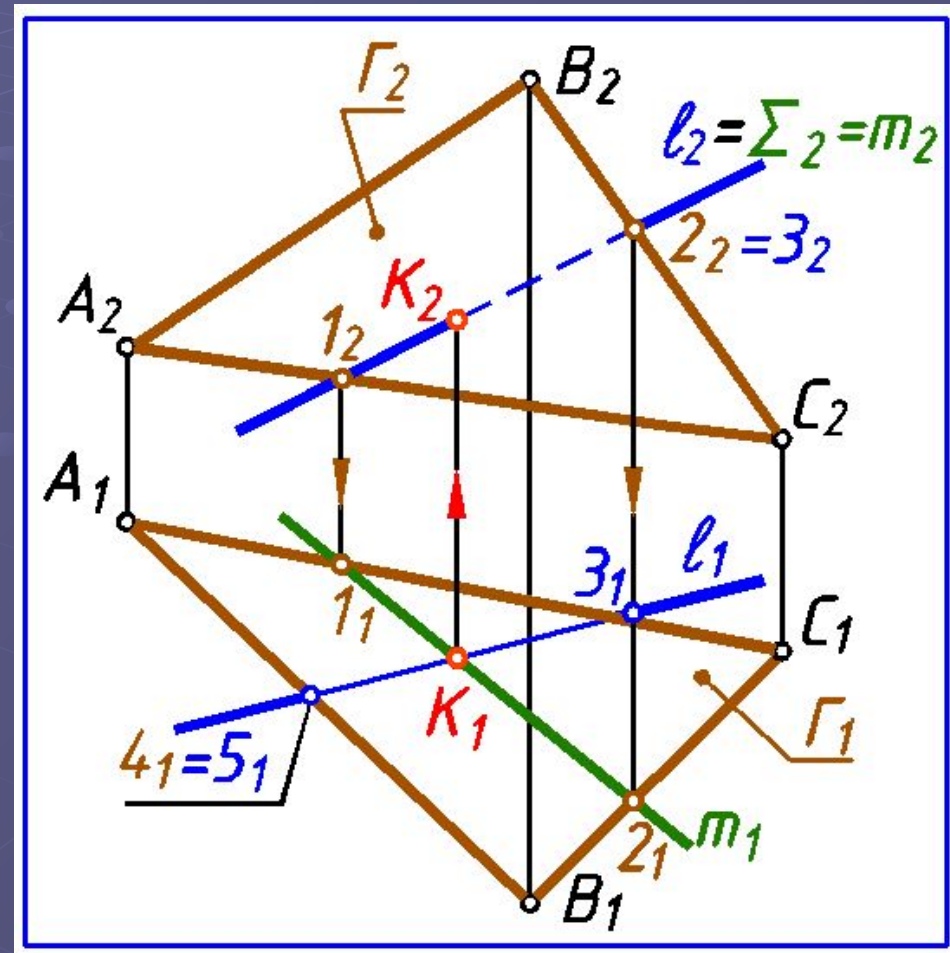
# Определение **видимости** проекций прямой линии $\ell$ на $\Pi_2$

Точка **2**, принадлежащая  $[BC]$  плоскости  $\Gamma$ , **ближе к наблюдателю**, чем точка **3** прямой  $\ell$ . Следовательно, на  $\Pi_2$  участок линии  $\ell$  от точки **3** до точки пересечения **K** **невидимый** – вычерчиваем штриховой линией (штриховая – линия **невидимого контура**). После точки **K** линия  $\ell$  видима – толстая (**основная**).



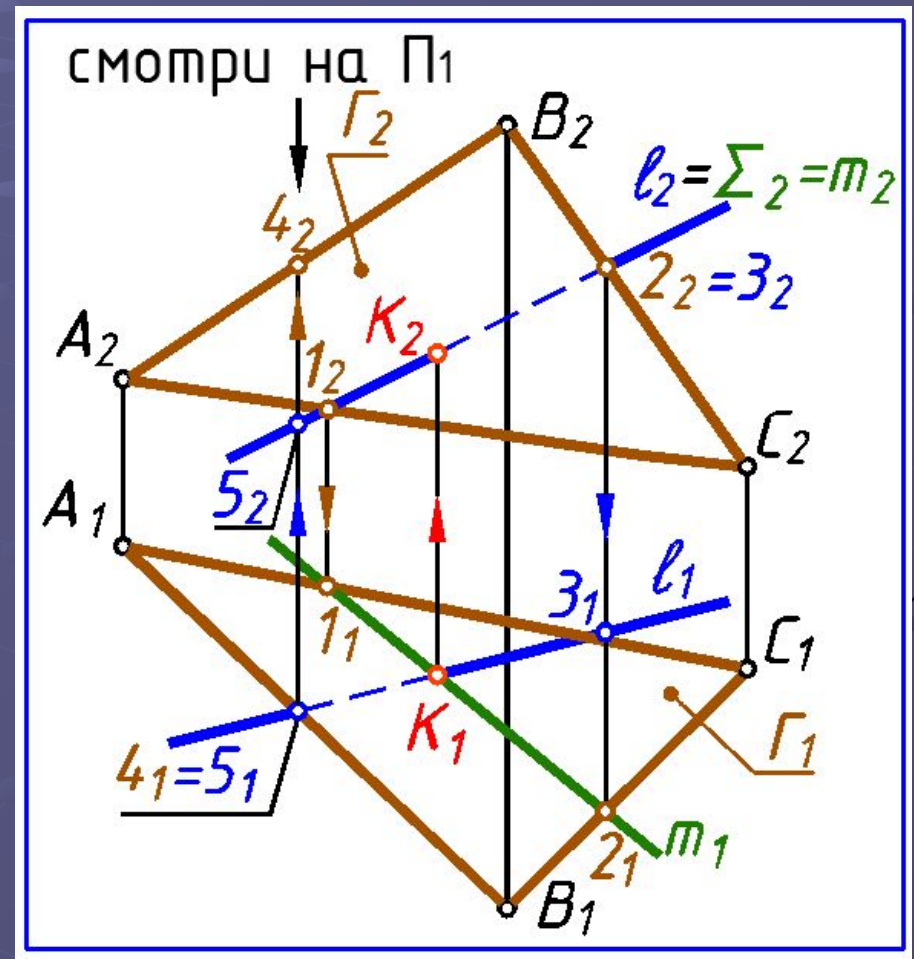
# Определение **видимости** проекций прямой $l$ на $\Pi_1$

Для определения видимости горизонтальной проекции ( $l_1$ ) прямой  $l$  на  $\Pi_1$ , **выделяем** горизонтально конкурирующие точки **4** и **5**. Точка **4** принадлежит плоскости  $\Gamma$ . Точка **5** принадлежит прямой  $l$ .



# Определение **видимости** проекций прямой линии $\ell$ на $\Pi_1$

По **линии связи** по принадлежности  $\ell_2$  находим фронтальную проекцию  $5_2$ . По принадлежности  $[AB]$  находим фронтальную проекцию  $4_2$  горизонтально конкурирующих точек  $5$  и  $4$ .



# Определение **ВИДИМОСТИ** проекций прямой линии $\ell$ на $\Pi_1$

Точка **4**, принадлежащая  
[**AB**] плоскости  $\Gamma$ , **ближе к**  
**наблюдателю (выше)**, чем  
точка **5** прямой  $\ell$ .

Следовательно, на  $\Pi_1$   
участок линии  $\ell$  от точки **5**  
до точки пересечения **К**  
**НЕВИДИМЫЙ** – вычерчиваем  
штриховой линией  
(штриховая - линия  
**невидимого контура**). После  
точки **К** линия  $\ell$  видима –  
толстая (**основная**).

