
Пределы

Пределы

теория

Определение 1.

Постоянное число **b** называется пределом функции **f(x)** при $x \to a$, если для любого малого, наперёд заданного, положительного числа ξ найдётся положительное число δ такое, что для всех $x \neq a$ и удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$ будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \xi$.

Обозначение: $$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Определение 2.

Постоянная величина **a** называется пределом переменной **x**, если разность между ними есть величина бесконечно малая α,

т.е. $\lim x = a$, если $x - a = \alpha$, $\alpha \to 0$.

Теоремы о пределах:

Теорема 1. Переменная величина не может иметь двух различных пределов.

Теорема 2. Предел суммы конечного числа переменных величин, имеющих пределы, равен сумме пределов этих переменных.

$$\lim x=a,\ \lim y=b \ \rightarrow \lim(x+y)=\lim x + \lim y = a + b$$

Теорема 3. Предел разности переменных величин, имеющих пределы, равен разности пределов этих переменных.

$$\lim x=a,\ \lim y=b \ \rightarrow \ \lim(x-y)= \lim x - \lim y = a - b$$

Теоремы о пределах:

Теорема 4. Предел произведения конечного числа переменных величин, имеющих пределы, равен произведению пределов этих переменных.

$$\lim x=a,\ \lim y=b \ \rightarrow\ \lim(x\,y) = \lim x \cdot \lim y = a \cdot b$$

Следствия:

⁰ Предел произведения постоянной величины на переменную, имеющую предел, равен произведению постоянной на предел переменной.

$\lim (Ax)=A \lim x$, где $A=\text{const}$, x- переменная.

⁰ Предел степени переменной, имеющей предел, равен той же степени предела переменной.

$$\lim x^n=(\lim x)^n$$

Теорема 5. Предел частного двух переменных, имеющих пределы, равен частному пределов этих переменных (при условии, что предел делителя не равен нулю)

$$\lim x=a,\ \lim y=b \rightarrow \lim (x/y) = \lim x / \lim y = a / b$$

Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями

1. Функция, обратная по величине бесконечно большой, является бесконечно малой.
2. Функция, обратная по величине бесконечно малой, отличной от нуля, есть бесконечно большая.

Для функции f(x), такой, что f(x)≠0 в окрестности точки *a*, справедливы свойства:

2) если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

2) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$

Первый «замечательный» предел

$$l\,im_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

где х- радианная мера угла

Второй «замечательный» предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e\approx 2{,}71828$$

Вычисление пределов:

1 тип.

Предел делителя не равен нулю. В этом случае подставляем вместо переменной её предельное значение и вычисляем полученное выражение.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$$

2 тип.

Предел делителя равен нулю. В этом случае предел дроби равен бесконечности.

$$\left(\frac{f(x)}{0}\right)$$

3 тип.

Пределы делителя и делимого равны нулю. В этом случае получим **неопределённость** , для раскрытия которой нужно выполнить некоторые преобразования данного выражения.

$$\left(\frac{0}{0}\right)$$

В этом случае получим **неопределённость**,

для раскрытия которой нужно выполнить некоторые преобразования данного выражения:

* разложить на множители числитель и знаменатель дроби, затем сократить дробь, подставить вместо переменной её предельное значение и вычислить

или

* умножить числитель и знаменатель дроби на сопряжённое выражение, сократить и подставить предельное значение переменной

4 тип.
Предел делителя равен ∞, а предел делимого – конечное число. В этом случае предел частного равен 0.

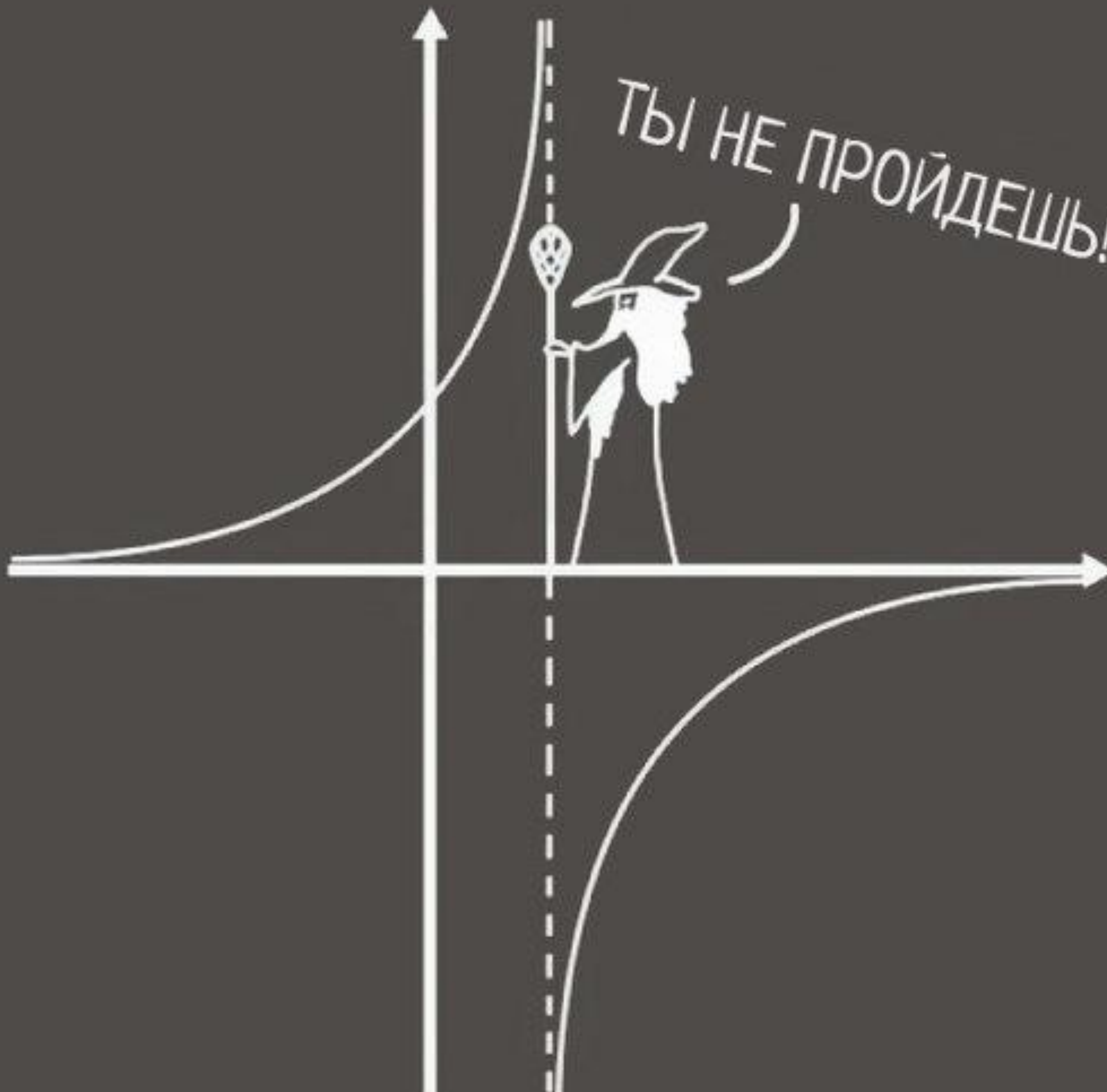
$$\left(\frac{const}{\infty}\right)$$

5 тип.
Пределы делителя и делимого равны ∞ .

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Если предел делителя и делимого равны ∞ , то получится выражение, не имеющее смысла (неопределённость). Для раскрытия этой неопределённости нужно числитель и знаменатель дроби разделить на переменную в наивысшей степени.

n = const, n ≠ 0	Виды неопределённости
$0 \times n = 0$ $\quad \infty \times n = \infty$ $\frac{0}{n} = 0$ $\quad \frac{n}{0} = \infty$ $\frac{n}{\infty} = 0$ $\quad \frac{\infty}{n} = \infty$	$\left(\frac{0}{0}\right)$ 1. Разложить дробь на множители. 2. Домножить числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение числителю или знаменателю.
	$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ Разделить числитель и знаменатель дроби на переменную в наивысшей степени.
	$(0 \times \infty)$ Преобразовать выражение.
	$(\infty - \infty)$ Преобразовать выражение (умножить и разделить на сопряжённое выражение или привести дроби к общему


ТЫ НЕ ПРОЙДЕШЬ!