

ПРЕДЕЛ МОНОТОННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Теорема Вейерштрасса

Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел

Пример. Задана последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

По формуле бинома Ньютона

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \cdot b^n.$$

Полагая $a = 1$, $b = \frac{1}{n}$, получим

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots \\
&\quad \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \frac{1}{n^n} = \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\
&\quad \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\
&\quad \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

(*)

Из последнего равенства следует, что с увеличением n число положительных слагаемых в правой части увеличивается.

Кроме того, при увеличении n число $\frac{1}{n}$ убывает, поэтому величины $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$, ... возрастают.

Поэтому последовательность

$$\{x_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\} \text{ — возрастающая, при этом } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2.$$

Покажем, что она ограничена.

Заменим каждую скобку в правой части (*)

на единицу; правая часть увеличится, получим

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}.$$

Усилим полученное неравенство, заменив числа 3, 4, 5, ..., стоящие в знаменателях дробей, числом 2:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Сумму в скобке найдем по формуле суммы членов геометрической прогрессии:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 \cdot (1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2.$$

Поэтому

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 2 = 3.$$

Итак, последовательность *ограничена*.

при этом для $\forall n \in \mathbb{N}$

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Следовательно, на основании теоремы Вейерштрасса последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел, обозначаемый обычно буквой e :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Число e иррациональное

$$2,72 \quad (e = 2,718281828459045 \dots)$$

Число e принято за основание натуральных логарифмов:

$$\ln x = \log_e x.$$

связь между натуральным и десятичным логарифмами.

$$\lg x = \lg(e^{\ln x}), \quad \text{т. е. } \lg x = \ln x \cdot \lg e.$$

$\lg e \approx 0,4343$ Значит, $\lg x \approx 0,4343 \cdot \ln x$.

$\ln x \approx \frac{1}{0,4343} \lg x$, т. е. $\ln x \approx 2,3026 \lg x$.