

Преобразования Лапласа

Определение

- **Преобразование Лапласа** — интегральное преобразование, связывающее функцию комплексного переменного (*изображение*) с функцией вещественного переменного (*оригинал*). С его помощью исследуются свойства динамических систем и решаются дифференциальные и интегральные уравнения.

Особенности данного преобразования

- Одной из особенностей преобразования Лапласа, которые предопределили его широкое распространение в научных и инженерных расчётах, является то, что многим соотношениям и операциям над оригиналами соответствуют более простые соотношения над их изображениями. Так, свёртка двух функций сводится в пространстве изображений к операции умножения, а линейные дифференциальные уравнения становятся алгебраическими.

Прямое преобразование Лапласа

Преобразованием Лапласа функции вещественной переменной $f(t)$ называется функция $F(s)$ комплексной переменной $s = \sigma + i\omega$,

такая что:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Обратное преобразование Лапласа

- Обратным преобразованием Лапласа функции комплексного переменного $F(s)$, называется функция $f(t)$ вещественной переменной, такая что:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} e^{st} F(s) ds,$$

где σ_1 — некоторое вещественное число. Правая часть этого выражения называется интегралом Бромвича.

Двустороннее преобразование Лапласа

- Двустороннее преобразование Лапласа — обобщение на случай задач, в которых для функции $f(x)$ участвуют значения $x < 0$.

Двустороннее преобразование Лапласа определяется следующим

образом:
$$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx.$$

Дискретное преобразование Лапласа

Применяется в сфере систем компьютерного управления. Дискретное преобразование Лапласа может быть применено для решётчатых функций.

Различают D-преобразование и Z-преобразование.

D-преобразование

- Пусть
$$x_d(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT)$$
 — решётчатая функция, то есть значения этой функции определены только в дискретные моменты времени nT где n – целое число, а T - период дискретизации.

Тогда применяя преобразование Лапласа

получим:
$$\mathcal{D}\{x_d(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot e^{-snT}.$$

Z - преобразование

- Если применить следующую замену переменных: $z = e^{sT}$, получим Z-

преобразование:
$$\mathcal{Z}\{x_d(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot z^{-n}.$$

Абсолютная сходимость

- Если интеграл Лапласа абсолютно сходится при $\sigma = \sigma_0$, то есть существует предел

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b |f(x)| e^{-\sigma_0 x} dx = \int_0^{\infty} |f(x)| e^{-\sigma_0 x} dx,$$

то он сходится абсолютно и равномерно для $\sigma \geq \sigma_0$. $F(s)$ и — аналитичная функция при $\sigma \geq \sigma_0$ ($\sigma = \operatorname{Re} s$ — вещественная часть комплексной переменной). Точная нижняя грань множества чисел, при которых это условие выполняется, называется *абсциссой абсолютной сходимости* преобразования Лапласа для функции $f(x)$.

Условия существования прямого преобразования Лапласа

- Преобразование Лапласа $\mathcal{L}\{f(x)\}$ существует в смысле абсолютной сходимости в следующих случаях:
- 1. $\sigma \geq 0$ преобразование Лапласа существует, если существует интеграл $\int_0^{\infty} |f(x)| dx$
- 2. $\sigma > \sigma_a$ преобразование Лапласа существует, если интеграл $\int_0^{x_1} |f(x)| dx$ существует для каждого конечного $x_1 > 0$ и $|f(x)| \leq Ke^{\sigma_a x}$ для $x > x_2 \geq 0$
- 3. $\sigma > 0$ или $\sigma > \sigma_a$ (какая из границ больше): преобразование Лапласа существует, если существует преобразование Лапласа для функции $f'(x)$ производная к $f(x)$ для $\sigma > \sigma_a$

Теорема о свёртке

Преобразованием Лапласа свёртки двух оригиналов является произведение изображений этих оригиналов:

$$\mathcal{L}\{f(x) * g(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\} \cdot \mathcal{L}\{g(x)\}.$$

Умножение изображений

Левая часть этого выражения называется интегралом Дюамеля, играющим важную роль в теории динамических систем

$$f(x)g(0) + \int_0^x f(x - \tau)g'(\tau) d\tau = sF(s)G(s).$$

Дифференцирование и интегрирование оригинала

- Изображением по Лапласу первой производной от оригинала по аргументу является произведение изображения на аргумент последнего за вычетом оригинала в нуле справа: $\mathcal{L}\{f'(x)\} = s \cdot F(s) - f(0^+)$.
- В более общем случае (производная n -го порядка):

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\} = s^n \cdot F(s) - s^{n-1}f(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+).$$

Изображением по Лапласу интеграла от оригинала по аргументу является изображение оригинала, делённое на свой аргумент:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t) dt\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

Дифференцирование и интегрирование изображения

- Обратное преобразование Лапласа от производной изображения по аргументу есть произведение оригинала на свой аргумент, взятое с обратным знаком:
$$\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = -xf(x).$$

- Обратное преобразование Лапласа от интеграла изображения по аргументу есть оригинал этого изображения, делённый на свой аргумент:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^{+\infty} F(s) ds\right\} = \frac{f(x)}{x}.$$

Запаздывание оригиналов и изображений

Запаздывание
изображения:

$$\mathcal{L}\{e^{ax} f(x)\} = F(s - a);$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\} = e^{ax} f(x).$$

Запаздывание
оригинала:

$$\mathcal{L}\{f(t - a)H(t - a)\} = e^{-as} F(s);$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = f(x - a)H(x - a).$$

Предельные теоремы

Теоремы о начальном и конечном значении (предельные теоремы):

$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$, все полюсы в левой полуплоскости. Теорема о конечном значении очень полезна, так как описывает поведение оригинала на бесконечности с помощью простого соотношения. Это, например, используется для анализа устойчивости траектории динамической системы.

Преобразование Фурье

- Непрерывное преобразование Фурье эквивалентно двустороннему преобразованию Лапласа с комплексным аргументом $s = i\omega$

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\} \Big|_{s=i\omega} = F(s) \Big|_{s=i\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx.$$

Связь между преобразованиями Фурье и Лапласа часто используется для того, чтобы определить частотный спектр сигнала или динамической системы.