ПРЕДЕЛ МОНОТОННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Теорема Вейерштрасса

Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел

Пример. Задана последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,\ n \in \mathbb{N}.$

По формуле бинома Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots$$

$$\cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n} \cdot b^n.$$

Полагая $a = 1$, $b = \frac{1}{n}$, получим

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}+\dots$$
$$\dots+\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n}=$$
$$=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots$$
$$\dots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

или

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots$$
$$\dots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

(*)

Из последнего равенства следует, что с увеличением n число положительных слагаемых в правой части увеличивается.

Кроме того, при увеличении n число $\frac{1}{n}$ убывает, поэтому величины

$\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\left(1-\frac{2}{n}\right)$, ... возрастают.

Поэтому последовательность

$\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ — *возрастающая*, при этом $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$.

Покажем, что она ограничена.

Заменим каждую скобку в правой части (*)

на единицу; правая часть увеличится, получим

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n}.$$

Усилим полученное неравенство, заменив числа $3, 4, 5, \dots$, стоящие в знаменателях дробей, числом 2:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Сумму в скобке найдем по формуле суммы членов геометрической прогрессии:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1\cdot(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)<2.$$

Поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+2=3.$$

Итак, последовательность *ограничена*.

при этом для $\forall n \in \mathbb{N}$

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Следовательно, на основании теоремы Вейерштрасса последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел, обозначаемый обычно буквой e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Число e иррациональное

$$2{,}72 \ (e = 2{,}718281828459045\ldots)$$

Число e принято за основание натуральных логарифмов:

$$\ln x = \log_e x.$$

связь между натуральным и десятичным логарифмами

$$\lg x = \lg(e^{\ln x}), \quad \text{т. е. } \lg x = \ln x \cdot \lg e.$$

$\lg e \approx 0{,}4343$ Значит, $\lg x \approx 0{,}4343 \cdot \ln x.$

$\ln x \approx \dfrac{1}{0{,}4343} \lg x$, т. е. $\ln x \approx 2{,}3026 \lg x.$