

МБОУ «Александровская средняя общеобразовательная школа»

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

**Выполнили: ученики 10а класса
Попова Полина, Андреев Янис,
Прилепин Павел, Головин Денис
Проверил: учитель математики
Кашкарова Любовь Николаевна**

Александровка 2013г.

**Правильных многогранников
вызывающе мало, но этот
весьма скромный по
численности отряд сумел
пробратся в самые
глубины различных наук.**

Л.

Кэрролл

Цель:



Повторить понятие правильного многогранника, виды и их характерные свойства. Узнать историю их появления и значение в человеческих сферах деятельности.

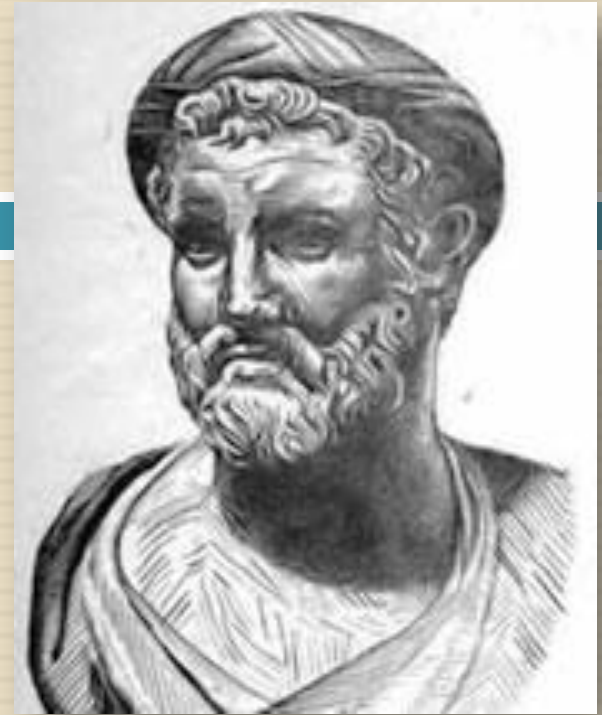
Содержание:

1. История многогранников
2. Многогранники в нашей жизни
 - а) в природе
 - б) в архитектуре
 - в) в искусстве
3. Понятие правильного многогранника
4. Виды правильных многогранников
5. Теорема Эйлера
6. Элементы симметрии

История многогранников...

Правильные многогранники известны с древнейших времён. Их орнаментные модели можно найти на резных каменных шарах, созданных в период позднего неолита, на костях, которыми люди играли на заре цивилизации. В значительной мере правильные многогранники были изучены древними греками. Теэтет дал математическое описание всем пяти правильным многогранникам и первое известное доказательство того, что их ровно пять.

Начиная с 7 века до нашей эры в Древней Греции создаются философские школы. Одной из школ была Пифагорейская, названная в честь своего основателя Пифагора. Отличительным знаком пифагорейцев была пентаграмма, на языке математики - это правильный невыпуклый или звездчатый пятиугольник. Пентаграмме присваивалась способность защищать человека от злых духов.



Пифагорейцы полагали, что материя состоит из четырех основных элементов: огня, земли, воздуха и воды. Существование пяти правильных многогранников они относили к строению материи Вселенной. Согласно этому мнению, атомы основных элементов имеют форму различных правильных многогранников.

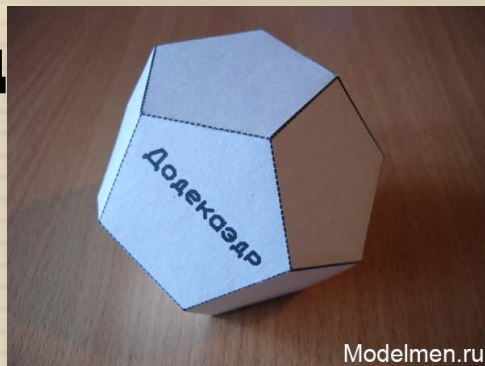
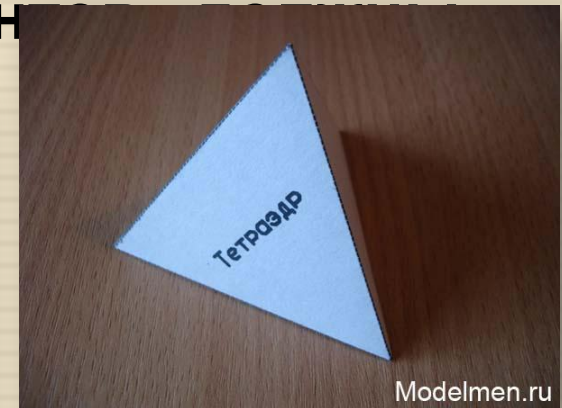
Вселенная - додекаэдр

Земля - куб

Огонь - тетраэдр

Вода - икосаэдр

Воздух - октаэдр



В XVI веке немецкий астроном Иоганн Кеплер пытался найти связь между пятью известными на тот момент планетами Солнечной системы и правильными многогранниками. Кеплер изложил свою модель Солнечной системы. В ней пять правильных многогранников помещались один в другой и разделялись серией вписанных и описанных сфер. Каждая из шести сфер соответствовала одной из планет (Меркурию, Венере, Земле, Марсу, Юпитеру и Сатурну). Многогранники были расположены в следующем порядке : октаэдр, икосаэдр, додекаэдр, тетраэдр , куб. Результатом его поисков стало открытие двух законов орбитальной динамики — законов Кеплера, — изменивших курс физики и астрономии, а также правильных звёздчатых многогранников .



**Иоганн Кеплер
(1571-1630гг.)**



Многогранники в природе...

Почему пчелы «выбрали» для ячеек на сотах форму правильного шестиугольника?

- ◆ Из правильных многоугольников с одинаковой площадью наименьший периметр у правильных шестиугольников.
- ◆ При такой «математической» работе пчелы экономят 2% воска. Количество воска сэкономленного при постройке 54 ячеек, может быть использовано для постройки одной такой же ячейки. Стало быть, мудрые пчелы экономят воск и время для постройки сот.
- ◆ Верхняя часть пчелиной ячейки представляет собой часть ромбододекаэдра, площадь поверхности которого меньше площади поверхности правильной шестиугольной призмы.

И как не согласиться с мнением пчелы из сказки «Тысяча и одна ночь»:

«Мой дом построен по законам самой строгой архитектуры. Сам Евклид мог бы поучиться, познавая геометрию моих сот».



Правильные многогранники – самые выгодные фигуры, поэтому они широко распространены в природе. Подтверждением тому служит форма некоторых кристаллов. Мир кристаллов не менее красивый, разнообразный, зачастую не менее загадочный, чем мир живой



**Сернистый
колчедан**



**Поваренная
соль**



алмаз

Многогранники в архитектуре...

«Галикарнасский мавзолей»

Лучшие архитекторы построили мавзолей в виде почти квадратного здания, первый этаж которого был усыпальницей. Снаружи эта громадная погребальная камера, площадью 5000 кв. метров и высотой около 20 метров, была обложена отесанными и отполированными плитами белого мрамора. Во втором этаже, окруженном колоннадой, хранились жертвоприношения, крышей же мавзолея служила пирамида.



«Мечеть Кул-Шариф»

Одна из главных мусульманских мечетей республики Татарстан и Казани. Расположена на территории Казанского кремля. Архитектура этой мечети представляет собой сочетание различных многогранников.



Многогранники в искусстве...

**Знаменитый художник,
увлекавшийся
геометрией,
Альбрехт Дюрер
(1471- 1528),
в известной гравюре
«Меланхолия»
на переднем плане
изобразил додекаэдр.**



**Голландский художник
Мориц Корнилис Эшер**

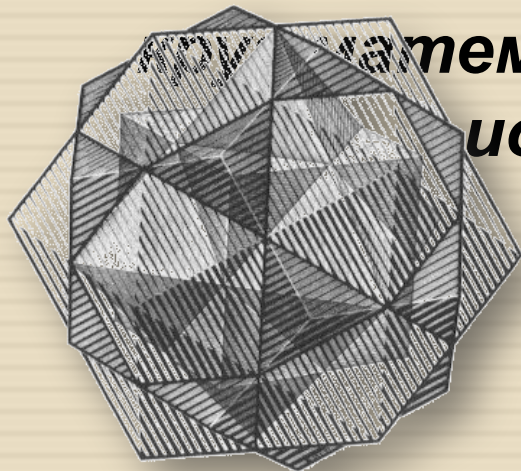
(1898-1972) создал

уникальные

**и очаровательные
работы,**

**в которых использованы
или показаны широкий**

**тематический
идей.**



**гравюра "Четыре
тела"**



**"Порядок и
хаос"**



Понятие правильного многогранника...

Многогранник называется **правильным**, если все его грани – равные правильные многоугольники и в каждой его вершине сходится одно и то же число рёбер.

Обозначения:

a — длина ребра;

V — объем;

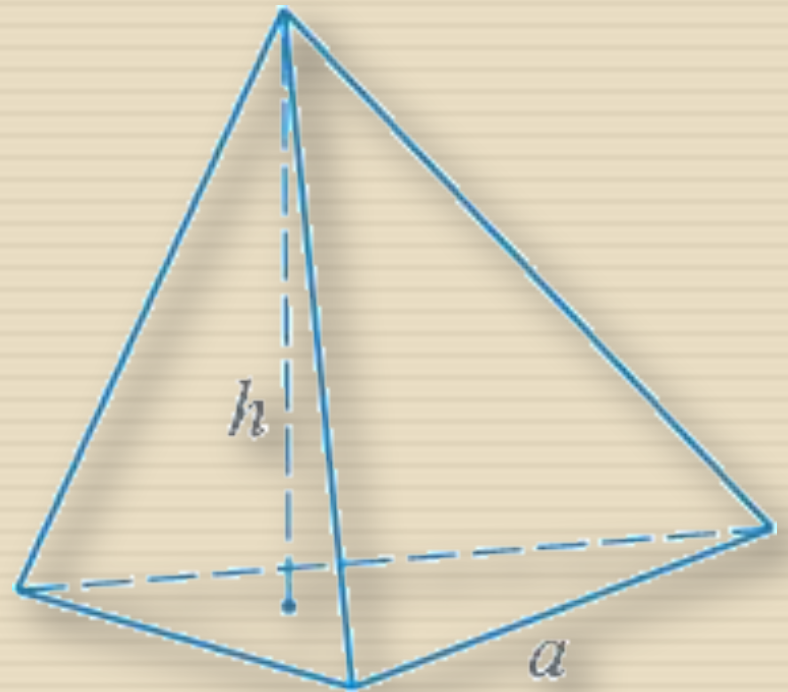
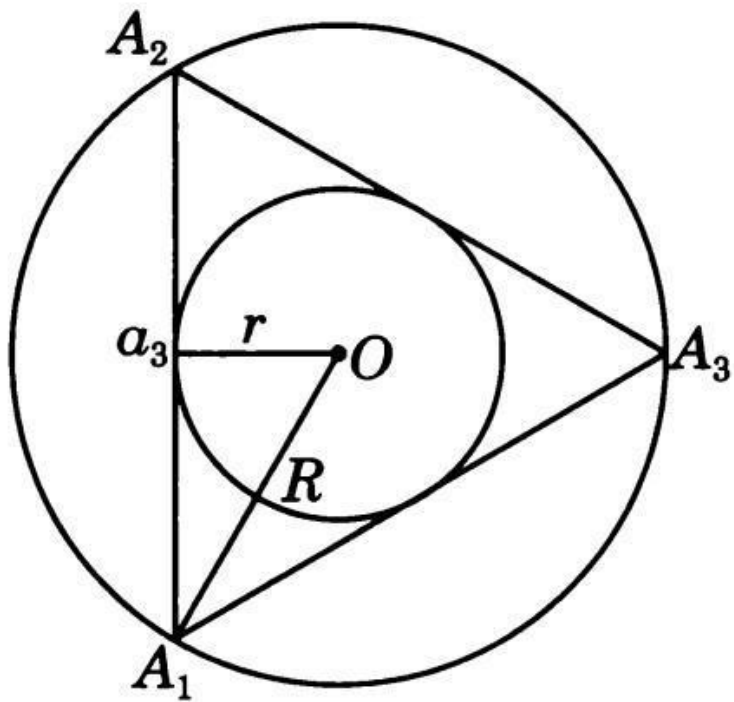
$S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности;

$S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности;

R — радиус описанной сферы;

r — радиус вписанной сферы;

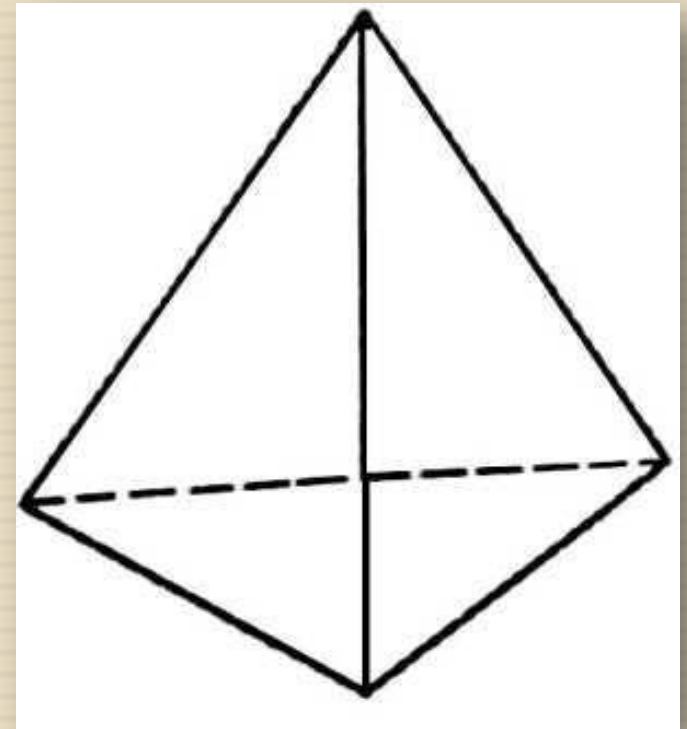
h — высота.



Правильный тетраэдр (четырёхгранник)

Тетра (греч.) – четыре
Эдрон (греч.) – грань

У правильного тетраэдра грани–правильные равносторонние треугольники; в каждой вершине сходится по три рёбра. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 180° . Тетраэдр представляет собой треугольную пирамиду, у которой все ребра равны.



$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

$$S_{\text{поверх}} = a^2 \sqrt{3}$$

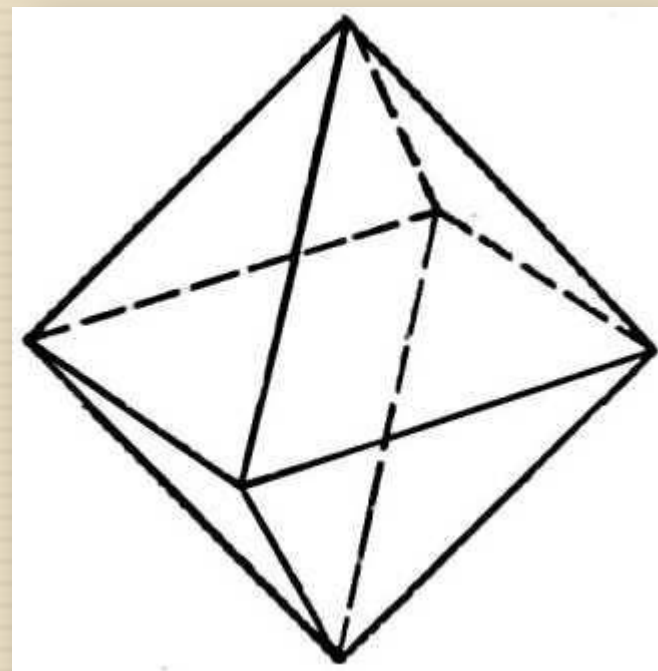
$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{3}{4}h$$

$$r = \frac{a\sqrt{6}}{12} = \frac{1}{4}h$$

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Правильный октаэдр (восьмигранник)

У октаэдра грани – правильные равносторонние треугольники, в каждой его вершине сходится по четыре ребра. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 240° .



$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$$

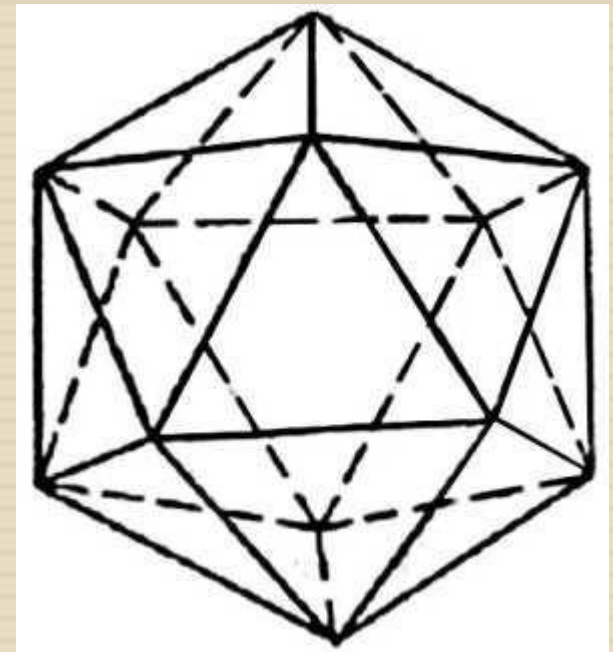
$$S_{\text{поверх}} = 2a^2 \sqrt{3}$$

$$R = \frac{a \sqrt{2}}{2}$$

$$r = \frac{a \sqrt{6}}{6}$$

Правильный икосаэдр (двадцатигранник)

У икосаэдра грани - правильные треугольники, в каждой вершине сходится по пять ребер. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 300° .



$$V = \frac{5a^3(3 + \sqrt{5})}{12}$$

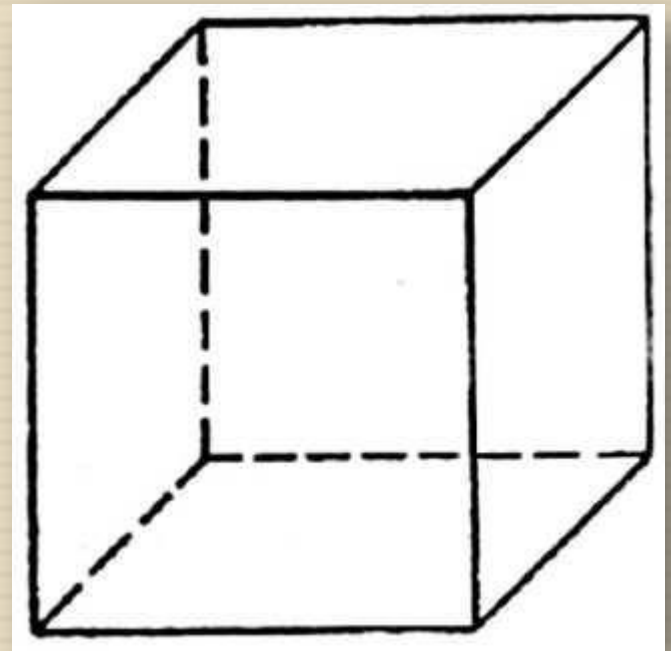
$$S_{\text{поверх}} = 5a^2\sqrt{3}$$

$$R = \frac{a\sqrt{2(5 + \sqrt{5})}}{4}$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})}{12}$$

Куб (гексаэдр, шестигранник)

У куба все грани - квадраты; в каждой вершине сходится по три ребра. Куб представляет собой прямоугольный параллелепипед с равными ребрами. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 270° .



$$V = a^3$$

$$S_{\text{поверх}} = 6a^2$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

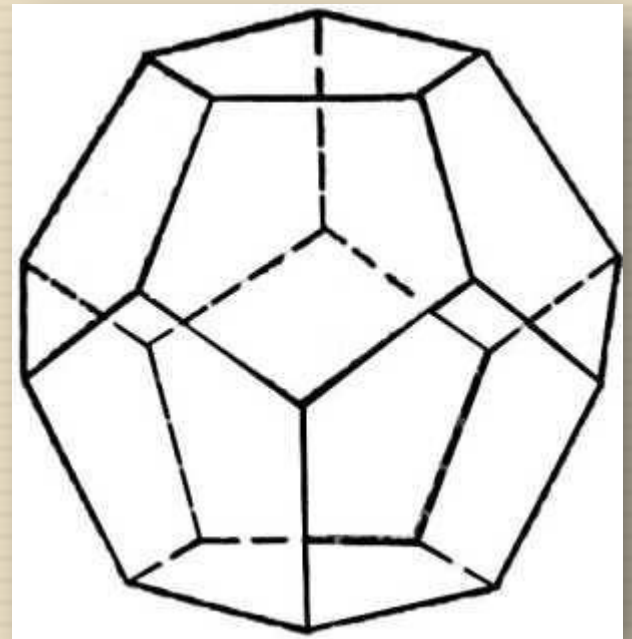
$$r = \frac{a}{2}$$

$$h = a$$

$$d^2 = 3a^2$$

Правильный додекаэдр (двенадцатигранник)

У додекаэдра грани - правильные пятиугольники. В каждой вершине сходится по три ребра. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 324° .



$$V = \frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}$$

$$S_{\text{поверх}} = 3a^2\sqrt{5}(5+2\sqrt{5})$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4}$$

$$r = \frac{a\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20}$$

Формула Эйлера

Для любого выпуклого многогранника выполняется равенство $f + e - k = 2$, где буквы e , k и f обозначают соответственно число его вершин, ребер и граней.

❖ правильный тетраэдр ($n=3$, $m=3$):

$$f=4, k=6, e=4$$

❖ правильный октаэдр ($n=3$, $m=4$)

$$f=8, k=12, e=6$$

❖ правильный икосаэдр ($n=3$, $m=5$)

$$f=20, k=30, e=12$$

❖ куб ($n=4$, $m=3$)

$$f=6, k=12, e=8$$

❖ правильный додекаэдр ($n=5$, $m=3$)

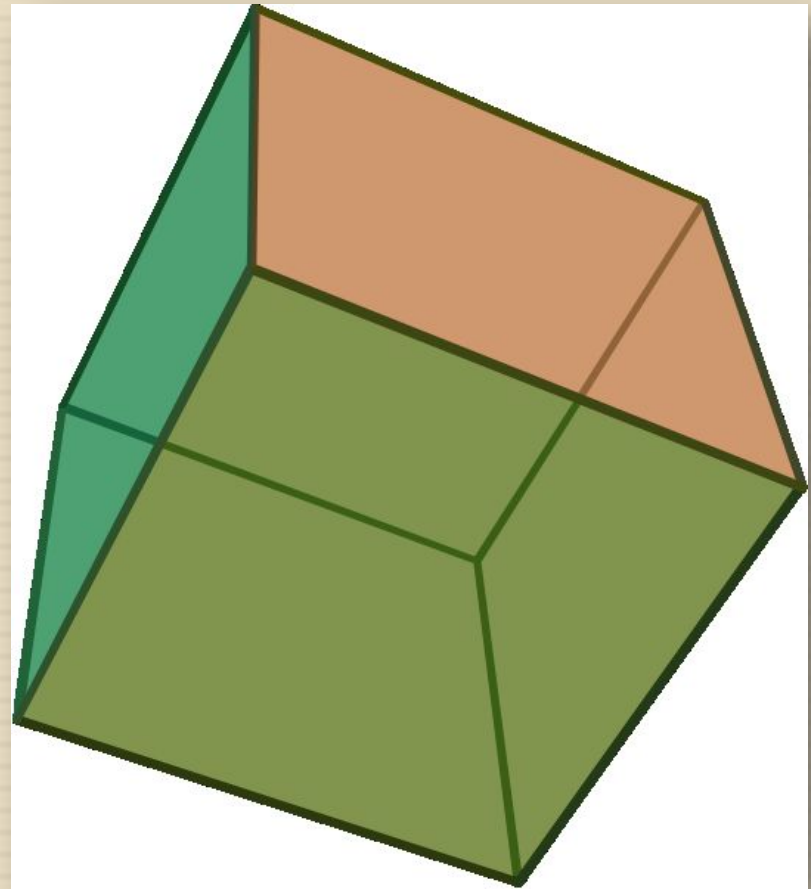
$$f=12, k=30, e=20$$

Элементы симметрии:

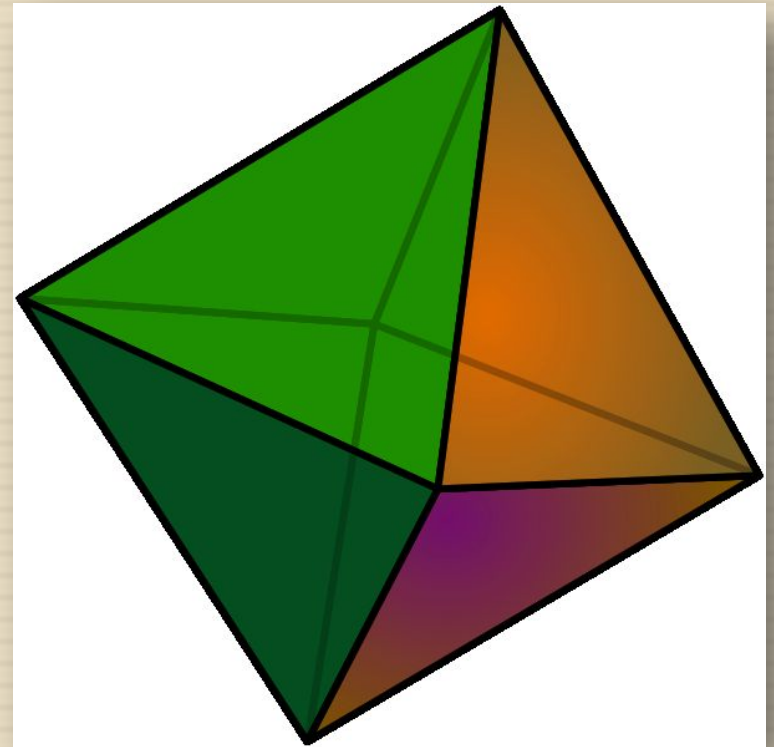
«Симметрия ... есть идея, с

*помощью
которой человек веками пытался
объяснить и создать порядок,
красоту и
совершенство».* *Герман
Вейль*

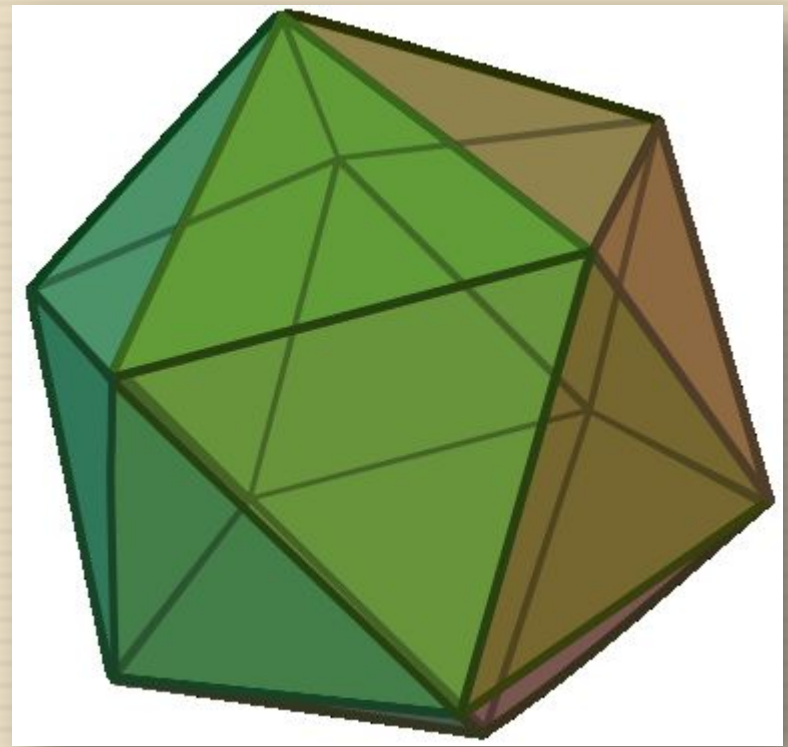
Куб имеет центр симметрии - центр куба, 9 осей симметрии и 9 плоскостей симметрии



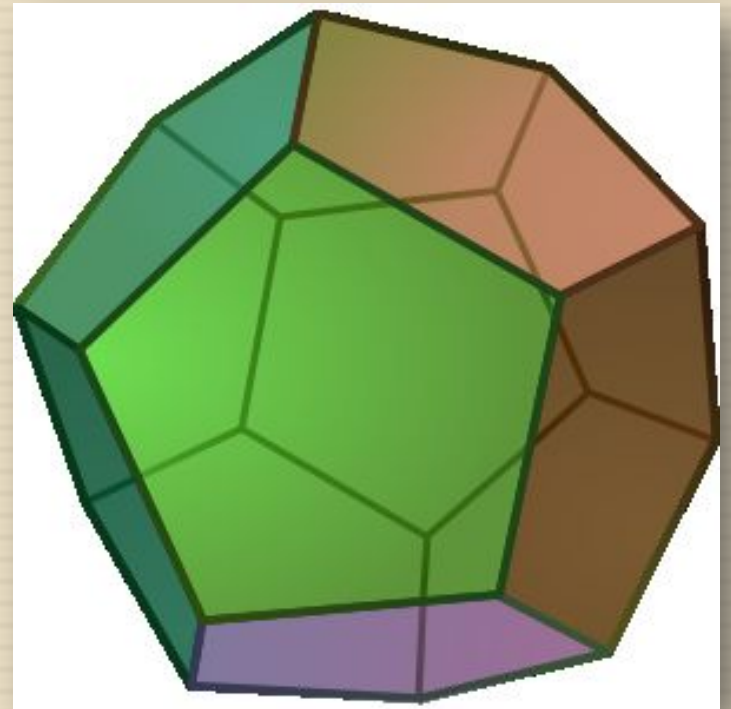
Октаэдр имеет центр симметрии - центр октаэдра, 9 осей симметрии и 9 плоскостей симметрии.



Икосаэдр имеет
центр симметрии - центр
икосаэдра, 15 осей
симметрии и 15
плоскостей симметрии.



Додекаэдр имеет
центр симметрии - центр
додекаэдра, 15 осей
симметрии и 15
плоскостей симметрии.



Литература:

- ❖ Геометрия 10-11 классы. Учебник для общеобразовательных учреждений. Базовые и профильные уровни. (Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузова, С.Б. Кадомцев, Л.С. Киселёва, Э.Г. Позняк)
- ❖ <http://www.geometry2006.narod.ru/Lecture/Regula/RegPol.htm>
- ❖ <http://pptcloud.ru/prezentatsii/geometrija/Simmetrija-pravilnykh-mnogogrannikov/Simmetrija-pravilnykh-mnogogrannikov.html>
- ❖ <http://tvsh2004.narod.ru/gm04.html>



**Спасибо за
внимание!**