Преобразования Лапласа

Определение

- **Пр**еобразова́ние Лапла́са — интегральное преобразование, связывающее функцию комплексного переменного (*изображение*) с функцией вещественного переменного (*оригинал*). С его помощью исследуются свойства динамических систем и решаются дифференциальные и интегральные уравнения.

Особености даного преобразования

- Одной из особенностей преобразования Лапласа, которые предопределили его широкое распространение в научных и инженерных расчётах, является то, что многим соотношениям и операциям над оригиналами соответствуют более простые соотношения над их изображениями. Так, свёртка двух функций сводится в пространстве изображений к операции умножения, а линейные дифференциальные уравнения становятся алгебраическими.

Прямое преобразование Лапласа

Преобразованием Лапласа функции вещественной переменной f(t) называется функция F(s) комплексной переменной $s = \sigma + i\omega$, такая что:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

Обратное преобразование Лапласа

- Обратным преобразованием Лапласа функции комплексного переменного F(s) , называется функция f(t) вещественной переменной, такая что:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\cdot\infty}^{\sigma_1 + i\cdot\infty} e^{st} F(s)\, ds,$$

где σ_1 — некоторое вещественное число.Правая часть этого выражения называется интегралом Бромвича.

Двустороннее преобразование Лапласа

- Двустороннее преобразование Лапласа — обобщение на случай задач, в которых для функции f(x) участвуют значения x<0. Двустороннее преобразование Лапласа определяется следующим образом: $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} f(x)\, dx.$

Дискретное преобразование Лапласа

Применяется в сфере систем компьютерного управления. Дискретное преобразование Лапласа может быть применено для решётчатых функций.

Различают D-преобразование и Z-преобразование.

D-преобразование

- Пусть $$x_d(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT)$$

  — решётчатая функция, то есть значения этой функции определены только в дискретные моменты времени nT где n – целое число, а T - период дискретизации.

Тогда применяя преобразование Лапласа

получим: $$\mathcal{D}\{x_d(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot e^{-snT}.$$

Z - **преобразование**

- Если применить следующую замену переменных: $z = e^{sT}$, получим Z-преобразование: $\mathcal{Z}\{x_d(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot z^{-n}.$

Абсолютная сходимость

- Если интеграл Лапласа абсолютно сходится при $\sigma = \sigma_0$, то есть существует предел

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b |f(x)| e^{-\sigma_0 x}\, dx = \int_0^\infty |f(x)| e^{-\sigma_0 x}\, dx,$$

то он сходится абсолютно и равномерно для $\sigma \geqslant \sigma_0$ F(s) и — аналитичная функция при $\sigma \geqslant \sigma_0$ ($\sigma = \operatorname{Re} s$ — вещественная часть комплексной переменной). Точная нижняя грань множества чисел , при которых это условие выполняется, называется *абсциссой абсолютной сходимости* преобразования Лапласа для функции f(x).

Условия существования прямого преобразования Лапласа

- Преобразование Лапласа $\mathcal{L}\{f(x)\}$ существует в смысле абсолютной сходимости в следующих случаях:
- 1. $\sigma \geqslant 0$ преобразование Лапласа существует, если существует интеграл $\int_0^{\infty} |f(x)|\,dx$
- 2. $\sigma > \sigma_a$ преобразование Лапласа существует, если интеграл $\int_0^{x_1} |f(x)|\,dx$ существует для каждого конечного $x_1 > 0$ и $|f(x)| \leqslant Ke^{\sigma_a x}$ для $x > x_2 \geqslant 0$
- 3. $\sigma > 0$ или $\sigma > \sigma_a$ (какая из границ больше): преобразование Лапласа существует, если существует преобразование Лапласа для функции $f'(x)$ производная к f(x) для $\sigma > \sigma_a$

Теорема о свёртке

Преобразованием Лапласа свёртки двух оригиналов является произведение изображений этих оригиналов:

$$\mathcal{L}\{f(x)*g(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\}\cdot\mathcal{L}\{g(x)\}.$$

Умножение изображений

Левая часть этого выражения называется интегралом Дюамеля, играющим важную роль в теории динамических систем

$$f(x)g(0) + \int\limits_0^x f(x-\tau)g'(\tau)\,d\tau = sF(s)G(s).$$

Дифференцирование и интегрирование оригинала

- Изображением по Лапласу первой производной от оригинала по аргументу является произведение изображения на аргумент последнего за вычетом оригинала в нуле справа: $\mathcal{L}\{f'(x)\} = s \cdot F(s) - f(0^+)$.
- В более общем случае (производная n -го порядка):

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\} = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} f(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+).$$

Изображением по Лапласу интеграла от оригинала по аргументу является изображение оригинала, делённое на свой аргумент: $$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t)\,dt\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

Дифференцирование и интегрирование изображения

- Обратное преобразование Лапласа от производной изображения по аргументу есть произведение оригинала на свой аргумент, взятое с обратным знаком:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = -xf(x).$$

- Обратное преобразование Лапласа от интеграла изображения по аргументу есть оригинал этого изображения, делённый на свой аргумент:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^{+\infty} F(s)\,ds\right\} = \frac{f(x)}{x}.$$

Запаздывание оригиналов и изображений

Запаздывание изображения:

$$\mathcal{L}\{e^{ax}f(x)\} = F(s-a);$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{ax}f(x).$$

Запаздывание оригинала:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\} = e^{-as}F(s);$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(x-a)H(x-a).$$

Предельные теоремы

Теоремы о начальном и конечном значении (предельные теоремы):

$f(\infty) = \lim_{s \to 0} sF(s)$, все полюсы в левой полуплоскости. Теорема о конечном значении очень полезна, так как описывает поведение оригинала на бесконечности с помощью простого соотношения. Это, например, используется для анализа устойчивости траектории динамической системы.

Преобразование Фурье

- Непрерывное преобразование Фурье эквивалентно двустороннему преобразованию Лапласа с комплексным аргументом $s = i\omega$

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\}\Big|_{s=i\omega} = F(s)\Big|_{s=i\omega} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x)\, dx.$$

Связь между преобразованиями Фурье и Лапласа часто используется для того, чтобы определить частотный спектр сигнала или динамической системы.